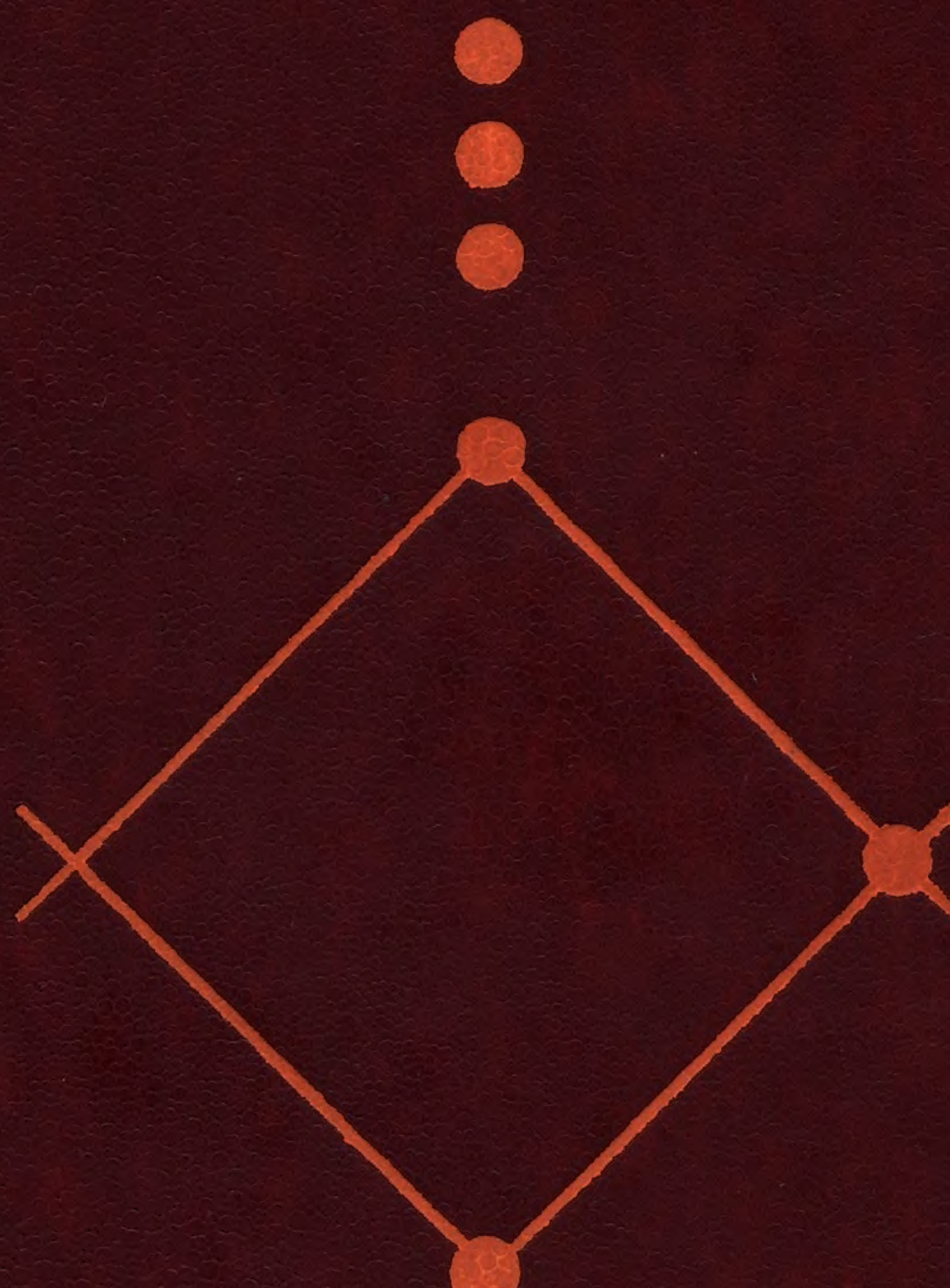
Дж. Бим
П. Эрлих

# ГЛОБАЛЬНАЯ ЛОРЕНЦЕВА ГЕОМЕТРИЯ



# ГЛОБАЛЬНАЯ ЛОРЕНЦЕВА ГЕОМЕТРИЯ

# GLOBAL LORENTZIAN GEOMETRY

John Beem
Paul Ehrlich

Department of Mathematics
University of Missouri
Columbia, Missouri

MARCEL DEKKER, INC. New York and Basel
1981

# ГЛОБАЛЬНАЯ ЛОРЕНЦЕВА ГЕОМЕТРИЯ

Дж. Бим
П. Эрлих

Перевод с английского
Е. В. Шикина

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва «Мир» 1985

ББК 22.151.2
Б61
УДК 513.814

**Бим Дж., Эрлих П.**

Б61 Глобальная лоренцева геометрия: Пер. с англ. — М.: Мир, 1985. 400 с., ил.

Систематическое изложение лоренцевой геометрии в целом, написанное известными американскими математиками. Книга отражает современные успехи в разработке общей теории относительности, а также достижения современной дифференциальной геометрии. Изложение доступное и ясное.

Для математиков разных специальностей, студентов и аспирантов университетов.

Б $\frac{1702040000-486}{041(01)-85}$ 16-85, ч. 1

ББК 22.151.2
517.5

*Редакция литературы по математическим наукам*

---

Джон Бим, Пол Эрлих

ГЛОБАЛЬНАЯ ЛОРЕНЦЕВА ГЕОМЕТРИЯ

Старший научный редактор А. А. Бряндинская. Младший научный редактор Н. С. Полякова

Художественный редактор В. И. Шаповалов. Художник Е. К. Самойлов

Технический редактор А. Г. Резоухова. Корректор М. А. Смирнов

ИБ № 5267

Сдано в набор 06.02.85. Подписано в печать 25.10.85. Формат $60 \times 90^1/_{16}$.
Бумага типографская № 1. Печать высокая. Гарнитура литературная.
Объем бум. л. 12,50. Усл. печ. л. 25,0. Усл. кр.-отт. 25,0. Уч.-изд. л. 24,77.
Изд. № 1/3961. Тираж 4500 экз. Зак. 69. Цена 3 р. 90 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР», 129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

---

# ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Значительные достижения последних лет в разработке общей теории относительности (достаточно упомянуть исследования причинной структуры пространства-времени, изучение сингулярностей и черных дыр) привели к возрождению интереса к глобальной лоренцевой геометрии. Естественным путем удовлетворения этого интереса следует признать предпринятую авторами предлагаемой книги попытку систематического изложения лоренцевой геометрии в целом.

Идею построения этой книги авторам подсказал современный подход к изложению римановой геометрии. Изучение геометрии лоренцевых многообразий основывается на трех основных понятиях: полноте (метрической и геодезической), лоренцевой функции расстояния и теории Морса для непространственноподобных геодезических. При этом авторы постоянно сравнивают обсуждаемые результаты и разрабатываемую ими технику доказательств в лоренцевой геометрии с соответствующими результатами и методами римановой геометрии.

Свойства лоренцевых аналогов фактов римановой геометрии часто оказываются неожиданными и удивительно разнообразными. Укажем, например, наличие нескольких неэквивалентных типов полноты, обратное неравенство треугольника, неограниченность лоренцева расстояния и др., а из более фундаментальных отличий — существование причинной структуры лоренцевых многообразий, идеальных границ и сингулярностей. Многие отличия возникают из-за отсутствия достаточно сильного аналога теоремы Хопфа—Ринова.

Авторы постоянно стремятся объяснить, чем они руководствовались при выборе того или иного подхода к изложению рассматриваемых вопросов и подборе доказательств. Поэтому, помимо общего введения к книге, каждая глава и даже каждый раздел главы содержит обстоятельную вводную часть. Следует подчеркнуть близость этой книги к переведенным у нас монографиям Громола Д., Клингенберга В. и Мейера В. «Риманова геометрия в целом» (М.: Мир, 1971) и Хокинга С. и Эллиса Дж. «Крупномасштабная структура пространства-времени» (М.: Мир, 1977).

В предлагаемой вниманию читателя книге излагаются недавние научные результаты, многие из которых получены при участии авторов. Этим, по-видимому, объясняется своеобразный стиль книги — эмоциональный и порой несколько вольный (особенно во вводных частях); переводчик стремился сохранить этот стиль. И хотя эта книга не является учебником, воспроизводимые в ней доказательства изложены достаточно четко и подробно.

При переводе были устранены замеченные в оригинале мелкие неточности и опечатки; при этом учтены и материалы, присланные авторами для русского издания. Переводчик считает своим приятным долгом поблагодарить Дж. К. Бима и П. Э. Эрлиха за сотрудничество при подготовке этого издания.

Книги, на которые особенно часто ссылаются авторы, в основном переведены на русский язык и изданы, что было учтено в настоящем издании: соответствующие ссылки даны на русские переводы.

Хочется надеяться, что читатели, желающие ознакомиться с современным состоянием лоренцевой геометрии в целом, найдут в этой книге много интересного и полезного.

**22 января 1985 г.**

*Е. В. Шикин*

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Это книга о математической теории, которая используется в общей теории относительности — лоренцевой геометрии, рассматриваемой с точки зрения глобальной дифференциальной геометрии. Ее цель — перекинуть мостик между современной дифференциальной геометрией и математической физикой общей теории относительности, дав инвариантное изложение глобальной лоренцевой геометрии. Растущую важность такого подхода в физике можно наглядно проиллюстрировать на примере недавних теорем Хокинга—Пенроуза, изложенных в книге Хокинга и Эллиса (1977).

Лоренцева функция расстояния используется в нашей книге как универсальное средство. Кроме того, мы постоянно сопоставляем и противопоставляем результаты и методы лоренцевой геометрии с результатами и методами римановой геометрии, с тем чтобы подготовить читателя к восприятию основных отличий между этими двумя геометриями.

Эта книга написана специально для математиков, знакомых с основами римановой геометрии и желающих изучить лоренцеву геометрию. В соответствии с этим в книге используются бозначения и методы современной дифференциальной геометрои. Для читателей, менее знакомых с этими обозначениями, мы вкилючил добавление А, в котором приводятся выражения для используеи мых символов в локальных координатах.

Основным требованием к читателям является практическое владение основами общей топологии и дифференциальной геометрии. Таким образом, книга окажется доступной студентам старших курсов, специализирующимся в математике, а также в математической физике.

При работе над этой книгой обоим авторам оказалась очень полезной возможность изложить часть ее в весеннем семестре 1978 г. в лекциях для студентов Университета Миссури (Колумбия). Второй из авторов в летнем семестре 1978 г. прочитал также цикл лекций по обсуждаемым здесь темам на семинаре Эрнста Руха по дифференциальной геометрии в Боннском университете и хотел бы поблагодарить профессора Руха за предоставленную

ему эту возможность. Мы благодарны К. Альбрандту, Д. Карлсону и М. Якобсу за несколько полезных бесед, касающихся вариационного исчисления и некоторых фактов из разд. 2.4. Мы хотели бы поблагодарить также М. Энгмана, С. Харриса, К. Номидзу, Т. Пауэлла, Д. Рецлофф и Х. Ву за полезные замечания по первоначальному варианту настоящей монографии. Мы признательны С. Харрису за написание добавления Г к этой монографии, а также Й.-Х. Эхенбургу за то, что он обратил наше внимание на дипломную работу Бёлтса (1977). Каждому, кто читал превосходные книги Громола, Клингенберга и Мейера (1971) по римановой геометрии или Хокинга и Эллиса (1977) по общей теории относительности, должно быть ясно, сколь многим мы обязаны этим авторам. Обоим авторам доставляет удовольствие поблагодарить Совет по научным исследованиям Университета Миссури (Колумбия), а второму автору — еще и 40-й отдел специальных исследований в области теоретической математики Математического отделения Боннского университета. Кроме того, мы хотели бы выразить признательность Национальному научному фонду Гранта MCS 77-18723 (02), контролируемого институтом повышения квалификации (Принстон, Нью Джерси), за частичную финансовую поддержку во время нашей работы над этой монографией. Наконец, нам приятно выразить благодарность Диане Гоффман, Деанне Уилльямсон и Дебре Рецлофф за терпеливое и неутомимое печатание рукописи.

*Джон К. Бим*
*Пол Э. Эрлих*

Глава 1

# ВВЕДЕНИЕ: РИМАНОВЫ МОТИВЫ В ЛОРЕНЦЕВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Недавние достижения в теории причинности, теории сингулярностей, а также в изучении черных дыр в общей теории относительности, изложенные в фундаментальной книге Хокинга и Эллиса (1977), послужили причиной возрождения интереса к глобальной лоренцевой геометрии. Действительно, для разработки теории сингулярностей потребовалось более глубокое понимание глобальной лоренцевой геометрии. Например, оказалось необходимым знать, что причинно связанные точки в глобально гиперболических подмножествах пространственно-временных многообразий можно соединить непространственноподобным геодезическим сегментом, максимизирующим лоренцеву длину дуги в классе всех непространственноподобных кривых, соединяющих две заданные точки. Добавим еще, что значительная работа, которая была проделана в 70-х годах по асимптотическому расслаиванию плоских лоренцевых многообразий семействами максимальных гиперповерхностей, мотивировалась нуждами общей теории относительности (см. Шоке-Брюа, Фишер и Марсден (1979), где приведен (неполный) список ссылок).

Все эти результаты естественно наводят на мысль о необходимости систематического изучения глобальной лоренцевой геометрии. Изложение «современной» римановой геометрии, как это сделано в любом из общепризнанных учебников (см. Бишоп и Криттенден (1967), Громол, Клингенберг и Мейер (1971), Хелгасон (1964), Хикс (1965)), подсказывает идею, что всестороннюю разработку глобальной лоренцевой геометрии следует вести в трех основных направлениях: геодезическая и метрическая полнота, лоренцева функция расстояния, теория Морса для непространственноподобных геодезических сегментов в произвольном лоренцевом многообразии.

Геодезическая полнота или, точнее, геодезическая неполнота играет решающую роль в изложении теории сингулярностей в общей теории относительности, и в этих рамках она была тщательно исследована. В то же время лоренцева функция расстояния, хотя она и использовалась при исследовании сингулярностей (см. Хокинг (1967), Хокинг и Эллис (1977), Типлер (1977а), Бим и

Эрлих (1979 а)), изучена не столь хорошо. Хокингом и Эллисом (1977, с. 239—241) кратко описаны свойства лоренцевой функции расстояния, необходимые в общей теории относительности. Некоторые результаты, связывающие лоренцево расстояние с причинностью и глобальным поведением непространственноподобных геодезических, получены также Бимом и Эрлихом (1979 б).

Уленбек (1975), Эверсон и Толбот (1976) и Вудхуаз (1976) изучали теорию Морса для глобально гиперболических пространственно-временны́х многообразий; нами (см. Бим и Эрлих (1979 в, г)) опубликовано схематическое изложение теории Морса для непространственноподобных геодезических в произвольных пространственно-временны́х многообразиях. Однако сколь-либо полной разработки этой теории для произвольного пространства-времени ранее не публиковалось.

Цель настоящей монографии состоит в следующем. Сначала будут рассмотрены известные результаты по геодезической и метрической полноте. Затем мы подробно изложим свойства лоренцевой функции расстояния и теорию Морса для непространственноподобных геодезических в произвольных пространственно-временны́х многообразиях. В заключение мы покажем, как эти понятия можно прилагать к глобальной лоренцевой геометрии и теории сингулярностей в общей теории относительности.

Лоренцева функция расстояния имеет много общего с римановой функцией расстояния, но есть и много различий. Так как лоренцева функция расстояния не так хорошо известна, мы начнем с того, что напомним основные свойства римановой функции расстояния, а затем сопоставим и противопоставим их соответствующим результатам для лоренцевой функции расстояния.

Всюду до конца введения мы будем придерживаться следующих обозначений: риманово многообразие будем обозначать через $(N, g_0)$, а лоренцево — через $(M, g)$.

Итак, $N$ — гладкое паракомпактное многообразие, наделенное в каждом касательном пространстве $T_pN$ положительно определенным скалярным произведением $g_0|_p\colon T_pN \times T_pN \to \mathbb{R}$. Кроме того, если $X$ и $Y$ — произвольные гладкие векторные поля на $N$, то функция $N \to \mathbb{R}$, задаваемая по правилу $p \longmapsto g_0(X(p), Y(p))$, должна быть гладкой. Тогда риманова структура $g_0\colon TN \times TN \to \mathbb{R}$ определяет риманову функцию расстояния

$$d_0\colon N \times N \to [0, \infty)$$

следующим образом. Пусть $\Omega_{p,q}$ — множество кусочно-гладких кривых в $N$ из $p$ в $q$. Для заданной $c \in \Omega_{p,q}$, $c\colon [0, 1] \to N$, существует конечное разбиение $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = 1$, такое, что $c \mid [t_i, t_{i+1}]$ является гладкой кривой для каждого $i$. Рима-

нова длина дуги кривой $c$ относительно метрики $g_0$ определяется по формуле

$$L_0(c) = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{g_0(c'(t), c'(t))}\, dt.$$

Риманово расстояние $d_0(p, q)$ между точками $p$ и $q$ задается соотношением

$$d_0(p, q) = \inf \{L_0(c): c \in \Omega_{p, q}\} \geqslant 0.$$

Для любой римановой метрики $g_0$ на $N$ функция $d_0: N \times N \to [0, \infty)$ обладает следующими свойствами:

(1) $d_0(p, q) = d_0(q, p)$ для всех $p, q \in N$;

(2) $d_0(p, q) \leqslant d_0(p, r) + d_0(r, q)$ для всех $p, q, r \in N$;

(3) $d_0(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$.

Более удивительным является следующее свойство:

(4) функция $d_0$: $N \times N \to [0, \infty)$ непрерывна и семейство метрических шаров

$$B(p, \varepsilon) = \{q \in N: d_0(p, q) < \varepsilon\}$$

для любых $p \in N$ и $\varepsilon > 0$ образует базис исходной топологии многообразия.

Таким образом, метрическая топология и исходная топология многообразия совпадают. Более того, согласно результату Уайтхеда (1932), для любой данной точки $p \in N$ существует $R > 0$, такое, что для любого $\varepsilon$, подчиненного условию $0 < \varepsilon < R$, метрический шар $B(p, \varepsilon)$ является геодезически выпуклым. Тем самым для любого $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < R$, множество $B(p, \varepsilon)$ диффеоморфно $n$-диску, $n = \dim N$, а множество $\{q \in N: d_0(p, q) = \varepsilon\}$ диффеоморфно сфере $S^{n-1}$.

Выбрасывая из $\mathbb{R}^2$ начало координат, вычислим расстояние между точками $p = (-1, 0)$ и $q = (1, 0)$ ($\mathbb{R}^2$ наделена обычной евклидовой метрикой). Имеем $d_0(p, q) = 2$, однако в $\Omega_{p, q}$ нельзя найти кривой $c$, для которой выполнялось бы равенство $L_0(c) = d_0(p, q)$. Тем самым гладкой геодезической, соединяющей точки $p$ и $q$, в этом пространстве нет.

Поэтому естественно возникают следующие вопросы. Для данного многообразия $N$ найти условия на риманову метрику $g_0$, такие, чтобы:

(1) Все геодезические в $N$ можно было продолжить так, чтобы они были определены для всех $t$ из $\mathbb{R}$.

(2) Пара $(N, d_0)$ была бы полным метрическим пространством в смысле сходимости всех последовательностей Коши.

(3) Для любых двух заданных точек $p, q \in N$ существовал бы гладкий геодезический сегмент $c \in \Omega_{p, q}$, для которого $L_0(c) = d_0(p, q)$.

Геодезический сегмент, реализующий расстояние, как указано в (3), называется *минимальным* геодезическим сегментом. Слово *минимальный* используется здесь вследствие того, что из определения риманова расстояния вытекает неравенство $L_0(\gamma) \geqslant d_0(p, q)$, справедливое для всех $\gamma \in \Omega_{p,q}$. Более общо, можно определить произвольную кусочно-гладкую кривую $\gamma \in \Omega_{p,q}$ как *минимальную*, если $L_0(\gamma) = d_0(p, q)$. Применяя к функционалу длины дуги методы вариационного исчисления, можно показать, что если $\gamma \in \Omega_{p,q}$ минимальна, то ее можно перепараметризовать в гладкий геодезический сегмент.

Вопрос об отыскании критерия того, чтобы метрика $g_0$ допускала выполнение требований (1), (2), (3), был решен Хопфом и Риновом в их знаменитой работе (1931). В современной терминологии теорема Хопфа—Ринова утверждает следующее.

**Теорема Хопфа-Ринова.** *Для любого риманова многообразия* $(N, g_0)$ *следующие условия равносильны*:

(А) *Метрическая полнота:* $(N, d_0)$ — *полное метрическое пространство.*

(Б) *Геодезическая полнота. для любого вектора* $v \in TN$ *геодезическая* $c(t)$ *на* $N$, *у которой* $c'(0) = v$, *определена для всех положительных и отрицательных вещественных чисел* $t \in \mathbb{R}$.

(В) *Для каждой точки* $p \in N$ *экспоненциальное отображение* $\exp_p$ *определено на всем касательном пространстве* $T_pN$ *к* $N$ *в* $p$.

(Г) *Конечная компактность. каждое подмножество* $K$ *многообразия* $N$, *являющееся* $d_0$*-ограниченным* (*т. е.* $\sup\{d_0(p, q)\colon p, q \in K\} < \infty$), *имеет компактное замыкание. Кроме того, если хотя бы одно из условий* (А)—(Г) *выполнено, то*

(Д) *Любые две точки* $p, q, \in N$ *можно соединить гладким геодезическим сегментом* $c$ *из* $p$ *в* $q$, *для которого* $L_0(c) = d_0(p, q)$.

Риманово многообразие $(N, g_0)$ называется *полным* при условии, что хотя бы одно (а следовательно, все) из требований (А)—(Г) выполнено. Следует подчеркнуть, что теорема Хопфа—Ринова гарантирует эквивалентность метрической и геодезической полноты, а также и то, что все римановы метрики на компактном гладком многообразии полны. К сожалению, ни одно из этих утверждений не имеет силы для произвольных лоренцевых многообразий.

Оставшийся вопрос для некомпактных, но паракомпактных многообразий — существование полных римановых метрик — был решен Номидзу и Одзеки (1961). Они доказали, что для любой заданной римановой метрики $g_0$ на $N$ существует *полная* риманова метрика на $N$, глобально конформная $g_0$. А так как любое паракомпактное связное гладкое многообразие $N$ допускает риманову метрику (при помощи разбиения единицы), то $N$ допускает также и полную риманову метрику.

Обратимся теперь к лоренцеву многообразию $(M, g)$. Лоренцева метрика $g$ для гладкого паракомпактного многообразия $M$ — это задание на каждом касательном пространстве $T_pM$ невырожденной билинейной формы: $g|_p: T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ с диагональным видом $(-, +, \ldots, +)$. Хорошо известно, что если $M$ компактно и его эйлерова характеристика $\chi(M) \neq 0$, то $M$ не допускает никакой лоренцевой метрики. С другой стороны, любое некомпактное многообразие лоренцеву метрику допускает. Герок (1968а) и Марате (1972) показали также, что если гладкое хаусдорфово многообразие допускает лоренцеву метрику, то оно паракомпактно.

Ненулевые касательные векторы классифицируются как *времениподобные*, *пространственноподобные*, *непространственноподобные* или *изотропные* соответственно тому, что $g(v, v) < 0$, $>0$, $\leqslant 0$ или $= 0$. (Некоторые авторы используют для лоренцевой метрики соглашение $(+, -, \ldots, -)$, и поэтому у них все неравенства приведенного определения заменяются на противоположные.) Лоренцево многообразие $(M, g)$ называется *ориентируемым во времени*, если на $M$ существует непрерывное, нигде не обращающееся в нуль времениподобное векторное поле $X$. Это векторное поле используется для разбиения в каждой точке множества непространственноподобных векторов на два класса — класс векторов, *направленных в будущее*, и класс векторов, *направленных в прошлое*. *Пространством-временем* называется лоренцево многообразие $(M, g)$ вместе с выбранной на нем ориентацией во времени. Ниже мы, как правило, будем иметь дело именно с такими пространственно-временными многообразиями.

Чтобы определить лоренцеву функцию расстояния и обсудить ее свойства, нам необходимо ввести некоторые понятия из элементарной теории причинности. Если на $M$ существует направленная в будущее кусочно-гладкая времениподобная кривая, идущая из точки $p$ в точку $q$, то обычно пишут $p \ll q$, если же $p = q$ или на многообразии $M$ существует направленная в будущее кусочно-гладкая непространственноподобная кривая из $p$ в $q$, то пишут $p \leqslant q$. *Хронологическое прошлое* и *хронологическое будущее* точки $p$ задаются следующими соотношениями $I^-(p) = \{q \in M: q \ll p\}$ и $I^+(p) = \{q \in M: p \ll q\}$, а *причинное прошлое* и *причинное будущее* точки $p$ имеют вид $J^-(p) = \{q \in M: q \leqslant p\}$ и $J^+(p) = \{q \in M: p \leqslant q\}$ соответственно. Множества $I^-(p)$ и $I^+(p)$ в любом пространстве-времени всегда открыты, а множества $J(p)$ и $J^+(p)$ в общем случае ни открыты, ни замкнуты (рис. 1.1).

*Причинная структура* пространства-времени $(M, g)$ может быть определена как набор множеств прошлого и множеств будущего во всех точках многообразия $M$ вместе с их свойствами. Можно показать, что две сильно причинные лоренцевы метрики $g_1$ и $g_2$ на $M$ определяют одни и те же множества прошлого и бу-

дущего во всех точках $M$ в том и только том случае, когда эти метрики глобально конформны (т. е. $g_1 = \Omega g_2$ для некоторой гладкой функции $\Omega$: $M \to (0, \infty)$). Обозначим через $C(M, g)$ множество лоренцевых метрик, глобально конформных $g$. Тогда из сказанного выше вытекает, что свойства, соответственно определенные через множества прошлого и будущего, либо выполняются одновременно для всех метрик из $C(M, g)$, либо не выполняются ни для одной из метрик множества $C(M, g)$. Таким образом, все основные свойства элементарной теории причинности зависят только от конформного класса $C(M, g)$, но не от выбора конкретной метрики из него.

По-видимому, двумя самыми простыми свойствами, которыми надо снабдить конформную структуру $C(M, g)$, являются следующие: $(M, g)$ является либо хронологическим, либо причинным. Пространство-время $(M, g)$ называется *хронологическим*, если $p \notin I^+(p)$ для всех $p \in M$. Это означает, что $(M, g)$ не содержит замкнутых времениподобных кривых. Пространство-время $(M, g)$ называется *причинным*, если в нем нельзя указать пары различных точек $p, q \in M$, связанных соотношением $p \leqslant q \leqslant p$. Это

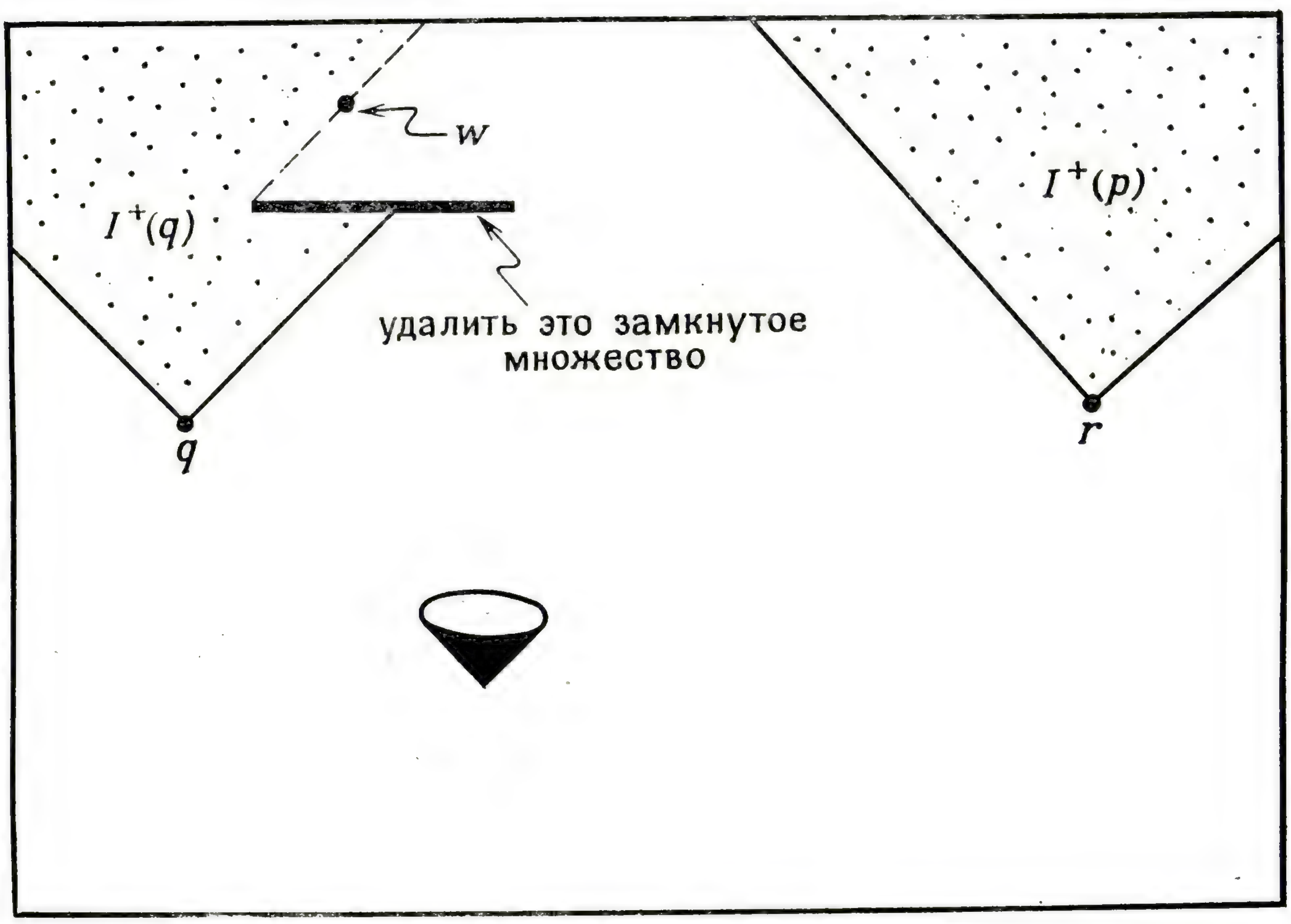



Рис. 1.1. Хронологическое (соответственно причинное) будущее заданной точки состоит из всех точек, которые можно достичь из этой точки направленными в будущее времениподобными кривыми (соответственно непространственноподобными). В данном примере причинное будущее $J^+(r)$ точки $r$ является замыканием хронологического будущего $I^+(r)$ этой точки. С другой стороны, множество $J^+(q)$ не является замыканием $I^+(q)$. В частности, точка $w$ лежит в замыкании $J^+(q)$, но не принадлежит $J^+(q)$.

равносильно требованию, что $(M, g)$ не содержит замкнутых непространственноподобных кривых.

Уже на этой стадии проявляется основное различие между лоренцевой и римановой геометриями. Из физических соображений пространственно-временны́е многообразия общей теории относительности обычно предполагаются хронологическими. Однако легко показать, что если $M$ компактно, то $(M, g)$ содержит замкнутую времениподобную кривую. Поэтому пространственно-временны́е многообразия, обычно рассматриваемые в общей теории относительности, предполагаются некомпактными.

В общей теории относительности каждая точка лоренцева многообразия соответствует событию. Таким образом, существование замкнутой времениподобной кривой порождает возможность того, что, пересекая некоторый путь, можно встретить самого себя в более юном возрасте. Более общо, замкнутые непространственноподобные кривые порождают парадоксы, включающие причинность, и поэтому говорят о «нарушении причинности». Даже если в пространстве-времени нет замкнутых непространственноподобных кривых, оно может содержать точку $p$, для которой существуют направленные в будущее непространственноподобные кривые, покидающие произвольно малую окрестность этой точки $p$ и затем возвращающиеся. Такое поведение непространственноподобных кривых называется нарушением сильной причинности в точке $p$. Пространственно-временны́е многообразия, в которых таких нарушений нет, называются *сильно причинными*. Сильно причинные пространственно-временны́е многообразия образуют важный подкласс причинных пространственно-временны́х многообразий. Для этого класса пространственно-временны́х многообразий топология Александрова с базисом $\{I^+(p) \cap I^-(q): p, q \in M\}$ для $M$ и исходная топология многообразия связаны следующим образом (см. Кронхеймер и Пенроуз (1967), Пенроуз (1972)):

**Теорема.** *Следующие требования равносильны:*

(а) *многообразие $(M, g)$ является сильно причинным*;

(б) *топология Александрова, индуцированная на многообразии $M$, совпадает с исходной топологией многообразия;*

(в) *топология Александрова хаусдорфова.*

Наконец, мы готовы к тому, чтобы определить лоренцеву функцию расстояния $d = d(g): M \times M \to [0, \infty]$ произвольного пространства-времени. Если $c: [0, 1] \to M$ — кусочно-гладкая непространственноподобная кривая, дифференцируемая всюду, кроме точек $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = 1$, то длина $L(c) = L_g(c)$ кривой $c$ задается следующей формулой:

$$L(c) = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{-g(c'(t), c'(t))}\, dt.$$

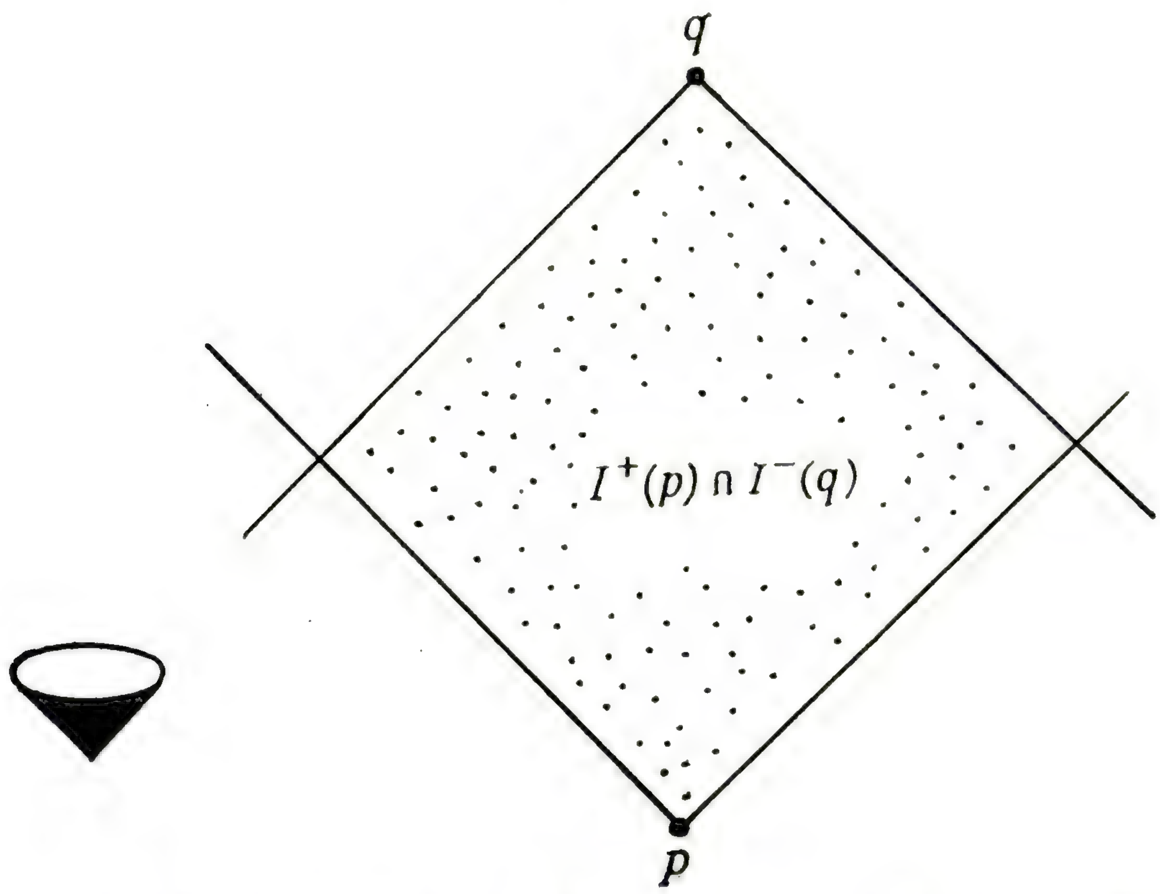



Рис. 1.2. Множества вида $I^+(p) \cap I^-(q)$, где $p, q \in M$ произвольны, образуют базис топологии Александрова. Эта топология всегда является по меньшей мере столь же грубой, что и исходная топология на $M$. Топология Александрова совпадает с исходной топологией тогда и только тогда, когда $(M, g)$ сильно причинно.

Если $p \ll q$, то существуют времениподобные кривые из $p$ в $q$ (очень близкие к кусочно гладким изотропным кривым), имеющие произвольно малую длину. Таким образом, точная нижняя грань лоренцевых длин дуг всевозможных кусочно гладких кривых, соединяющих две произвольные, хронологически связанные точки $p, q$ $(p \ll q)$, равна нулю. С другой стороны, если $p \ll q$ и $p, q$ лежат в геодезически выпуклой окрестности $U$, то направленный в будущее времениподобный геодезический сегмент в $U$ из $p$ в $q$ имеет наибольшую лоренцеву длину дуги среди всех непространственноподобных кривых в $U$, идущих из $p$ в $q$. Поэтому для $d(p, q)$ естественным является следующее определение: зафиксировав $p \in M$, полагаем $d(p, q) = 0$, если $q \notin J^+(p)$; если же $q \in J^+(p)$, то в качестве $d(p, q)$ берем точную верхнюю грань лоренцевой длины дуги в классе всех непространственноподобных кривых из $p$ в $q$. Поэтому если $q \in J^+(p)$ и $\gamma$ — произвольная направленная в будущее непространственноподобная кривая из $p$ в $q$, то $L(\gamma) \leqslant d(p, q)$. Следовательно, в отличие от римановой функции расстояния лоренцева функция расстояния априори может принимать бесконечные значения. В самом деле, так называемое полностью искаженное пространство-время можно охарактеризовать при помощи его лоренцевой функции расстояния следующим образом: $d(p, q) = \infty$ для всех $p, q \in M$. Точно так же, если $(M, g)$ не является хронологическим и $p \in I^+(p)$, то $d(p, p) = \infty$. Пространства Райсснера—Нордстрема, представляющие собой физически важный пример точного решения уравнений Эйнштейна в общей теории относительности, также содержат

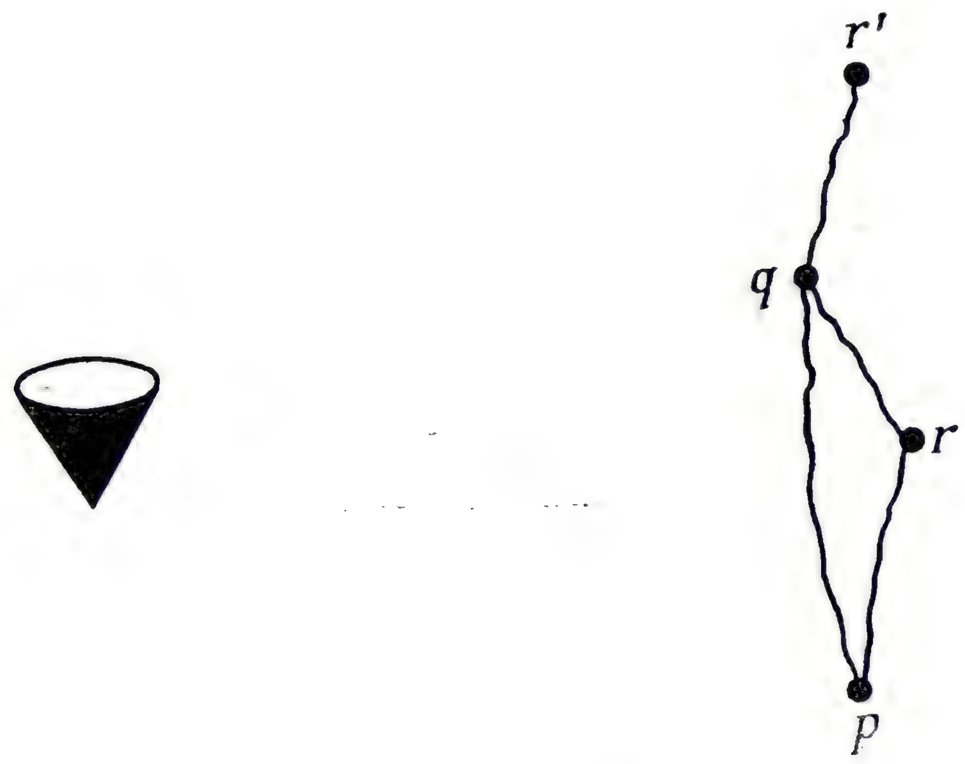



Рис. 1.3. Если точка $r$ находится в причинном будущем точки $p$, а точка $q$ находится в причинном будущем точки $r$, то функция расстояния удовлетворяет обратному неравенству треугольника $\mathrm{d}(p, q) \geqslant \mathrm{d}(p, r) + \mathrm{d}(r, q)$. Обратное неравенство треугольника для точки $r'$, которая не является причинно расположенной между $p$ и $q$, в общем случае не выполняется.

пары хронологически связанных различных точек $p \ll q$, для которых $\mathrm{d}(p, q) = \infty$.

По определению лоренцева расстояния $\mathrm{d}(p, q) = 0$, если $q \in M \setminus J^+(p)$. Мы даже видели, что возможно $\mathrm{d}(p, p) = \infty$. Поэтому для произвольных лоренцевых многообразий нет аналога свойства (3) римановой функции расстояния. К тому же лоренцева функция расстояния, как следует из ее определения, несимметрична. В частности, для любого пространства-времени можно показать, что если $0 < \mathrm{d}(p, q) < \infty$, то $d(q, p) = 0$. Вместе с тем лоренцева функция расстояния обладает полезным аналогом свойства (2) римановой функции расстояния: $\mathrm{d}(p, q) \geqslant \mathrm{d}(p, r) + \mathrm{d}(r, q)$ для всех $p, q, r \in M$, связанных условием $p \leqslant r \leqslant q$. Обращение знака неравенства не является неожиданным вследствие того, что непространственноподобные геодезические в лоренцевом многообразии максимизируют, а не минимизируют длину дуги.

В силу того, что $\mathrm{d}(p, q) > 0$ в том и только том случае, когда $q \in I^+(p)$, и $\mathrm{d}(q, p) > 0$ в том и только том случае, когда $q \in I^-(p)$, функция расстояния определяет хронологию многообразия $(M, g)$. С другой стороны при конформном изменении метрики изменяется расстояние, но не хронология, так что хронология не определяет функцию расстояния. Ясно также, что функция расстояния не определяет множеств $J^+(p)$ или $J^-(p)$ вследствие того, что $\mathrm{d}(p, q) = 0$ не только для $q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$, но также и для $q \in M \setminus J^+(p)$.

Свойством (4) римановой функции расстояния является ее непрерывность для любой римановой метрики. Для пространст-

венно-временных многообразий, напротив, лоренцева функция расстояния может не быть даже полунепрерывной сверху. В самом деле, из непрерывности d: $M \times M \to [0, \infty]$ вытекает следующее свойство причинной структуры многообразия $(M, g)$ (см. теорему 3.24). Если $(M, g)$ является различающим пространством-временем и функция d непрерывна, то $(M, g)$ причинно непрерывно (см. гл. 2, где приведены соответствующие определения). Следовательно, для произвольных пространственно-временных многообразий необходимо допускать отсутствие непрерывности и конечности лоренцевой функции расстояния. Тем не менее лоренцева функция расстояния в случае, если она конечна, является полунепрерывной снизу. Это может быть связано с полунепрерывностью сверху в $C^0$-топологии лоренцева функционала длины дуги сильно причинных пространств при построении непространственноподобных геодезических реализующих расстояние, в некоторых классах пространственно-временных многообразий (см. разд. 7.1 и 7.2).

Учитывая все эти замечания, естественно задаться вопросом: можно ли найти класс пространственно-временных многообразий, для которых лоренцева функция расстояния принимает только конечные значения и/или непрерывна? Одним из таких классов являются глобально гиперболические пространственно-временные многообразия. Пространство-время $(M, g)$ называется здесь *глобально гиперболическим*, если оно сильно причинно и удовлетворяет следующему условию: множества вида $J^+(p) \cap J^-(q)$ компактны для любых $p, q \in M$. При доказательстве теорем о сингулярностях в общей теории относительности информация о том, что $(M, g)$ глобально гиперболично и, значит, лоренцева функция расстояния конечнозначна и непрерывна, оказывается чрезвычайно полезной. Любопытно отметить, что конечность функции расстояния в большей степени, чем ее непрерывность, характеризует глобально гиперболические пространственно-временные многообразия в следующем смысле (см. теорему 3.30). Будем говорить, что пространство-время $(M, g)$ удовлетворяет *условию конечности расстояния*, если $d(g)(p, q) < \infty$ для любых $p, q \in M$. Можно показать, что сильно причинное лоренцево многообразие $(M, g)$ глобально гиперболично тогда и только тогда, когда $(M, g')$ удовлетворяет условию конечности расстояния для всех $g' \in C(M, g)$.

На основе определения минимальной кривой в римановой геометрии дадим соответствующее определение для пространственно-временных многообразий.

**Определение.** Направленная в будущее непространственноподобная кривая $\gamma$ из $p$ в $q$ называется *максимальной*, если $L(\gamma) = d(p, q)$.

Можно показать (см. теорему 3.13) в точности так же, как для минимальных кривых в римановых пространствах, что если $\gamma$ является максимальной кривой из $p$ в $q$, то $\gamma$ можно перепараметризовать в непространственноподобный геодезический сегмент. Этот результат можно использовать для построения геодезических в сильно причинных пространственно-временны́х многообразиях как предельных кривых подходящих последовательностей «почти максимальных» непространственноподобных кривых (см. разд. 7.1 и 7.2).

Ввиду свойства (Д) теоремы Хопфа—Ринова для римановых многообразий вполне разумно искать класс пространственно-временны́х многообразий, удовлетворяющих следующему свойству: если $p \leqslant q$, то существует максимальный геодезический сегмент из $p$ в $q$. Используя компактность $J^+(p) \cap J^-(q)$, можно показать, что глобально гиперболические пространства всегда содержат максимальные геодезические, соединяющие две любые причинно связанные точки.

Наконец, мы подошли к рассмотрению того, что можно сказать о лоренцевых аналогах остальных утверждений теоремы Хопфа—Ринова. Здесь, однако, каждая мыслимая ситуация оказывается невозможной. Таким образом, множество трудностей в лоренцевой геометрии (с точки зрения глобальной римановой геометрии) или разнообразие ее ситуаций (с точки зрения теории сингулярностей) проистекает из-за отсутствия достаточно сильного аналога теоремы Хопфа—Ринова.

Приведем теперь основное определение, которое интересно сопоставить со свойством (Б) теоремы Хопфа—Ринова.

**Определение.** Пространство-время $(M, g)$ называется *времениподобно* (соответственно *изотропно*, *пространственноподобно*, *непространственноподобно*) *полным*, если все времениподобные (соответственно изотропные, пространственноподобные, непространственноподобные) геодезические можно определить для любых значений аффинного параметра $t$ $(-\infty < t < +\infty)$.

Таким образом, пространство-время, которое не является непространственноподобно полным, содержит времениподобную или изотропную геодезическую, которую нельзя определить для всех значений аффинного параметра. Такие пространственно-временны́е многообразия в общей теории относительности называют *сингулярными*.

Важно отметить прежде всего, что из наличия глобальной гиперболичности не следует ни одна из этих форм геодезической полноты. В этом можно убедиться следующим образом: зафиксируем в пространстве Минковского две точки $p$ и $q$, связанные отношением $p \ll q$, и рассмотрим $M = I^+(p) \cap I^-(q)$ вместе с лоренцевой метрикой, которую оно получает как открытое подмноже-

ство пространства Минковского. Это пространство-время $M$ является глобально гиперболическим. Однако из того, что геодезические в $M$ — это в точности ограничения геодезических пространства Минковского, вытекает, что каждая геодезическая в $M$ неполна!

Когда-то полагали, что времениподобная полнота может просто повлечь за собой изотропную полноту и т. п. Однако Кундт, Герок и Бим предложили серии примеров глобально гиперболических пространственно-временны́х многообразий, для которых времениподобная геодезическая полнота, изотропная геодезическая полнота и пространственноподобная геодезическая полнота логически не эквивалентны. Таким образом, существуют глобально гиперболические пространства, которые являются пространственноподобно и времениподобно геодезически полными, однако изотропно неполны!

Метрическая и геодезическая полнота ((А) $\Longleftrightarrow$ (Б) в теореме Хопфа—Ринова) для произвольных лоренцевых многообразий никак не связаны. Существуют также лоренцевы метрики, которые времениподобно геодезически полны, но содержат точки $p$ и $q$, $p \ll q$, такие, что нет ни одной времениподобной геодезической, идущей из $p$ в $q$ (см. рис. 5.1).

Но если смотреть на вещи оптимистически, то можно заметить для глобально гиперболических пространственно-временных многообразий существование определенной связи со свойствами (А) и (Г) теоремы Хопфа—Ринова. Вследствие того что $d(p, q) = 0$ при $q \notin J^+(p)$, сходимость произвольных последовательностей в $(M, g)$ относительно лоренцевой функции расстояния не имеет смысла. В то же время времениподобная полнота Коши может быть определена (см. разд. 5.3). Для глобально гиперболических пространств можно показать, что времениподобная полнота Коши и конечная компактность равносильны.

Добавим, что получены некоторые результаты, аналогичные упомянутой выше теореме Номидзу—Одзеки для римановых многообразий. Например, для любого заданного сильно причинного пространства-времени $(M, g)$ существует конформный множитель $\Omega$: $M \to (0, \infty)$, такой, что пространство-время $(M, \Omega g)$ времениподобно и изотропно геодезически полно (см. теорему 5.5). Пока неизвестно, однако, можно ли усилить этот результат, включив сюда и пространственноподобную геодезическую полноту.

Теперь должно быть понятным, что наряду со сходством между лоренцевой и римановой функциями расстояния, особенно для глобально гиперболических пространственно-временны́х многообразий, существуют также и поразительные различия. Однако, несмотря на эти различия, лоренцева функция расстояния имеет много полезных применений, подобных тем, которыми обладает риманова функция расстояния.

В гл. 7 лоренцева функция расстояния используется при построении максимальных непространственноподобных геодезических. Эти максимальные геодезические играют ключевую роль в доказательстве теорем о сингулярностях (см. гл. 11). В гл. 8 лоренцева функция расстояния применяется для определения и изучения лоренцева множества раздела.

В гл. 9 развивается теория Морса об индексе для времениподобных и для изотропных геодезических. Ряд глобальных результатов для лоренцевых многообразий с использованием теории Морса и лоренцевой функции расстояния получен в гл. 10.

Глава 2

# ЛОРЕНЦЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ И ПРИЧИННОСТЬ

В разд. 2.1 и 2.2 дается краткий обзор элементарной теории причинности, являющейся основой не только для этой монографии, но и для общей теории относительности вообще. Далее, в разд. 2.3 исследуется важная связь между топологией предельной кривой и $C^0$-топологией для последовательностей непространственноподобных кривых в сильно причинных пространствах. Именно если $\gamma$: $[a, b] \to M$ — направленная в будущее непространственноподобная кривая, предельная для последовательности $\{\gamma_n\}$ направленных в будущее непространственноподобных кривых, то существует подпоследовательность, сходящаяся к $\gamma$ в $C^0$-топологии. Этот результат полезен при построении максимальных геодезических в сильно причинных пространствах при помощи лоренцевой функции расстояния (см. гл. 7 и гл. 11, разд. 4).

В разд. 2.4 мы изучим причинную структуру двумерных лоренцевых многообразий. В частности, мы покажем, что если пространство-время $(M, g)$ гомеоморфно $\mathbb{R}^2$, то $(M, g)$ устойчиво причинно.

В разд. 2.5 приводится краткое изложение теории лоренцевых подмногообразий и описание основных свойств второй фундаментальной формы. Эти факты необходимы при рассмотрении теории сингулярностей в гл. 11.

Важная теорема расщепления Герока (1970) гарантирует возможность представления глобально гиперболического пространства-времени в виде топологического (хотя и не обязательно метрического) произведения $\mathbb{R} \times S$, где $S$ — поверхность Коши. Этот результат наводит на мысль о целесообразности изучения пространств, представимых в виде $(\mathbb{R} \times M, -dt^2 \oplus g)$, где $(M, g)$ — риманово многообразие. Однако, хотя указанный класс и включает в себя пространство-время Минковского и статическую вселенную Эйнштейна, он не содержит физически важных решений уравнений Эйнштейна — внешнего решения Шварцшильда и решения Робертсона—Уокера.

В разд. 2.6 мы изучим более общий класс пространственно-временных многообразий — так называемые *искривленные произведения*, представляющие собой пространства $M_1 \times_f M_2$ с метри-

ками вида $g_1 \oplus fg_2$. Этот класс метрик, изученный для римановых многообразий Бишопом и О'Нейлом (1969), а для псевдоримановых многообразий О'Нейлом (1981), включает пространства, допускающие представление в виде произведений, пространство-время Шварцшильда, пространство-время Робертсона—Уокера. Нижеследующее утверждение, которое можно рассматривать как «метрическое обращение» теоремы Герока, типично для результатов этого раздела. Пусть лоренцево многообразие представимо в виде произведения $(\mathbb{R} \times M, -dt^2 \oplus g)$, где $(M, g)$ — риманово многообразие. Тогда следующие условия эквивалентны:

(а) $(M, g)$ — полное риманово многообразие.

(б) $(\mathbb{R} \times M, -dt^2 \oplus g)$ глобально гиперболично.

(в) $(\mathbb{R} \times M, -dt^2 \oplus g)$ геодезически полно.

## 2.1. Лоренцевы многообразия и нормальные выпуклые окрестности

Пусть $M$ — гладкое связное паракомпактное хаусдорфово многообразие. Обозначим через $\pi: TM \to M$ касательное расслоение многообразия $M$. *Лоренцевой метрикой* $g$ на многообразии $M$ называется гладкое симметричное тензорное поле типа (0, 2), заданное на $M$ так, что в каждой точке $p \in M$ тензор $g|_p$: $T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ представляет собой невырожденное скалярное произведение с сигнатурой $(-, +, \ldots, +)$. Другими словами, матрица тензора $g$ в точке $p$ должна иметь ровно одно отрицательное собственное значение, а все другие собственные значения должны быть положительны.

*Лоренцевым многообразием* называется пара $(M, g)$, где $M$ — многообразие, а $g$ — лоренцева метрика на нем. Все некомпактные многообразия допускают лоренцевы метрики. В то же время компактное многообразие допускает лоренцеву метрику в том и только том случае, когда его эйлерова характеристика равна нулю (см. Стинрод (1953, с. 250)). Пространство всех лоренцевых метрик на $M$ будем обозначать через $\mathrm{Lor}(M)$.

Ненулевой вектор $v \in TM$ называется *времениподобным* (соответственно *непространственноподобным*, *изотропным*, *пространственноподобным*), если $g(v, v) < 0$ (соответственно $\leqslant 0$, $= 0$, $> 0$). Непрерывное векторное поле $X$ на $TM$ называется *времениподобным*, если $g(X(p), X(p)) < 0$ для всех точек $p \in M$. В общем случае лоренцево многообразие не обязательно имеет времениподобное векторное поле, определенное на всем многообразии. Если же многообразие $(M, g)$ допускает времениподобное векторное поле $X: M \to TM$, то $(M, g)$ называют *ориентируемым во времени посредством поля* $X$. Времениподобное векторное поле $X$ разбивает все непространственноподобные касательные векторы на два непересекающихся класса — класс векторов, *направлен-*

*ных в будущее*, и класс векторов, *направленных в прошлое*. Именно непространственноподобный касательный вектор $v \in T_pM$ называется *направленным в будущее* (соответственно *в прошлое*), если $g(X(p), v) < 0$ (соответственно $g(X(p), v) > 0$). Лоренцево многообразие называется *ориентируемым во времени*, если оно допускает ориентацию во времени посредством некоторого времениподобного поля $X$. В этом случае $(M, g)$ допускает две различные временны́е ориентации, определяемые полями $X$ и $-X$ соответственно.

Ориентированное во времени лоренцево многообразие традиционно называют *пространством-временем*. Более точно

**Определение 2.1.** *Пространством-временем* $(M, g)$ называется связное $C^\infty$-гладкое хаусдорфово многообразие размерности не меньшей двух со счетным базисом, лоренцевой метрикой сигнатуры $(-, +, \ldots, +)$ и временно́й ориентацией.

Покажем, как для произвольного лоренцева многообразия $(M, g)$, не являющегося ориентируемым во времени, можно построить ориентированное во времени двулистное накрывающее лоренцево многообразие $\pi: (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$. Предположим сначала, что $(M, g)$ — произвольное лоренцево многообразие. Зафиксируем базовую точку $p_0 \in M$ и зададим на $T_{p_0}M$ временну́ю ориентацию следующим образом. Прежде всего выберем в $T_{p_0}M$ времениподобный касательный вектор $v_0$. Непространственноподобный вектор $w \in T_{p_0}M$ назовем направленным в будущее (соответственно в прошлое), если $g(v_0, w) < 0$ (соответственно $g(v_0, w) > 0$). Пусть далее, $q$ — произвольная точка из $M$. Кусочно-гладкие кривые $\gamma: [0, 1] \to M$, соединяющие точки $p_0$ и $q$, $\gamma(0) = p_0$, $\gamma(1) = q$, можно разбить на два класса эквивалентности по следующему правилу. Пусть $\gamma_1, \gamma_2: [0, 1] \to M$ — кусочно-гладкие кривые, подчиненные условиям $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p_0$ и $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = q$. Обозначим через $V_1$ (соответственно через $V_2$) единственное векторное поле (см. добавление $A$), параллельное вдоль $\gamma_1$ (соответственно $\gamma_2$) и такое, что $V_1(0) = V_2(0) = v_0$. Будем говорить, что кривые $\gamma_1$ и $\gamma_2$ эквивалентны, если $g(V_1(1), V_2(1)) < 0$. Если кривые $\gamma_1$ и $\gamma_2$ соединяют точки $p_0$ и $q$ и гомотопны, то они эквивалентны. Обратное не верно: эквивалентные кривые не обязательно являются гомотопными. Класс кривых, эквивалентных данной кривой $\gamma: [0, 1] \to M$, $\gamma(0) = p_0$, будем обозначать через $[\gamma]$. Рассмотрим множество $\tilde{M}$ всевозможных классов эквивалентности для кусочно-гладких кривых $\gamma: [0, 1] \to M$, $\gamma(0) = p_0$, и определим отображение $\pi: \tilde{M} \to M$ при помощи соотношения $\pi([\gamma]) = \gamma(1)$. Если $(M, g)$ ориентируемо во времени, то $\tilde{M} = M$. В противном случае $\pi: \tilde{M} \to M$ представляет собой двулистное накрытие (см. Маркус (1955, с. 412)).

Допустим, теперь, что лоренцево многообразие $(M, g)$ *не* является ориентируемым во времени. На множестве $\tilde{M}$ стандартным образом (используя методы теории накрывающих пространств) вводится топология и задается дифференцируемая структура так, что $\pi: \tilde{M} \to M$ становится двулистным накрывающим многообразием. Лоренцеву метрику $\tilde{g}$ на $\tilde{M}$ определим посредством формулы $\tilde{g} = \pi^* g$, т. е. $\tilde{g}(v, w) = g(\pi_* v, \pi_* w)$. Тогда отображение $\pi: (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$ является локальной изометрией.

Для того чтобы показать, что многообразие $(\tilde{M}, \tilde{g})$ допускает временну́ю ориентацию, полезно доказать предварительно вспомогательную лемму. Зафиксируем на $\tilde{M}$ базовую точку $\tilde{p}_0 \in \pi^{-1}(p_0)$. Пусть $\tilde{v}_0 \in T_{\tilde{p}_0}\tilde{M}$ — единственный времениподобный касательный вектор, удовлетворяющий условию $\pi_* \tilde{v}_0 = v_0$.

**Лемма 2.2.** *Пусть* $\tilde{q} \in \tilde{M}$ — *произвольная точка и* $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2: [0, 1] \to \tilde{M}$ — *две кусочно-гладкие кривые, соединяющие* $\tilde{p}_0$ *и* $\tilde{q}$: $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0) = \tilde{p}_0$ *и* $\tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{\gamma}_2(1) = \tilde{q}$. *Если* $\tilde{V}_1$ *и* $\tilde{V}_2$ — *векторные поля, параллельные вдоль* $\tilde{\gamma}_1$ *и* $\tilde{\gamma}_2$ *соответственно и удовлетворяющие условию* $\tilde{V}_1(0) = \tilde{V}_2(0) = \tilde{v}_0$, *то* $\tilde{g}(\tilde{V}_1(1), \tilde{V}_2(1)) < 0$.

*Доказательство.* Положим $\gamma_1 = \pi \circ \tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2 = \pi \circ \tilde{\gamma}_2$. В силу того что $\pi: (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$ — локальная изометрия, векторные поля $V_1 = \pi_*(\tilde{V}_1)$ и $V_2 = \pi_*(\tilde{V}_2)$ параллельны соответственно вдоль $\gamma_1$ и $\gamma_2$, причем $V_1(0) = V_2(0) = \pi_* \tilde{v}_0 = v_0$. Кроме того, $g(V_1(1), V_2(1)) = g(\pi_* \tilde{V}_1(1), \pi_* \tilde{V}_2(1)) = \tilde{g}(\tilde{V}_1(1), \tilde{V}_2(1))$.

Предположим теперь, что неравенство $\tilde{g}(\tilde{V}_1(1), \tilde{V}_2(1)) < 0$ неверно. Из того что $\tilde{V}_1(1)$ и $\tilde{V}_2(1)$ — времениподобные касательные векторы, вытекает неравенство $\tilde{g}(\tilde{V}_1(1), \tilde{V}_2(1)) > 0$. Тем самым $g(V_1(1), V_2(1)) > 0$ в точке $q = \pi(\tilde{q})$. По определению отношения эквивалентности, заданного на множестве кусочно-гладких кривых, соединяющих точки $p_0$ и $q$, имеем $[\gamma_1] \neq [\gamma_2]$. С другой стороны, из построения $\tilde{M}$ известно, что $\tilde{\gamma}_1(1) = [\gamma_1]$ и $\tilde{\gamma}_2(1) = [\gamma_2]$. Таким образом, $\tilde{\gamma}_1(1) \neq \tilde{\gamma}_2(1)$, что противоречит условию. $\square$

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы доказать следующее утверждение.

**Теорема 2.3.** *Пусть* $(M, g)$ *неориентируемо во времени. Тогда построенное выше двулистное накрывающее лоренцево многообразие*

$(\tilde{M}, \tilde{g})$ *ориентируемо во времени, и, следовательно, является пространством-временем.*

*Доказательство.* Пусть $\tilde{p}_0$ и $\tilde{v}_0$ определены, как и выше. Рассмотрим гладкую кривую $\sigma$: $[0, 1] \to \tilde{M}$, соединяющую точки $\tilde{p}_0$ и $\tilde{q}$; точка $\tilde{q} \in \tilde{M}$ произвольна. Обозначим через $\tilde{V}$ единственное векторное поле, параллельное вдоль $\sigma$ и такое, что $\tilde{V}(0) = \tilde{v}_0$. Рассмотрим множество $F^+(\tilde{q}) = \{$времениподобный $w \in T_{\tilde{q}}\tilde{M}$: $\tilde{g}(\tilde{V}(1), w) < 0\}$. Определение множества $F^+(\tilde{q})$ в силу леммы 2.2 не зависит от выбора кривой $\sigma$. Следовательно, отображение $\tilde{q} \to F^+(\tilde{q})$ корректно определяет конус будущего в каждом касательном пространстве $T_{\tilde{q}}\tilde{M}$, $\tilde{q} \in \tilde{M}$.

Пусть h — вспомогательная, положительно определенная риманова метрика на $\tilde{M}$. Непрерывное, нигде не равное нулю времениподобное векторное поле $X$ на $\tilde{M}$ можно определить путем выбора в каждом $F^+(\tilde{q})$ единственного единичного в метрике h вектора $X(\tilde{q})$, имеющего отрицательное собственное значение метрики $\tilde{g}$ по отношению к метрике h, т. е. можно указать непрерывную функцию $\lambda$: $\tilde{M} \to (-\infty, 0)$ и непрерывное времениподобное поле $X$ на $\tilde{M}$, удовлетворяющие условиям $X(\tilde{q}) \in F^+(\tilde{q})$, $h(X(\tilde{q}), X(\tilde{q})) = 1$, $\tilde{g}(X(\tilde{q}), v) = \lambda(\tilde{q})\, h(X(\tilde{q}), v)$ для всех $v \in T_{\tilde{q}}\tilde{M}$ и $\tilde{q} \in \tilde{M}$. □

В доказательстве теоремы 2.3 неявно содержится другое определение того, что лоренцево многообразие $(M, g)$ допускает временну́ю ориентацию. Именно $(M, g)$ ориентируемо во времени, если для произвольной фиксированной базовой точки $p_0 \in M$ и времениподобного касательного вектора $v_0 \in T_{p_0}M$ следующее условие выполняется для всех $q \in M$. Пусть $\gamma_1, \gamma_2$: $[0, 1] \to M$ — две произвольные гладкие кривые, соединяющие $p_0$ и $q$. Если $V_i$ параллельны вдоль $\gamma_i$, причем $V_i(0) = v_0$, $i = 1, 2$, то $g(V_1(1), V_2(1)) < 0$. Это условие означает, что параллельный перенос конуса будущего, определяемого вектором $v_0$ в точке $p_0$, в любую другую точку $q \in M$ не зависит от выбора пути, идущего из $p_0$ в $q$. Следовательно, параллельным переносом из точки $p_0$ можно подходящим образом выбрать времениподобные векторы будущего для каждого касательного пространства.

Лоренцево многообразие $(M, g)$ обладает однозначно определенной аффинной связностью $\nabla$ без кручения, совместимой с метрикой $g$. Это означает, что

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

и

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

для любых гладких векторных полей $X$, $Y$, $Z$ на $M$. Эта связность $\nabla$ может быть определена для лоренцевых многообразий таким же способом, как для римановых многообразий определяется связность Леви—Чивита. Описание связности $\nabla$, *тензора кривизны* $R$, *кривизны Риччи* Ric и *скалярной кривизны* $\tau$ метрики $g$ дано в добавлении А. Туда же включено их представление в локальных координатах.

Гладкая кривая на многообразии $(M, g)$ называется *времениподобной* (соответственно *непространственноподобной*, *изотропной пространственноподобной*), если в каждой точке этой кривой ее касательный вектор является времениподобным (соответственно непространственноподобным, изотропным, пространственноподобным). Как и в римановом случае, *геодезической* называется гладкая кривая $c: (a, b) \to M$, касательный вектор которой переносится вдоль этой кривой параллельно, т. е. $\nabla_{c'(t)} c'(t) = 0$ для любого $t \in (a, b)$. Касательное векторное поле $c'(t)$ геодезической $c$ в силу соотношения

$$\frac{d}{dt}(g(c'(t), c'(t))) = 2g(\nabla_{c'(t)} c'(t), c'(t)) = 0$$

удовлетворяет условию $g(c'(t), c'(t)) = \text{const}$ для всех $t \in (a, b)$. Следовательно, если геодезическая времениподобна (соответственно изотропна, пространственноподобна) для некоторого значения своего параметра $t$, то она является времениподобной (соответственно изотропной, пространственноподобной) для всех значений параметра $t$.

*Аффинным параметром* $t$ для геодезической $c$ называется любой параметр для $c$, такой, что равенство $\nabla_{c'} c'(t) = 0$ выполняется для всех его значений. Для времениподобных и пространственноподобных геодезических аффинный параметр соответствует такой параметризации геодезической, относительно которой геодезическая имеет постоянную скорость. Для изотропных геодезических аффинные параметризации имеют теснейшую аналогию с естественной параметризацией неизотропных геодезических длиной дуги.

*Экспоненциальное отображение* $\exp_p: T_pM \to M$ определяется для лоренцевых многообразий в точности так же, как и для римановых многообразий. Пусть $v \in T_pM$. Обозначим через $c_v(t)$ однозначно определенную геодезическую на $M$, у которой $c_v(0) = p$, $c_v'(0) = v$. Тогда экспоненциальное отображение $\exp_p(v)$ вектора $v$ задается формулой $\exp_p(v) = c_v(1)$ (при условии что $c_v(1)$ определена).

Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — произвольный базис $T_pM$. Для достаточно малых $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ отображение

$$x_1v_1 + \ldots + x_nv_n \to \exp_p(x_1v_1 + \ldots + x_nv_n)$$

является диффеоморфизмом окрестности начальной точки из $T_pM$ на окрестность $U(p)$ точки $p$ из $M$. Так, введенные координаты $(x_1, \ldots, x_n)$ точки $\exp_p(x_1v_1 + \ldots + x_nv_n)$ в $U(p)$ определяют координатную карту на $M$ и называются *нормальными координатами* в окрестности $U(p)$ базовой точки $p$. Множество $U(p)$ называют (простой) *выпуклой окрестностью* точки $p$, если любые две точки из $U(p)$ можно соединить единственным геодезическим сегментом в $(M, g)$, целиком лежащим в $U(p)$. Уайтхед (1932) показал, что у каждой точки произвольного псевдориманова (значит, и лоренцева) многообразия существует выпуклая окрестность (см. Хикс (1965, с. 133—136)). На самом деле можно даже считать, что для каждой точки $q \in U(p)$ существует нормальная координатная карта с базой $q$, содержащая $U(p)$. Назовем такую окрестность $U(p)$ *выпуклой нормальной окрестностью* (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 44)).

Доказательство следующего предложения, существенно используемого для изучения локального поведения причинности, приведено в книге Хокинга и Эллиса (1977, с. 117—119).

**Предложение 2.4.** *Пусть $U$ — выпуклая нормальная окрестность точки $q$. Тогда те точки из $U$, которых можно достичь из $q$ по времениподобным (соответственно непространственноподобным) кривым, содержащимся в $U$, можно представить в виде* $\exp_q(v)$, $v \in T_qM$, *где* $g(v, v) < 0$ (*соответственно* $g(v, v) \leqslant 0$).

## 2.2 Теория причинности пространства-времени

В пространстве-времени $(M, g)$ (нигде не вырождающееся) непространственноподобное векторное поле вдоль кривой не может путем непрерывного изменения перейти из поля, направленного в будущее, в поле, направленное в прошлое. Это вытекает из того, что гладкая времениподобная, изотропная или непространственноподобная кривая в $(M, g)$ либо всегда направлена в будущее, либо всегда направлена в прошлое.

Мы будем пользоваться следующими общепринятыми обозначениями: $p \ll q$, если существует гладкая направленная в будущее времениподобная кривая, идущая из точки $p$ в точку $q$, и $p \leqslant q$, если либо $p = q$, либо существует гладкая направленная в будущее непространственноподобная кривая, идущая из $p$ в $q$.

*Непрерывная* кривая $\gamma: (a, b) \to M$ называется направленной в будущее непространственноподобной кривой, если для любого $t_0 \in (a, b)$ существуют $\varepsilon > 0$ и выпуклая нормальная окрестность $U(\gamma(t_0))$ точки $\gamma(t_0)$, такие, что $\gamma(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset U(\gamma(t_0))$ и

для любых $t_1$ и $t_2$, удовлетворяющих условию $t_0 - \varepsilon < t_1 < t_2 < t_0 + \varepsilon$, найдется гладкая направленная в будущее непространственноподобная кривая в $(U(\gamma(t_0)), \ g \mid U(\gamma(t_0)))$, идущая из $\gamma(t_1)$ в $\gamma(t_2)$. Выпуклую нормальную окрестность $U(\gamma(t_0))$ в этом определении необходимо взять по следующей причине. Существуют пространства, у которых $p \ll q$ для всех $(p, q) \in M \times M$. Однако в этих пространствах любая непрерывная кривая $\gamma$ удовлетворяет одновременно и условию $\gamma(t_1) \ll \gamma(t_2)$, и условию $\gamma(t_2) \ll \gamma(t_1)$ для всех $t_1$, $t_2$ из области задания $\gamma$.

*Хронологическим будущим* $I^+(p)$ точки $p$ называется множество $I^+(p) = \{q \in M: p \ll q\}$, а *хронологическим прошлым — множество* $I^-(p) = \{q \in M: q \ll p\}$. *Причинное будущее* точки $p$ — это $J^+(p) = \{q \in M: p \leqslant q\}$, *а причинное прошлое* $J^-(p) = \{q \in M: q \leqslant p\}$.

Ясно, что отношения $\ll$ и $\leqslant$ транзитивны. Более того, из соотношений $p \ll q$ и $q \leqslant r$ вытекает, что $p \ll r$, а из $p \leqslant q$ и $q \ll r$ что $p \ll r$ (см. Пенроуз (1972, с. 14)). Если существует направленная в будущее времениподобная кривая, идущая из $p$ в $q$, то существует и окрестность $U$ точки $q$, такая, что любой точки из $U$ можно достичь направленной в будущее времениподобной кривой. Отсюда вытекает справедливость следующего утверждения.

**Лемма 2.5.** *Пусть $p$ — произвольная точка пространства-времени $(M, g)$. Тогда множества $I^+(p)$ и $I^-(p)$ открыты в $M$.*

В гл. 1 был приведен пример (рис. 1.1), показывающий, что в общем случае множества $J^+(p)$, $J^-(p)$ ни открыты, ни замкнуты.

Может оказаться так, что $p \in I^+(p)$. В этом случае существует замкнутая времениподобная кривая, проходящая через $p$, и пространство-время называют имеющим нарушение причинности. Например, на цилиндре $M = S^1 \times \mathbb{R}$ с лоренцевой метрикой $ds^2 = -d\theta^2 + dt^2$ окружности $t = \text{const}$ являются замкнутыми времениподобными кривыми. В этом пространстве-времени $I^+(p) = M$ для всех $p \in M$. Именно из-за проблем, тесно связанных с примерами нарушения причинности, в последние годы в общей теории относительности было дано большое число различных формулировок условий причинности.

Пространство-время, которое не содержит ни одной замкнутой времениподобной кривой (т. е. $p \notin I^+(p)$ для всех $p \in M$) называют *хронологическим*. Пространство-время с незамкнутыми непространственноподобными кривыми называется *причинным*. Этому эквивалентно следующее свойство: причинное пространство-время не содержит ни одной пары различных точек $p$ и $q$, связанных соотношением $p \leqslant q \leqslant p$. Цилиндр $M = S^1 \times \mathbb{R}$ с лоренцевой метрикой $ds^2 = d\theta\, dt$ представляет собой пример хронологического пространства-времени, которое не является причинным. Единственные замкнутые непространственноподобные кривые

в этом примере — это окружности $t = \mathrm{const}$, которые подходящей параметризацией можно превратить в изотропные геодезические.

Условие хронологичности является слабейшим из условий причинности, которые будут введены. Следующее ниже предложение гарантирует, что никакое компактное пространство-время не может быть ни причинным, ни хронологическим.

**Предложение 2.6.** *Любое компактное пространство-время* $(M, g)$ *содержит замкнутую времениподобную кривую и поэтому не может быть хронологическим.*

*Доказательство.* Вследствие того что множества вида $I^+(p)$ открыты, нетрудно заметить, что семейство $\{I^+(p): p \in M\}$ образует открытое покрытие $M$. В силу компактности $M$ из него можно выбрать конечное подпокрытие $\{I^+(p_1), \ldots, I^+(p_k)\}$. Пусть теперь $p_1 \in I^+(p_{i(1)})$ для некоторого $i(1)$, $1 \leqslant i(1) \leqslant k$. Подобным же образом $p_{i(1)} \in I^+(p_{i(2)})$ для некоторого $i(2)$, $1 \leqslant i(2) \leqslant k$. Рассуждая аналогично, получим бесконечную последовательность $\ldots p_{i(3)} \ll p_{i(2)} \ll p_{i(1)} \ll p_1$. Ввиду того что $1 \leqslant i(m) \leqslant k$, существует лишь конечное число различных индексов $i(m)$. Тем самым в полученном списке есть повторения. Из транзитивности отношения $\ll$ вытекает, что $p_{i(n)} \in I^+(p_{i(n)})$ для некоторого индекса $i(n)$. Таким образом, $(M, g)$ содержит замкнутую времениподобную кривую, проходящую через точку $p_{i(n)}$. □

Недавно Типлер доказал, что некоторые классы компактных пространств содержат замкнутые времениподобные *геодезические*, но не содержат других замкнутых времениподобных кривых. Ввиду того что в доказательстве этого факта существенно используется лоренцева функция расстояния, рассмотрение результата Типлера откладывается до разд. 3.1 (теорема 3.15).

Пространство-время называется *различающим*, если для любых точек $p, q \in M$ либо из равенства $I^+(p) = I^+(q)$, либо из равенства $I^-(p) = I^-(q)$ следует, что $p = q$. В различающем пространстве-времени разные точки различаются и своим хронологическим будущим, и своим хронологическим прошлым. Поэтому точки можно выделять и по хронологическому будущему, и по хронологическому прошлому.

Различающее пространство-время называется *причинно непрерывным*, если множествозначные функции $I^+$ и $I^-$ внешне непрерывны (см. Хокинг и Сакс (1974, с. 291)). Ввиду того что $I^+$ и $I^-$ всегда внутренне непрерывны, причинно непрерывными пространствами являются такие различающие пространства, для которых и хронологическое будущее, и хронологическое прошлое точки непрерывно изменяются вместе с точкой. Множествозначная функция $I^+$ называется здесь *внутренне непрерывной* в точке $p \in M$, если для каждого компактного множества $K \in I^+(p)$ существует окрестность $U(p)$ точки $p$, такая, что $K \subset I^+(q)$ для

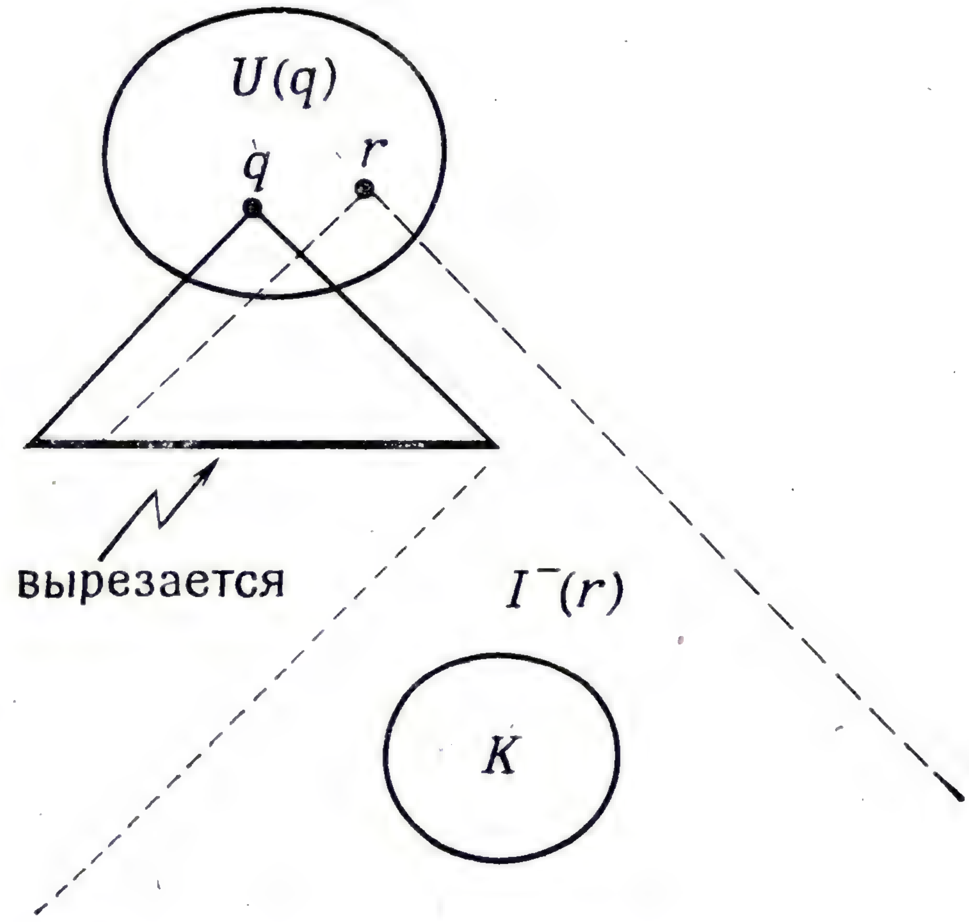



Рис. 2.1. Пространство-время, которое *не* является причинно непрерывным. Отображение $p \to I^-(p)$ не может быть внешне непрерывным в точке $q$. Компактное множество $K$ содержится в $M \setminus \overline{I^-(q)}$, однако каждая окрестность $U(q)$ точки $q$ вмещает некоторую точку $r$, такую, что $K$ не содержится в $M \setminus \overline{I^-(r)}$.

всех $q \in U(p)$. Множествозначная функция $I^+$ называется *внешне непрерывной* в точке $p \in M$, если для каждого компактного множества $K \subset M \setminus \overline{I^+(p)}$ существует окрестность $U(p)$ точки $p$, такая, что $K \subset M \setminus \overline{I^+(q)}$ для всех $q \in U(p)$. Внутреннюю и внешнюю непрерывность для $I^-$ можно определить аналогично. На рис. 2.1 приведен пример пространства-времени, для которого множествозначная функция $I^-$ не является внешне непрерывной. Понятие причинной непрерывности было введено Хокингом и Саксом (1974). Для этих пространств причинная структура может быть продолжена до причинной границы (см. Бьюдик и Сакс (1974)). Более того, на причинном пополнении причинно непрерывного пространства-времени может быть определена метризуемая топология (см. Бим (1977)).

Открытое множество $U$ в пространстве-времени $(M, g)$ называется *причинно выпуклым*, если никакая непространственноподобная кривая не пересекает $U$ по несвязному множеству. Пространство-время $(M, g)$ называют *сильно причинным в данной точке* $p \in M$, если у $p$ есть сколь угодно малые причинно выпуклые окрестности. Таким образом, точка $p$ обладает такими произвольно малыми окрестностями, для которых никакая непространственноподобная кривая, покидающая одну из этих окрестностей, никогда в нее не возвращается. Пространство-время $(M, g)$ называется *сильно причинным*, если оно сильно причинно в каждой точке. Можно показать, что множество точек произвольного пространства-времени $(M, g)$, в которых $(M, g)$ сильно причинно, является открытым подмножеством $M$ (см. Пенроуз (1972, с. 30)). Нетрудно показать, что сильно причинные пространства являются различающими.

Сильно причинные пространства можно охарактеризовать в терминах топологии Александрова для многообразия $M$. *Топология Александрова* на произвольном пространстве-времени $(M, g)$ — это топология, которая задается на $M$ путем выбора в качестве базиса топологии совокупности всех множеств вида $I^+(p) \cap \cap I^-(q)$, где $p, q \in M$ (ср. с рис. 1.2). Исходная топология многообразия $M$ является по меньшей мере столь же тонкой, как и топология Александрова, ввиду того, что в заданной топологии множество $I^+(p) \cap I^-(q)$ по лемме 2.5 всегда открыто. Между исходной топологией многообразия и топологией Александрова имеется следующая связь (см. Пенроуз (1972, с. 34)).

**Предложение 2.7.** *Топология Александрова для многообразия* $(M, g)$ *совпадает с исходной топологией многообразия в том и только том случае, когда* $(M, g)$ *сильно причинно.*

*Доказательство.* Допустим сначала, что $(M, g)$ сильно причинно. Тогда у каждой точки $p \in M$ найдется выпуклая нормальная окрестность $U(p)$, такая, что никакая непространственноподобная кривая не пересекает $U(p)$ более одного раза. Множество $U(p)$ является выпуклой нормальной окрестностью каждой своей точки, и вследствие предложения 2.4 хронологическое будущее (соответственно прошлое) любой точки $q \in U(p)$ состоит в $(U(p), g \mid U(p))$ из всех точек, которых можно достичь в $U$ геодезическими сегментами вида $\exp_q(tv)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, где $v$ — направленный в будущее (соответственно в прошлое) времениподобный вектор в точке $q$. Это приводит к тому, что топология Александрова на $(U(p), g \mid U(p))$ совпадает с исходной топологией многообразия на $U(p)$. Используя тот факт, что никакая непространственноподобная кривая на $(M, g)$ не пересекает $U(p)$ более одного раза, получаем, что топология Александрова совпадает с исходной топологией многообразия.

Предположим теперь, что сильная причинность нарушается в точке $p \in M$. Тогда существует выпуклая нормальная окрестность $V(p)$ точки $p$, такая, что если $W(p)$ — произвольная окрестность точки $p$, подчиненная условию $W(p) \subset V(p)$, то для нее найдется непространственноподобная кривая, которая начинается в $W(p)$, покидает $V(p)$ и затем возвращается в $W(p)$. Отсюда вытекает, что все окрестности точки $p$ в топологии Александрова содержат точки, лежащие вне $V(p)$. Таким образом, топология Александрова отличается от исходной топологии многообразия. □

Для изучения нарушений причинности и геодезической неполноты в общей теории относительности полезно сформулировать понятие *непродолжаемости* для непространственноподобных кривых. Это можно сделать следующим образом. Пусть $\gamma$: $[a, b) \rightarrow$

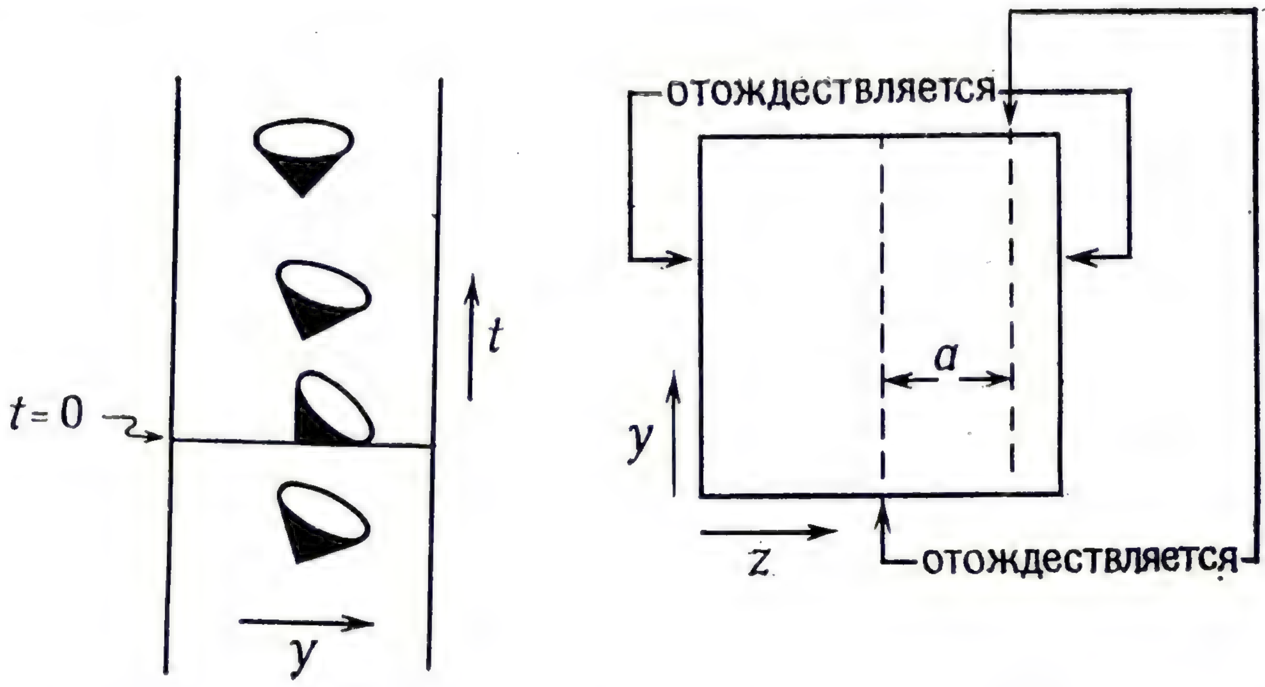



Рис. 2.2. Причинное пространство-время $(M, g)$, которое имеет непродолжаемые захваченные непространственноподобные кривые. Пусть $a$ — иррациональное число, а $M = \mathbb{R} \times S^1 \times S^1 = \{(t, y, z) \in \mathbb{R}^3$: $(t, y, z) \sim (t, y, z+1)$ и $(t, y, z) \sim (t, y+1, z+a)\}$. Лоренцева метрика задается следующим образом: $ds^2 = (\operatorname{ch} t - 1)^2 (dy^2 - dt^2) - dt\,dy + dz^2$.

$\to M$ — кривая на многообразии $M$. Точка $p \in M$ называется *концевой точкой* кривой $\gamma$, соответствующей значению параметра $t = b$, если

$$\lim_{t \to b^-} \gamma(t) = p.$$

Если $\gamma$: $[a, b) \to M$ — направленная в будущее (соответственно в прошлое) непространственноподобная кривая с концевой точкой $p$, соответствующей $t = b$, то $p$ называется *концевой точкой в будущем* (соответственно в *прошлом*) кривой $\gamma$. Непространственноподобная кривая называется *непродолжаемой в будущее* (соответственно *в прошлое*), если у нее нет концевой точки в будущем (соответственно в прошлом).

**Соглашение 2.8.** Непространственноподобная кривая $\gamma$: $(a, b) \to M$ называется *непродолжаемой*, если она непродолжаема ни в прошлое, ни в будущее.

Существуют причинные пространства, которые содержат непродолжаемые непространственноподобные кривые, имеющие компактное замыкание. На рис. 2.2 приведен пример такого пространства-времени, построенный Картером (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 217)). Непродолжаемая непространственноподобная кривая, которая имеет компактное замыкание и, следовательно, содержится в компактном множестве, называется *захваченной* этим множеством. Тем самым пример Картера показывает, что в причинных пространствах может встречаться явление захвата.

Пусть $\gamma$: $[a, b) \to M$ — направленная в будущее непространственноподобная кривая. Будем говорить, что кривая *захвачена в будущем* компактным множеством $K$, если существует $t_0 < b$ и

такое, что $\gamma(t) \in K$ для всех $t_0 < t < b$. Кривая $\gamma$ называется *частично захваченной в будущем* компактным множеством $K$, если существует бесконечная последовательность $t_n \uparrow b$ и такая, что $\gamma(t_n) \in K$ для любого $n$.

Если многообразие $(M, g)$ сильно причинно, а $K$ — компактное подмножество $M$, то $K$ можно покрыть конечным числом выпуклых нормальных окрестностей $\{U_i\}$, таких, что никакая непространственноподобная кривая, покидающая некоторое $U_i$, никогда в него не возвращается. Из этого вытекает следующее утверждение.

**Предложение 2.9.** *Если $(M, g)$ сильно причинно, то никакая непродолжаемая непространственноподобная кривая не может быть частично захваченной в будущем (или в прошлом) никаким компактным множеством.*

Рассмотрим теперь другой важный в общей теории относительности класс пространств — устойчиво причинные пространства. Для этого, равно как и для дальнейшего использования, полезно определить тонкую $C^r$-топологию на $\mathrm{Lor}(M)$.

Напомним, что через $\mathrm{Lor}(M)$ обозначено пространство всех лоренцевых метрик на $M$. *Тонкие $C^r$-топологии* на $\mathrm{Lor}(M)$ можно определить при помощи фиксированного счетного покрытия $\mathscr{B} = \{B_i\}$ многообразия $M$ координатными окрестностями со следующим свойством: каждое компактное подмножество $M$ пересекается лишь с конечным числом множеств $B_i$. Такое координатное покрытие называется локально конечным. Пусть $\delta: M \to (0, \infty)$ — непрерывная функция. Метрики $g_1$, $g_2 \in \mathrm{Lor}(M)$ называются $\delta$-близкими в $C^r$-топологии (обозначение: $|g_1 - g_2|_r < \delta$), если для каждой точки $p \in M$ все соответствующие компоненты метрических тензоров $g_1$ и $g_2$ и их производные до порядка $r$ включительно $\delta(p)$-близки в точке $p$ (вычисления проводятся в фиксированных координатах содержащих точку $p$ окрестностей $B_i \in \mathscr{B}$). Множества $\{g_1 \in \mathrm{Lor}(M): |g_1 - g_2|_r < \delta\}$, где метрика $g_2 \in \mathrm{Lor}(M)$ и $\delta: M \to (0, \infty)$ — непрерывная функция, произвольны, образуют базис тонкой $C^r$-топологии на $\mathrm{Lor}(M)$. Можно показать, что эта топология не зависит от выбора координатного покрытия $\mathscr{B}$.

$C^r$-топологиям для $r = 0, 1, 2$ можно дать следующую интерпретацию.

**Замечание 2.10.** (а) Лоренцевы метрики на $M$, которые близки в тонкой $C^0$-топологии, имеют близкие световые конусы. (б) Лоренцевы метрики на $M$, которые близки в тонкой $C^1$-топологии, имеют близкие системы геодезических (см. разд. 6.2). (в) Лоренцевы метрики на $M$, которые близки в тонкой $C^2$-топологии, имеют близкие тензоры кривизны.

Пространство-время $(M, g)$ называется *устойчиво причинным*, если существует тонкая $C^0$-окрестность $U(g)$ метрики $g$ в $\mathrm{Lor}(M)$, такая, что каждая метрика $g' \in U(g)$ является причинной. Таким образом, устойчиво причинное пространство-время остается причинным при малых $C^0$-возмущениях.

Устойчиво причинные пространства можно охарактеризовать в терминах частичной упорядоченности $\prec$ на $\mathrm{Lor}(M)$, если для сравнения лоренцевых метрик использовать световые конусы. Именно пусть $A$ — подмножество $M$, тогда $g_1 \leqslant_A g_2$, если для всякой точки $p \in A$ и ненулевого вектора $v \in T_pM$ из неравенства $g_1(v, v) \leqslant 0$ следует, что $g_2(v, v) \leqslant 0$. Аналогичным образом: $g_1 \prec_A g_2$, если для каждой точки $p \in A$ и ненулевого вектора $v \in T_pM$ из неравенства $g_1(v, v) \leqslant 0$ следует, что $g_2(v, v) < 0$. Вместо $g_1 \prec_M g_2$ (соответственно $g_1 \leqslant_M g_2$) будем писать: $g_1 \prec g_2$ (соответственно: $g_1 \leqslant g_2$). Таким образом, отношение $g_1 \prec g_2$ означает, что в каждой точке из $M$ световой конус метрики $g_1$ меньше светового конуса метрики $g_2$. Можно показать, что $(M, g)$ устойчиво причинно в том и только том случае, когда существует причинная метрика $g_1 \in \mathrm{Lor}(M)$, для которой $g \prec g_1$.

Непрерывная функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется *глобальной функцией времени*, если $f$ строго возрастает вдоль каждой направленной в будущее непространственноподобной кривой. Пространство-время $(M, g)$ допускает глобальную функцию времени тогда и только тогда, когда оно устойчиво причинно (см. Хокинг (1968), Зейферт (1977)). Однако в общем случае для устойчиво причинного пространства-времени нет способов естественного выбора функции времени.

Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, градиент $\nabla f$ которой всегда времениподобен. Если $\gamma\colon (a, b) \to M$ —направленная в будущее непространственноподобная кривая, касательный вектор $\gamma'(t)$ которой нигде не обращается в нуль, то величина $g(\nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)) = \gamma'(t)(f)$ должна быть либо всегда положительной, либо всегда отрицательной. Поэтому $f$ должна быть или строго возрастающей вдоль $\gamma$, или строго убывающей. Отсюда следует, что $f$ должна быть строго возрастающей или строго убывающей вдоль всех направленных в будущее непространственноподобных кривых. Значит, $f$ либо $-f$ является гладкой глобальной функцией времени на $M$. Более того, градиент $\nabla f$ должен быть ортогонален ко всякой поверхности уровня функции $f$: $f^{-1}(c) = \{p \in M\colon f(p) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$. Эти поверхности уровня представляют собой пространственноподобные гиперповерхности, ортогональные времениподобному векторному полю (то, что поверхности уровня *пространственноподобны*, означает, что ограничение $g$ на каждую из них является положительно определенной метрикой). В силу того что градиент функции $f$ невырождается и является точной 1-формой, поверхности уровня $\{f^{-1}(c)\colon c \in \mathbb{R}\}$ расслаивают мно-

гообразие $M$. Каждая непространственноподобная кривая $\gamma$ на $M$ может пересечь данную поверхность уровня самое большое один раз вследствие того, что $f$ должна быть либо строго возрастающей вдоль $\gamma$, либо строго убывающей.

Одним из наиболее важных условий причинности, которое мы будем рассматривать в этом разделе, является глобальная гиперболичность. Глобально гиперболические пространства обладают следующим важным свойством: каждую пару причинно связанных точек можно соединить непространственноподобным геодезическим сегментом максимальной длины.

**Определение 2.11.** Сильно причинное пространство-время $(M, g)$ называется *глобально гиперболическим*, если для каждой пары точек $p, q \in M$ множество $J^+(p) \cap J^-(q)$ компактно.

Различающее пространство-время $(M, g)$ называется *причинно простым*, если $J^+(p)$ и $J^-(q)$ — замкнутые подмножества $M$ для всех $p, q \in M$.

Справедливо следующее утверждение.

**Предложение 2.12.** *Глобально гиперболическое пространство-время причинно просто.*

*Доказательство.* Пусть $q \in \overline{J^+(p)} \setminus J^+(p)$ для некоторой точки $p \in M$. Выберем в $I^+(q)$ произвольную точку $r$. Вследствие того что $I^-(r)$ открыто и $q \in \overline{J^+(p)}$, легко убедиться в том, что $r \in I^+(p)$. Для этого достаточно взять последовательность $\{q_n\} \subset J^+(p)$, сходящуюся к $q$, и воспользоваться тем, что из соотношений $p \leqslant q_n$, $q_n \ll r$ вытекает $p \ll r$. Следовательно, $q \in \overline{J^+(p) \cap J^-(r)} \setminus (J^+(p) \cap J^-(r))$. Но это невозможно в силу того, что множество $J^+(p) \cap J^-(r)$ компактно и, значит, замкнуто. $\square$

Глобально гиперболические пространства можно охарактеризовать при помощи поверхностей Коши. *Поверхность Коши* $S$ — это такое подмножество $M$, которое каждая непродолжаемая непространственноподобная кривая пересекает ровно в одной точке. Можно показать, что пространство-время глобально гиперболично тогда и только тогда, когда оно допускает поверхность Коши (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 232—235)). Более того, Герок (1970) установил для глобально гиперболических пространств следующую важную структурную теорему (см. Сакс и Ву (1977б, с. 1155)).

**Теорема 2.13.** *Глобально гиперболическое пространство-время $(M, g)$ размерности $n$ гомеоморфно $\mathbb{R} \times S$, где $S$ есть $(n-1)$-мерное топологическое подмногообразие $M$ и для каждого $t$ $\{t\} \times S$ — поверхность Коши.*

В доказательстве этой теоремы используется функция $f\colon M \to \mathbb{R}$, задаваемая по правилу $f(p) = m(J^+(p))/m(J^-(p))$, где $m$ — мера на $M$, $m(M) = 1$. Можно убедиться в том, что множества уровня функции $f$ являются поверхностями Коши, как и требуется, однако функция $f$ необязательно гладкая.

Функцию времени $f\colon M \to \mathbb{R}$ будем называть *функцией времени Коши*, если каждое множество уровня $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, является поверхностью Коши для $M$. При изучении глобально гиперболических пространств удобнее пользоваться не произвольной временнóй функцией, а временнóй функцией Коши.

В полном римановом многообразии любые две точки можно соединить геодезической минимальной длины. Авез (1963) и Зейферт (1967) получили лоренцев аналог этого результата для глобально гиперболических пространств.

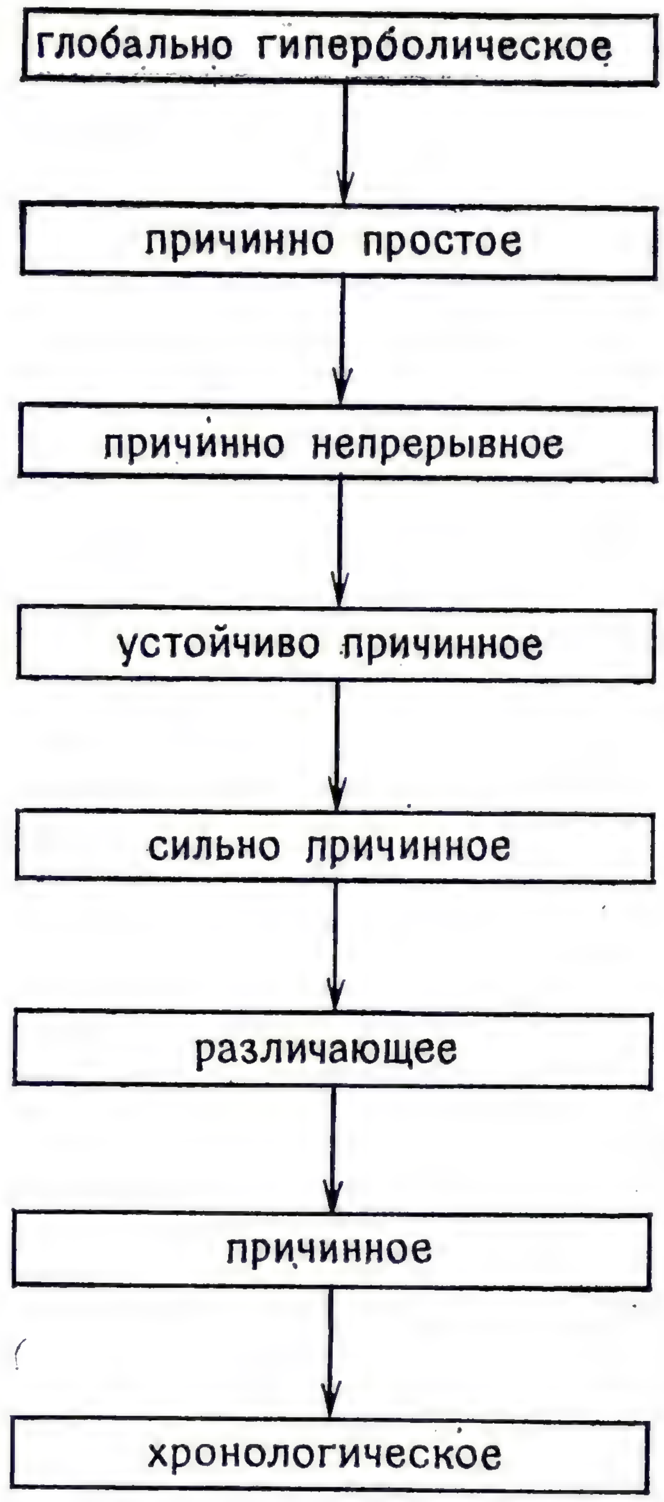



Рис. 2.3. Диаграмма связей между собой различных условий причинности, используемых в этой книге. Наиболее сильным из условий причинности, которые мы будем использовать, является условие глобальной гиперболичности.

**Теорема 2.14.** *Пусть $(M, g)$ глобально гиперболично и $p \leqslant q$. Тогда существует непространственноподобная геодезическая, идущая из $p$ и $q$ и такая, что ее длина не меньше длины любой другой направленной в будущее непространственноподобной кривой, соединяющей $p$ с $q$.*

Следует отметить, что геодезическая в теореме 2.14 не обязательно единственна. Этот результат также будет рассматриваться в разд. 3.2 (с точки зрения лоренцевой функции расстояния). Герок и Хоровиц (1979, с. 289—293) составили интересный список утверждений, касающихся причинности и требующих доказательства или опровержения (вместе с ответами). Мы приводим диаграмму, указывающую на связь между рассмотренными выше условиями причинности (см. Хокинг и Сакс (1974, с. 295), Картер 1971б)).

## 2.3. Предельные кривые и $C^0$-топология на кривых

В лоренцевой геометрии и общей теории относительности используются два различных вида сходимости для последовательности непространственноподобных кривых $\{\gamma_n\}$ (см. Пенроуз (1972), Хокинг и Эллис (1977)). Первый тип сходимости основывается на понятии предельной кривой последовательности кривых, в то время как второй использует понятие $C^0$-топологии на кривых. Для произвольного пространства-времени ни один из этих типов сходимости не является более сильным, чем другой. Однако, как мы покажем, для сильно причинных пространств эти две формы сходимости тесно связаны. Эта связь оказывается весьма полезной при построении максимальных геодезических в сильно причинном пространстве-времени (см. разд. 7.1 и 7.2).

**Определение 2.15.** Кривая $\gamma$ называется *предельной кривой последовательности* $\{\gamma_n\}$, если существует подпоследовательность $\{\gamma_m\}$, такая, что для всех точек $p$ в образе $\gamma$ выполняется следующее условие: каждая окрестность точки $p$ пересекается со всеми, за исключением (не более чем) конечного числа кривых подпоследовательности $\{\gamma_m\}$. Эта подпоследовательность $\{\gamma_m\}$ называется *выделяющей* предельную кривую.

В общем случае последовательность $\{\gamma_n\}$ может либо не иметь предельных кривых, либо иметь много предельных кривых. Это справедливо и в том случае, если кривые последовательности $\{\gamma_n\}$ непространственноподобны. Более того, даже в причинных пространствах кривая, предельная для последовательности непространственноподобных кривых, не обязательно является непространственноподобной. Например, кривая $\gamma(u) = (0, 0, u)$ в примере Картера (см. рис. 2.2) не является непространственноподобной, хотя она и является предельной кривой для любой последовательности непродолжаемых изотропных геодезических, содержащихся во множестве $t = 0$.

С другой стороны, для сильно причинных пространств справедливо следующее утверждение.

**Лемма 2.16.** *Пусть $(M, g)$ — сильно причинное пространство-время. Если $\gamma$ — предельная кривая для последовательности $\{\gamma_n\}$ непространственноподобных кривых, то $\gamma$ непространственноподобна.*

*Доказательство.* Покроем $\gamma$ локально конечным набором $\{U_k\}$ выпуклых нормальных окрестностей, таких, что для каждого $k$ никакая непространственноподобная кривая, покидающая $U_k$, никогда не возвращается. В силу того что причинная связь $\leqslant$ транзитивна, достаточно показать, что кривая $\gamma \cap U_k$ является непространственноподобной для каждого $k$.

Пусть $\{\gamma_m\}$ — та подпоследовательность последовательности $\{\gamma_n\}$, которая выделяет $\gamma$. Для любой пары точек $p$, $q \in \gamma \cap U_k$ можно найти последовательности $\{p_m\}$ и $\{q_m\}$, такие, что $p_m$, $q_m \in \gamma_m$ для любого $m$ и $p_m \to p$, $q_m \to q$. По построению $U_k$ и вследствие предположения о том, что каждая кривая $\gamma_m$ непространственноподобна, точки $p_m$ и $q_m$ причинно связаны в $U_k$ для всех достаточно больших $m$. Переходя к пределу, получаем, что $p$ и $q$ причинно связаны в $U_k$. Так как это выполняется для любой пары $p$, $q \in \gamma \cap U_k$, то кривая $\gamma \cap U_k$ является непространственноподобной. □

Понятие предельной кривой тесно связано с хаусдорфовым замкнутым пределом. Пусть $\{A_n\}$ — произвольная последовательность подмножеств из $M$ (не обязательно кривых). *Хаусдорфовы верхний* и *нижний пределы* последовательности $\{A_n\}$ определяются так:

$\limsup \{A_n\} = \{p \in M$: каждая окрестность точки $p$ пересекается с бесконечным числом множеств $A_n\}$

и

$\liminf \{A_n\} = \{p \in M$: каждая окрестность точки $p$ пересекается со всеми множествами $A_n$, кроме, может быть, конечного числа$\}$

(см. Буземан (1955, с. 23)). Хаусдорфовы верхний и нижний пределы всегда существуют и являются замкнутыми подмножествами, хотя, может быть, и пустыми. Ясно, что $\liminf \{A_n\} \subset \subset \limsup \{A_n\}$. Если эти пределы равны, то определен *хаусдорфов замкнутый предел* последовательности $\{A_n\}$, обозначаемый через $\lim \{A_n\}$:

$$\lim \{A_n\} = \liminf \{A_n\} = \limsup \{A_n\}.$$

Предельная кривая $\gamma$ последовательности кривых $\{\gamma_n\}$ содержится в хаусдорфовом верхнем пределе $\limsup \{\gamma_n\}$. Кроме того, кривая $\gamma$ является предельной кривой последовательности $\{\gamma_n\}$ в том и только том случае, когда для некоторой подпоследовательности $\{\gamma_m\}$ последовательности $\{\gamma_n\}$ выполняется соотношение $\gamma \subset \liminf \{\gamma_m\}$.

Обратимся теперь к доказательству существования непространственноподобных предельных кривых для последовательностей $\{\gamma_n\}$ непространственноподобных кривых, имеющих точки накопления (предложение 2.18). Этот результат — важнейший инструмент в теории причинности общей теории относительности — является следствием теоремы Арцела (теорема 2.17), к которой можно обратиться, так как непространственноподобные кривые локально удовлетворяют условию Липшица.

Пусть $U$ — выпуклая нормальная окрестность пространства-времени $(M, g)$ с компактным замыканием $\bar{U}$, которое содержится в карте $(V, x)$ с локальными координатами $x = (x_1, \ldots, x_n)$, такими, что функция $f = x_1 : U \to \mathbb{R}$ имеет на $U$ времениподобный градиент $\nabla f$. Тогда $f$ — функция времени на $U$, и если $c$ лежит в образе $f$, то множество уровня $f^{-1}(c)$ является пространственноподобной гиперповерхностью в $U$. Для достаточно малой окрестности $U$ существует постоянная $k_0 > 0$, такая, что $g \prec g_0$ на $U$, где $g_0$ — плоская метрика на $U$, задаваемая формулой

$$g_0 = -k_0 dx_1^2 + \sum_{j=2}^{n} dx_j^2.$$

Кроме того, каждая непространственноподобная кривая $\gamma$ в $U$, соединяющая точки $p, q \in U$, связанные отношением $f(p) < f(q)$, может быть перепараметризована так, что в локальных координатах кривая $\gamma$ будет задаваться следующим образом: $\gamma(t) = (t, x_2(t), \ldots, x_n(t))$ для всех $t$, удовлетворяющих условию $f(p) \leqslant t \leqslant f(q)$. Вследствие того что кривая $\gamma$ непространственноподобна как для метрики $g_0$, так и для метрики $g$, она удовлетворяет условию Липшица вида

$$\|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\|_2 \leqslant k_1 |t_1 - t_2|. \tag{2.1}$$

Здесь для вычисления выражения в левой части мы используем заданные локальные координаты

$$\|p - q\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [x_i(p) - x_i(q)]^2}$$

для $p, q \in U$; постоянная $k_1 = (k_0 + 1)^{1/2}$ зависит от метрики $g$, окрестности $U$ и выбора локальной координатной карты $(V, x)$. Это условие Липшица обеспечивает дифференцируемость $\gamma$ почти всюду, при этом $|x_i'| \leqslant k_1$ вдоль $\gamma$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Зададим теперь на пространстве-времени $(M, g)$ вспомогательную полную риманову метрику $h$ с функцией расстояния $d_0$. По теореме Хопфа—Ринова замкнутые шары $\{q \in M: d_0(p, q) \leqslant r\}$ компактны для всех фиксированных $p \in M$ и $0 \leqslant r < \infty$. Если непространственноподобная кривая $\gamma(t)$ параметризована в $U$, как и выше: $\gamma(t) = (t, x_2(t), \ldots, x_n(t))$, то длина $L_0(\gamma | [t_1, t_2])$ кривой $\gamma$ от $t_1$ до $t_2$ относительно метрики $h$ задается формулой

$$L_0(\gamma | [t_1, t_2]) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{i,j} h_{ij} x_i' x_j'}\, dt, \tag{2.2}$$

где $h_{ij}$ — компоненты $h$ относительно локальных координат $x_1, \ldots, x_n$. Вследствие неравенства $|x_i'| \leqslant k_1$ длина $L_0(\gamma | [t_1, t_2])$ удовлетворяет соотношению

$$L_0(\gamma | [t_1, t_2]) \leqslant n H^{1/2} k_1 |t_1 - t_2|,$$

где $H$ — точная верхняя грань $|h_{ij}|$ на компактном множестве $\bar{U}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Поэтому любая непространственноподобная кривая, идущая из множества уровня $f^{-1}(t_1)$ во множество уровня $f^{-1}(t_2)$ и лежащая в $U$, имеет длину, не большую величины $nH^{1/2}k_1 |t_1 - t_2|$. Покрывая $(M, g)$ локально конечным набором множеств с описанными выше свойствами $U$ и $(V, x)$, получаем, что всякая непространственноподобная кривая в $(M, g)$, заданная на отрезке из $\mathbb{R}$, должна иметь конечную относительно метрики h длину. Поэтому каждую непространственноподобную кривую из $(M, g)$ можно перепараметризовать так, что новый параметр будет совпадать с длиной дуги относительно метрики h. Далее, непродолжаемая кривая $\gamma$, параметризованная так, что параметром является длина дуги относительно метрики h, должна быть определена для всех вещественных значений (параметра), в силу того что функция расстояния $d_0$ полна (см. лемму 2.52).

Сформулируем теперь один из вариантов теоремы Арцела (его можно доказать при помощи стандартных рассуждений (см. Манкрс (1975, разд. 7.5))).

**Теорема 2.17.** *Пусть $X$ — локально компактное хаусдорфово пространство со счетным базисом, а $(M, h)$ — полное риманово многообразие с функцией расстояния $d_0$. Предположим, что последовательность $\{f_n\}$ функций $f_n: X \to M$ равностепенно непрерывна и для каждой точки $x_0 \in X$ множество $\bigcup \{f_n(x_0)\}$ ограничено относительно $d_0$. Тогда существуют непрерывная функция $f: X \to M$ и подпоследовательность $\{f_m\}$ последовательности $\{f_n\}$, которая сходится к $f$ равномерно на каждом компактном подмножестве из $X$.*

При помощи теоремы Арцела мы сейчас докажем утверждение, гарантирующее существование предельных кривых для последовательности $\{\gamma_n\}$ непространственноподобных кривых, имеющей точку накопления (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 205—206)).

**Предложение 2.18.** *Пусть $\{\gamma_n\}$ — последовательность непродолжаемых (в будущее) непространственноподобных кривых из $(M, g)$. Если $p$ — точка накопления последовательности $\{\gamma_n\}$, то существует непространственноподобная кривая $\gamma$, предельная для последовательности $\{\gamma_n\}$ и такая, что $p \in \gamma$ и $\gamma$ непродолжаема (в будущее).*

*Доказательство.* Мы ограничимся рассмотрением доказательства только для непродолжаемых кривых вследствие того, что доказательство для кривых, непродолжаемых в будущее, проводится аналогично.

Пусть, как и выше, h — вспомогательная полная риманова метрика на $M$ с функцией расстояния $d_0$ и каждая кривая $\gamma_n$

параметризована длиной дуги, вычисленной относительно метрики $\mathrm{h}$. Тогда область определения каждой $\gamma_n$ совпадает с $\mathbb{R}$, поскольку предполагается, что каждая кривая последовательности непродолжаема. Сдвигая параметризации, если необходимо, можно выбрать подпоследовательность $\{\gamma_m\}$ последовательности $\{\gamma_n\}$ так, чтобы $\gamma_m(0) \to p$ при $m \to \infty$. Это возможно вследствие того, что $p$ — точка накопления последовательности $\{\gamma_n\}$. Пользуясь тем, что каждая кривая $\gamma_m$ параметризована длиной дуги относительно метрики $\mathrm{h}$, получаем, что

$$\mathrm{d}_0(\gamma_m(t_1), \gamma_m(t_2)) \leqslant |t_1 - t_2| \tag{2.3}$$

для всех $m$ и $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Таким образом, кривые $\{\gamma_m\}$ образуют равностепенно непрерывное семейство. Более того, вследствие сходимости $\gamma_m(0) \to p$ найдется $N$, такое, что $\mathrm{d}_0(\gamma_m(0), p) < 1$ для всех $m \geqslant N$. Это означает, что для любого фиксированного $t_0 \in \mathbb{R}$ кривая $\gamma_m | [-t_0, t_0]$ из подпоследовательности $\{\gamma_m\}$ лежит в компактном множестве $\{q \in M\colon \mathrm{d}_0(p, q) \leqslant t_0 + 1\}$, если только $m \geqslant N$. Следовательно, семейство $\{\gamma_m\}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.17, и мы получаем (непрерывную) кривую $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ и подпоследовательность $\{\gamma_k\}$ подпоследовательности $\{\gamma_m\}$, такую, что $\{\gamma_k\}$ сходится к $\gamma$ равномерно на каждом компактном подмножестве из $\mathbb{R}$. Ясно, что $\gamma_k(0) \to p = \gamma(0)$. Из сходимости $\{\gamma_k\}$ к $\gamma$ вытекает, что для всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\mathrm{d}_0(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \leqslant |t_1 - t_2|$. Остается доказать, что $\gamma$ непространственноподобна и непродолжаема.

Чтобы доказать, что $\gamma$ является непространственноподобной, зафиксируем $t_1 \in \mathbb{R}$ и рассмотрим выпуклую нормальную окрестность $U$ из $(M, g)$, содержащую точку $\gamma(t_1)$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы множество $\{q \in M\colon \mathrm{d}_0(\gamma(t_1), q) < \delta\}$ содержалось в $U$. Если $t_1 < t_2 < t_1 + \delta$, то из неравенства (2.3) и равномерной сходимости на компактных подмножествах вытекает, что для всех больших $k$ множество $\gamma_k[t_1, t_2]$ лежит в $U$. Используя предельные соотношения $\gamma_k(t_1) \to \gamma(t_1)$, $\gamma_k(t_2) \to \gamma(t_2)$ и отношение $\gamma_k(t_1) \leqslant_U \gamma_k(t_2)$, справедливое для всех больших $k$, а также то обстоятельство, что $U$ — выпуклая нормальная окрестность, получаем, что $\gamma(t_1) \leqslant_U \gamma(t_2)$. Тогда $\gamma | [t_1, t_2]$ — направленная в будущее непространственноподобная кривая в $U$ (см. Хокинг и Эллис (1977, лемма 4.5.1)). Таким образом, $\gamma$ — направленная в будущее непространственноподобная кривая в $(M, g)$.

Остается доказать, что $\gamma$ непродолжаема. Мы приведем доказательство только для случая непродолжаемости в будущее, так как случай непродолжаемости в прошлое рассматривается аналогично. Предположим противное: кривая $\gamma$ не является непродолжаемой в будущее. Тогда при $t \to \infty$ имеем $\gamma(t) \to q_0 \in M$. Пусть $U'$ — выпуклая нормальная окрестность точки $q_0$ с компактным замыканием $\overline{U'}$, которое содержится в карте $(V, x)$

многообразия $M$ с локальными координатами $(x_1, \ldots, x_n)$, где $f = x_1$: $U' \to \mathbb{R}$ — временная функция для $U'$. Из неравенства вида (2.2) следует, что если $\gamma | [t_1, \infty) \subset U'$, то никакая непространственноподобная кривая в $U'$, идущая от множества уровня $f^{-1}(f(\gamma(t_1)))$ к множеству уровня $f^{-1}(f(q_0))$, не может иметь длину дуги в метрике $h$ больше, чем некоторое число $\delta' > 0$. С другой стороны, для достаточно больших $k$ должно выполняться включение

$$\gamma_k [t_1 + 1, t_1 + \delta' + 2] \subset f^{-1}([f(\gamma(t_1)), f(q_0)]).$$

Это приводит к противоречию вследствие того, что длина $L_0(\gamma_k [t_1 + 1, t_1 + \delta' + 2]) = \delta' + 1$ для всех $k$. □

Предельная кривая $\gamma$, получающаяся в ходе доказательства предложения 2.18, не обязательно параметризована длиной дуги, даже если непродолжаемые непространственноподобные кривые последовательности $\{\gamma_n\}$ параметризованы длиной дуги относительно полной римановой метрики $\mathrm{h}$. Это является следствием того факта, что риманов функционал длины не обладает свойством полунепрерывности сверху (хотя он и полунепрерывен снизу) в топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах. Тем не менее, хотя построенная в ходе доказательства предложения 2.18 кривая $\gamma$ не обязательно параметризована длиной дуги, она будет определена для всех значений (параметра) из $\mathbb{R}$ (по условию каждая $\gamma_n$ непродолжаема). Более того, если $(M, g)$ сильно причинно, то из теоремы Хопфа—Ринова и предложения 2.9 вытекает, что $d_0(\gamma(0), \gamma(t)) \to \infty$, когда $|t| \to \infty$. Здесь через $d_0$, как и выше, обозначена полная риманова функция расстояния, индуцированная на $M$ метрикой $\mathrm{h}$.

В глобально гиперболическом случае предложение 2.18 можно усилить.

**Предложение 2.19.** *Пусть $(M, g)$ глобально гиперболично. Предположим, что $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ — последовательности в $M$, сходящиеся к точкам $p$ и $q \in M$ соответственно, причем $p \leqslant q$, $p \neq q$ и $p_n \leqslant q_n$ для любого $n$. Пусть $\gamma_n$ — направленная в будущее непространственноподобная кривая, идущая из $p_n$ в $q_n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует направленная в будущее непространственноподобная кривая $\gamma$, предельная для последовательности $\{\gamma_n\}$ и соединяющая $p$ с $q$.*

*Доказательство.* Пусть $\mathrm{h}$ — вспомогательная полная риманова метрика на $M$ с функционалом длины $L_0$. Выберем конечное покрытие компактного множества $J^+(p) \cap J^-(q)$ выпуклыми нормальными окрестностями $U_1, \ldots, U_k$, каждая из которых имеет компактное замыкание и такова, что никакая непространственноподобная кривая, покидающая любую окрестность $U_i$, никогда в нее не возвращается. Как в доказательстве предложения 2.18,

устанавливается, что для каждого $i$ существует число $N_i$, такое, что любая непространственноподобная кривая $\gamma$: $[a, b] \to U_i$ имеет длину относительно метрики $\mathfrak{h}$, меньшую $N_i$ (см. формулу (2.2)). Поэтому, если $U = U_1 \cup \ldots \cup U_k$ и $N = N_1 + \ldots + N_k$, то любая непространственноподобная кривая $\gamma$: $[a, b] \to U$ должна удовлетворять неравенству $L_0(\gamma) \leqslant N$.

Продолжим каждую данную непространственноподобную кривую $\gamma_n$ до непродолжаемой в будущее непространственноподобной кривой, также обозначаемой через $\gamma_n$. Можно считать, что каждая $\gamma_n$: $[0, \infty) \to M$ параметризована длиной дуги относительно метрики $\mathfrak{h}$ (см. формулу (2.2)). Поэтому, если $U = U_1 \cup \ldots \cup U_k$, то, согласно предложению 2.18, существует непродолжаемая в будущее непространственноподобная кривая $\gamma$: $[0, \infty) \to M$, $\gamma(0) = p$, предельная для $\{\gamma_n\}$ и такая, что некоторая подпоследовательность $\{\gamma_m\}$ последовательности $\{\gamma_n\}$ сходится к $\gamma$ равномерно на компактных подмножествах $[0, \infty)$. Из соотношений $\gamma_m(t_m) = q_m$, $0 < t_m \leqslant N$, и сходимости $q_m \to q$ заключаем, что при некотором значении параметра $\tau$, удовлетворяющего условию $0 < \tau \leqslant N$, кривая $\gamma$ проходит через точку $q$. Отсюда следует, что $\gamma | [0, \tau]$ — непространственноподобная кривая, предельная для $\{\gamma_m | [0, t_m]\}$ и соединяющая $p$ с $q$. □

Обратимся теперь к рассмотрению сходимости в $C^0$-топологии (см. Пенроуз (1972, с. 49)).

**Определение 2.20.** Пусть $\gamma$ и все кривые последовательности $\{\gamma_n\}$ определены на отрезке $[a, b]$. Будем говорить, что последовательность $\{\gamma_n\}$ *сходится к $\gamma$ в $C^0$-топологии на кривых*, если $\gamma_n(a) \to \gamma(a)$, $\gamma_n(b) \to \gamma(b)$ и для любого открытого множества $V$, содержащего $\gamma$, можно указать целое число $N$, такое, что $\gamma_n \subset V$ для всех $n \geqslant N$.

Произвольное пространство-время содержит последовательность $\{\gamma_n\}$, которая имеет предельную кривую $\gamma$, однако не сходится к $\gamma$ в $C^0$-топологии. Пусть $\alpha$, $\beta$: $[0, 1] \to M$ — две направленные в будущее времениподобные кривые, связанные условием $\alpha([0, 1]) \cap \beta([0, 1]) = \varnothing$. Положим

$$\gamma_n = \begin{cases} \alpha, & \text{если} \quad n = 2m, \\ \beta, & \text{если} \quad n = 2m - 1. \end{cases}$$

Тогда $\{\gamma_n\}$ не сходится в $C^0$-топологии ни к $\alpha$, ни к $\beta$. В то же время подпоследовательность $\gamma_{2m}$ (соответственно $\gamma_{2m-1}$) последовательности $\{\gamma_n\}$ сходится к $\alpha$ (соответственно к $\beta$) в $C^0$-топологии. Не являющееся сильно причинным пространство-время может содержать также последовательность $\{\gamma_n\}$ непространственноподобных кривых, которая имеет непространственноподобную предельную кривую $\gamma$, но не содержит ни одной подпоследова-

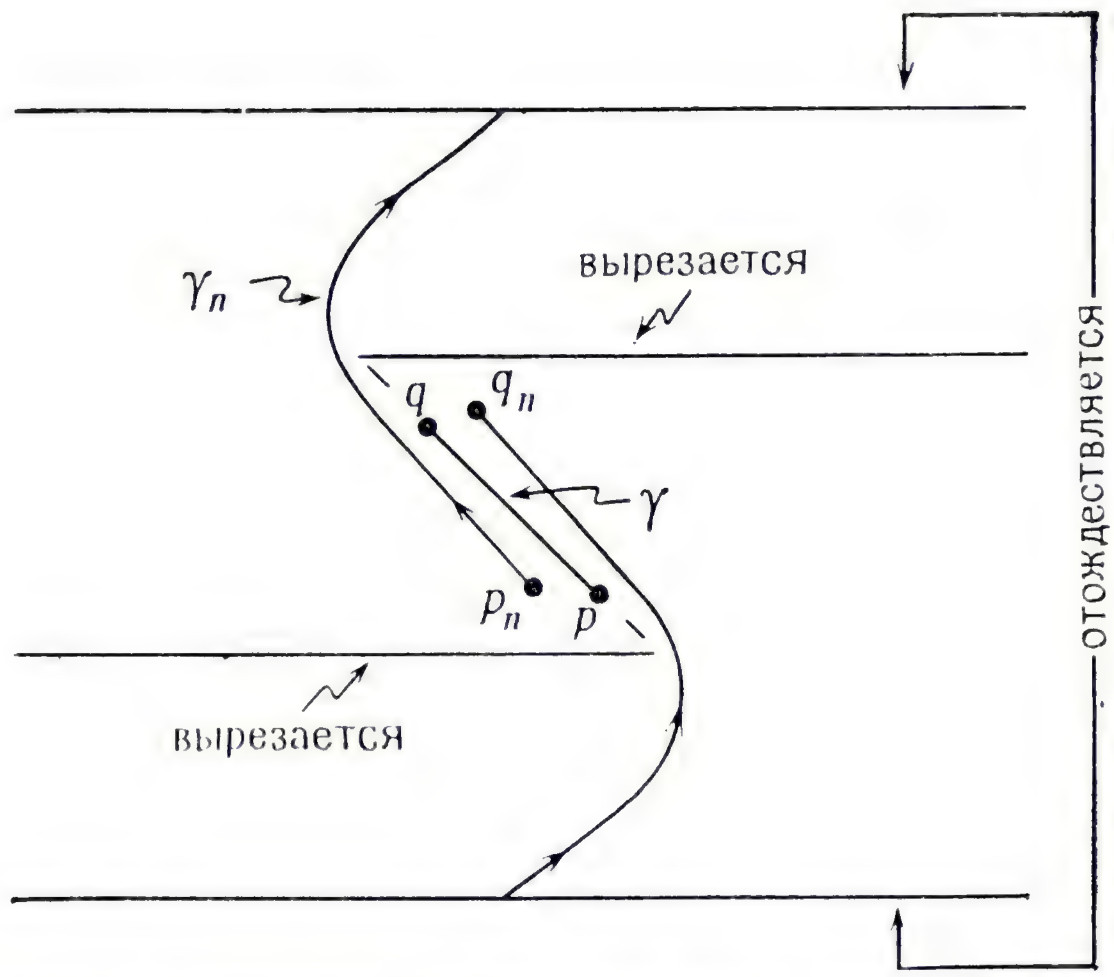



Рис. 2.4. Причинное пространство-время $(M, g)$, в котором последовательность $\{\gamma_n\}$ непространственноподобных кривых может обладать предельной кривой $\gamma$, но не имеет подпоследовательности, сходящейся к $\gamma$ в $C^0$-топологии на кривых, может быть построено из подмножества пространства Минковского, как показано на рисунке.

тельности $\{\gamma_m\} \subset \{\gamma_n\}$, сходящейся к $\gamma$ в $C^0$-топологии. Это показано на рис. 2.4 (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 214), где рассматриваются причинные свойства этого примера).

Обратно, последовательность непространственноподобных кривых $\{\gamma_n\}$ может сходиться в $C^0$-топологии к некоторой непространственноподобной кривой $\gamma$, но не иметь $\gamma$ предельной кривой. В этом можно убедиться на примере цилиндра $M = S^1 \times \mathbb{R}$ с лоренцевой метрикой $ds^2 = d\theta\, dt$. Пусть $\gamma_n$ — сегмент на образующей $\theta = 0$, задаваемый формулой $\gamma_n(t) = (0, t)$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$, $n$ любое. Если $\gamma$ — кусочно-гладкая непространственноподобная кривая, получаемая в результате обхода по окружности $t = 0$ (это изотропная геодезическая), а затем вверх по образующей $\theta = 0$ от $t = 0$ до $t = 1$, то $\{\gamma_n\}$ сходится к $\gamma$ в $C^0$-топологии; однако $\gamma$ не является предельной кривой для последовательности $\{\gamma_n\}$ (рис. 2.5).

В сильно причинных пространствах для последовательностей непространственноподобных кривых эти два вида сходимости почти равносильны (см. Бим (1979а, с. 164)). Более точно:

**Предложение 2.21.** *Пусть $(M, g)$ — сильно причинное пространство-время. Предположим, что $\{\gamma_n\}$ — последовательность непространственноподобных кривых, определенных на $[a, b]$ и таких, что $\gamma_n(a) \to p$ и $\gamma_n(b) \to q$. Непространственноподобная*

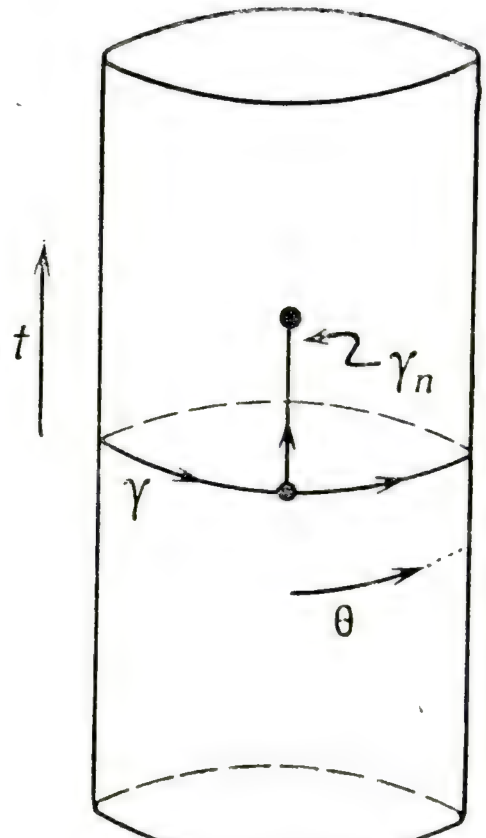



Рис. 2.5. В хронологических пространствах последовательность $\{\gamma_n\}$ непространственноподобных кривых может сходиться к непространственноподобной кривой $\gamma$ в $C^0$-топологии на кривых, однако $\gamma$ может не быть предельной кривой ни для какой подпоследовательности $\{\gamma_m\}$ последовательности $\{\gamma_n\}$. Кривые $\gamma_n$ — отрезки на прямой $\theta = 0$ от $t = 0$ до $t = 1$. Кривая $\gamma$ обегает вокруг цилиндра один раз и затем идет по $\gamma_n$.

*кривая* $\gamma$: $[a, b] \to M$, *удовлетворяющая условию* $\gamma(a) = p$ *и* $\gamma(b) = q$, ***является предельной кривой для последовательности*** $\{\gamma_n\}$ *тогда и только тогда, когда найдется подпоследовательность* $\{\gamma_m\}$ *последовательности* $\{\gamma_n\}$, *сходящаяся к* $\gamma$ *в* $C^0$*-топологии на кривых.*

*Доказательство.* ($\Rightarrow$) Без ограничения общности можно предполагать, что и $\gamma$, и все $\gamma_n$ являются кривыми, направленными в будущее. Пусть $V$ — произвольное открытое множество, содержащее $\gamma$. Покроем компактный образ $\gamma$ выпуклыми нормальными окрестностями $W_1, \ldots, W_k$ так, что каждая окрестность $W_i \subset V$ и никакая непространственноподобная кривая, покидающая $W_i$, никогда в $W_i$ не возвращается. Существует разбиение $a = t_0 < < t_1 < \ldots < t_j = b$ отрезка $[a, b]$, такое, что для всех $0 \leqslant i \leqslant \leqslant j - 1$ каждая пара $\gamma(t_i)$, $\gamma(t_{i+1})$ лежит в некоторой $W_h$. Здесь $h = h(i)$ и $1 \leqslant h(i) \leqslant k$ для всех $i$. Пусть $\{\gamma_m\}$ — подпоследовательность, выделяющая предельную кривую $\gamma$. Для любого $m$ положим $p(0, m) = \gamma_m(a)$, $p(j, m) = \gamma_m(b)$. Для каждого фиксированного $i$, $0 < i < j$, выберем точку $p(i, m) \in \gamma_m$ так, чтобы последовательность $\{p(i, m)\}$ сходилась к $\gamma(t_i)$. Вследствие того что точка $\gamma(t_{i+1})$ лежит в причинном будущем точки $\gamma(t_i)$, а $M$ сильно причинное, точка $p(i + 1, m)$ лежит в причинном будущем точки $p(i, m)$ для всех $m$, бо́льших некоторого $N_1$. Кроме того, существует $N_2$, такое, что точки $p(i, m)$ и $p(i + 1, m)$ лежат в $W_{h(i)}$ для всех $0 \leqslant i \leqslant j - 1$ и $m \geqslant N_2$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Часть кривой $\gamma_m$, соединяющая $p(i, m)$ с $p(i + 1, m)$, должна целиком лежать в $W_{h(i)}$ при $m \geqslant N$ в силу того, что никакая непространственноподобная кривая не может покинуть $W_h$ и вернуться. Отсюда следует, что $\gamma_m \subset W_1 \cup \cup \ldots W_k \subset V$ для всех $m \geqslant N$, как и требовалось.

($\Leftarrow$) Пусть $\{\gamma_m\}$ — подпоследовательность, сходящаяся к $\gamma$ в $C^0$-топологии на кривых. Покажем что множество $A = \{t_0 \in \in [a, b]$: каждая точка кривой $\gamma \mid [a, t_0]$ является предельной точкой данной подпоследовательности$\}$ совпадает с $[a, b]$. Ясно, что из сходимости $\gamma_m(a) \to \gamma(a)$ вытекает включение $a \in A$. Если $\tau = \sup \{t_0 \colon t_0 \in A\}$, то для каждого $t$, $a \leqslant t, \leqslant \tau$, точка $\gamma(t)$ является предельной точкой для подпоследовательности $\{\gamma_m\}$. Чтобы доказать включение $\tau \in A$, предположим, что $\tau > a$, и рассмотрим последовательность $\{t_k\}$, у которой $t_k \to \tau$. Всякая окрестность $U(\gamma(t))$ точки $\gamma(t)$ для достаточно больших $k$ является также и окрестностью точки $\gamma(t_k)$ и, следовательно, должна пересекаться со всеми кривыми подпоследовательности $\{\gamma_m\}$, кроме, быть может, конечного числа. Поэтому $\gamma(\tau)$ — предельная точка для $\{\gamma_m\}$, и множество $A$ должно быть замкнутым отрезком, содержащимся в $[a, b]$. Допустим, что $\tau < b$. Используя сильную причинность многообразия $(M, g)$, можно найти выпуклую нормальную окрестность $V$ точки $\gamma(\tau)$, такую, что никакая непространственноподобная кривая на $(M, g)$, которая покидает $V$, в нее не возвращается. Полагая $V$ достаточно малой, мы можем допускать, что $(V, g|V)$ глобально гиперболично и что $f \colon V \to \to \mathbb{R}$ — функция времени Коши для $(V, g \mid V)$, причем $f(V) = \mathbb{R}$ и $f(\gamma(\tau)) = 0$. Предположим, что $\gamma(b) \notin V$. Тогда любая непродолжаемая непространственноподобная кривая из $(M, g)$, имеющая непустое пересечение с $V$, должна пересекать каждую поверхность Коши $f^{-1}(s)$ ровно один раз. Зафиксируем $s$, $0 < < s < \infty$, и рассмотрим $x(s) = \gamma \cap f^{-1}(s)$. Вследствие того что $\gamma(\tau) \in V$ и $\gamma(b) \notin V$, это пересечение не пусто. Из того что $\gamma(\tau)$ и $\gamma(b)$ — предельные точки подпоследовательности $\{\gamma_m\}$, кривые $\gamma_m$ должны иметь непустые пересечения с $f^{-1}(s)$ для всех достаточно больших $m$. Для всех таких $m$ положим $x_m(s) = \gamma_m \cap \cap f_s^{-1}(s)$. Чтобы убедиться в сходимости $x_m(s) \to x(s)$, заметим, что для каждой окрестности $W$ кривой $\gamma$ точки $x_m(s)$ должны лежать в $W \cap f^{-1}(s)$ для всех достаточно больших $m$ (рис. 2.6). Это показывает, что каждая точка $x(s)$ является предельной точкой для подпоследовательности $\{\gamma_m\}$. Следовательно, множество $A$ содержит числа, большие $\tau$, в противоречии с определением $\tau$, и мы заключаем, что $A = [a, b]$. Полученное соотношение показывает, что $\gamma$ — предельная кривая для подпоследовательности $\{\gamma_m\}$. $\square$

Пусть $\gamma$ — непространственноподобная кривая в сильно причинном пространстве-времени $(M, g)$. Выберем в $M$ компактное подмножество $K$ так, чтобы $\gamma \subset \operatorname{Int}(K)$. Предположим, что на множестве непространственноподобных кривых, содержащихся в $K$, задана $C^0$-топология. Известно (см. Пенроуз (1972, с. 54)), что лоренцев функционал длины дуги $L(\gamma)$ (см. равенство (3.1))

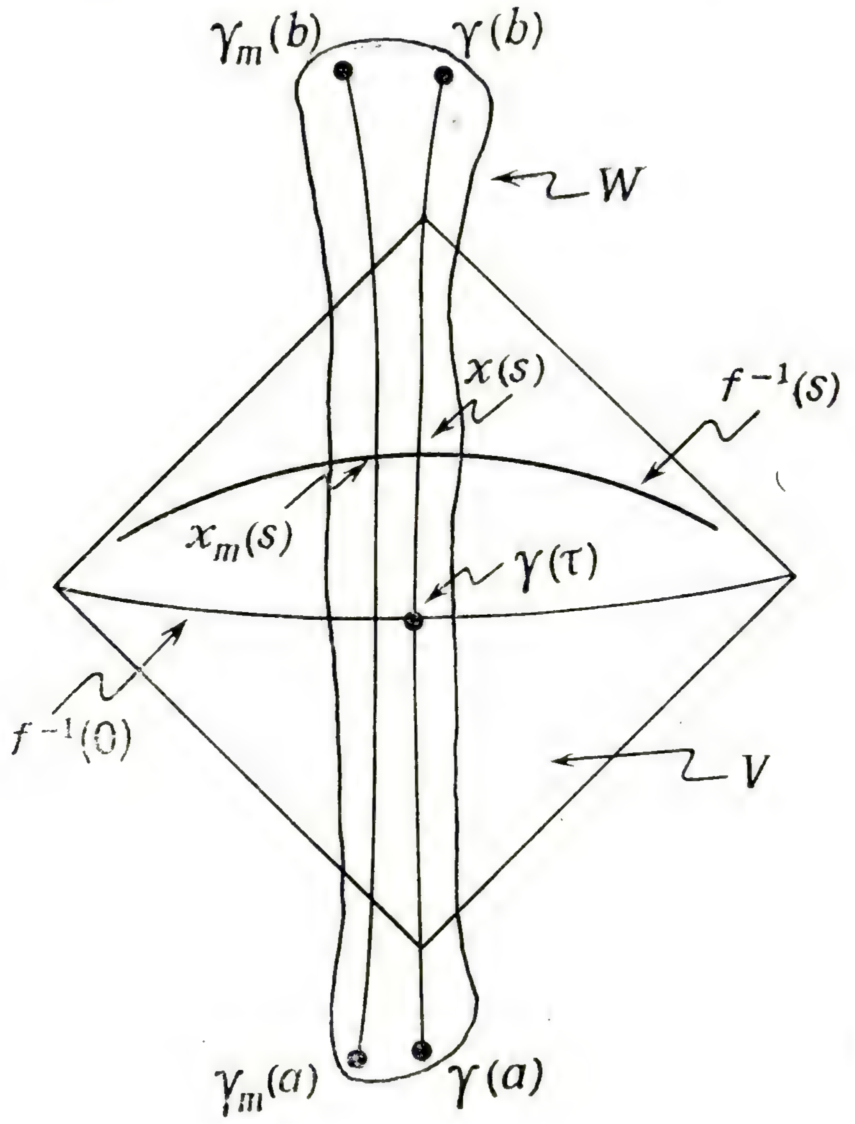



Рис. 2.6. В доказательстве предложения 2.21 глобально гиперболическая окрестность $V$ точки $\gamma(\tau)$ имеет временну́ю функцию Коши $f: V \to \mathbb{R}$, для которой $f(\gamma(\tau)) = 0$. Для всех достаточно больших $m$ кривые $\gamma_m$ должны пересекать поверхность Коши $f^{-1}(s)$ в единственной точке $x_m(s)$. Если $W$ — произвольная окрестность $\gamma$, то $x_m(s) \in W \cap f^{-1}(s)$ для всех достаточно больших $m$. Можно выбрать $W$ так, чтобы $W \cap f^{-1}(s)$ было столь малой окрестностью точки $x(s) = \gamma \cap f^{-1}(s)$ в $f^{-1}(s)$, сколь мы пожелаем. Тогда $x_m(s) \to x(s)$ и $x(s)$ должна быть предельной кривой для подпоследовательности $\{\gamma_m\}$.

полунепрерывен сверху относительно $C^0$-топологии на кривых (см. Буземан (1967, с. 10)). Этот факт является аналогом хорошо известного результата, что риманов функционал длины дуги полунепрерывен снизу.

**Замечание 2.22.** Пусть $(M, g)$ сильно причинно и $\gamma$ — заданная непространственноподобная кривая в $(M, g)$. Если последовательность $\{\gamma_n\}$ непространственноподобных кривых сходится к $\gamma$ в $C^0$-топологии на кривых, то

$$L(\gamma) \geqslant \overline{\lim}\, L(\gamma_n).$$

## 2.4. Двумерное пространство-время

В этом разделе мы рассмотрим топологическую и причинную структуры на двумерных лоренцевых многообразиях. Мы покажем, используя пару изотропных векторных полей, образованных векторами, которые в каждой точке $M$ касаются двух изотропных геодезических, что универсальное накрывающее многообразие произвольного двумерного лоренцева многообразия гомеоморфно $\mathbb{R}^2$. Затем мы докажем, что каждое двумерное лоренцево многообразие, гомеоморфное $\mathbb{R}^2$, устойчиво причинно. В частности, всякое односвязное двумерное лоренцево многообразие причинно. Поэтому *никакая* лоренцева метрика на $\mathbb{R}^2$ не имеет замкнутых непространственноподобных кривых. Следует отметить также, что двумерные (но не выше) лоренцевы многообразия обладают тем свойством, что $(M, -g)$ тоже лоренцево. Это иногда оказывается

полезным, например при получении сведений о поведении всех геодезических в $(M, g)$ из результатов, выполняющихся в высших размерностях только для непространственноподобных геодезических.

Пусть $(M, g)$ — произвольное двумерное лоренцево многообразие. Зафиксируем точку $p \in M$ и выберем выпуклую нормальную окрестность $U(p)$ с $p$ в качестве базовой точки. Рассмотрим следующий способ задания локальных координат для точек из $U(p)$, достаточно близких к $p$. Пусть $\gamma_1$: $(-\varepsilon_1, +\varepsilon_1) \to U(p)$ и $\gamma_2$: $(-\varepsilon_2, +\varepsilon_2) \to U(p)$ — две изотропные геодезические, проходящие через точку $p$ так, что $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. Для каждой достаточно близкой к $p$ точки $q \in U(p)$ две изотропные геодезические, проходящие через точку $q$, будут пересекать $\gamma_1$ и $\gamma_2$ в окрестности $U(p)$ в однозначно определяемых точках $\gamma_1(t_0)$ и $\gamma_2(s_0)$ соответственно. Припишем точке $q$ координаты $(t_0, s_0)$. В этих координатах изотропные геодезические вблизи $p$ содержатся в множествах вида $t = t_0$ или $s = s_0$. Тем самым мы доказали следующее утверждение.

**Лемма 2.23.** *Пусть $(M, g)$ — двумерное лоренцево многообразие. Тогда у каждой точки $p \in M$ есть окрестность, в которой можно ввести локальные координаты $x = (x_1, x_2)$ так, что $x(p) = 0$ и любая изотропная геодезическая в этой окрестности содержится либо в множестве вида $x_1 = \mathrm{const}$, либо в множестве вида $x_2 = \mathrm{const}$.*

Предположим, что $X$ — направленное в будущее времениподобное поле на $M$. Тогда в каждой точке $p \in M$ существует два однозначно определенных направленных в будущее изотропных вектора $n_1$, $n_2 \in T_pM$, таких, что $X(p) = n_1 + n_2$. Нетрудно видеть, что в достаточно малой окрестности $U(p)$ точки $p$ векторы $n_1$ и $n_2$ можно продолжить до непрерывных изотропных векторных полей $X_1$ и $X_2$, определенных на $U(p)$ и удовлетворяющих условию $X(q) = X_1(q) + X_2(q)$ для всех $q \in U(p)$. Если $M$ односвязно, то, как мы сейчас покажем, $X_1$ и $X_2$ можно продолжить на все $M$.

**Предложение 2.24.** *Пусть $(M, g)$ — односвязное двумерное лоренцево многообразие. Тогда на $M$ можно определить два гладких, нигде невырождающихся векторных поля $X_1$ и $X_2$, которые линейно независимы в каждой точке из $M$.*

*Доказательство.* Вследствие односвязности $M$ многообразие $(M, g)$ ориентируемо во времени. Поэтому на $M$ можно выбрать гладкое направленное в будущее времениподобное векторное поле $X$. Зафиксируем базовую точку $p_0 \in M$ и положим $X(p_0) = n_1 + n_2$, как и выше. Рассмотрим кривую $\gamma$: $[0, 1] \to M$,

идущую из $p_0$ в произвольно выбранную другую точку $q \in M$. Непрерывные изотропные векторные поля $X_1$ и $X_2$ вдоль $\gamma$, у которых $X_1(0) = n_1$, $X_2(0) = n_2$ и $X(\gamma(t)) = X_1(t) + X_2(t)$ для всех $t \in [0, 1]$, определяются однозначно. Если $\eta$: $[0, 1] \to M$ — любая другая кривая, связывающая $p_0$ и $q$, то $\gamma$ и $\eta$ гомотопны вследствие того, что $M$ по предположению односвязно. Таким образом, если $Y_1$ и $Y_2$ — изотропные векторные поля вдоль $\eta$, подчиненные условию $Y_1(0) = n_1$ и $Y_2(0) = n_2$, то стандартными рассуждениями теории гомотопий получаем, что $Y_1(1) = X_1(1)$ и $Y_2(1) = X_2(1)$. Тем самым предложенная конструкция дает пару непрерывных векторных полей $X_1$ и $X_2$ на $M$, линейно независимых в каждой точке. □

**Следствие 2.25.** *Пусть $(M, g)$ — произвольное двумерное лоренцево многообразие. Тогда универсальное накрывающее лоренцево многообразие $(\tilde{M}, \tilde{g})$ многообразия $(M, g)$ гомеоморфно $\mathbb{R}^2$.*

*Доказательство.* Вследствие того что $\tilde{M}$ односвязно и двумерно, оно гомеоморфно либо $\mathbb{R}^2$, либо $S^2$. Однако ввиду того, что эйлерова характеристика сферы $S^2$ отлична от нуля, $S^2$ не допускает непрерывных векторных полей, всюду отличных от нуля. □

Напомним, что *интегральная кривая* гладкого векторного поля $X$ на $M$ — это такая гладкая кривая $\gamma$, что $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ для всех $t$ из области задания $\gamma$ (см. Кобаяси и Номидзу (1981, с. 21)). Следующий результат хорошо известен (см. Хартман (1970, с. 184)).

**Предложение 2.26.** *Пусть $X$ — гладкое нигде невырождающее векторное поле на $\mathbb{R}^2$ и $\gamma$: $(a, b) \to \mathbb{R}^2$ — максимальная интегральная кривая поля $X$. Тогда $\gamma(t)$ выходит из любого компактного подмножества плоскости $\mathbb{R}^2$, когда $t \to a^+$ (или $t \to b^-$).*

Рассмотрим лоренцево многообразие $(M, g)$, гомеоморфное $\mathbb{R}^2$. Пусть $X_1$, $X_2$ — изотропные векторные поля на $M$, существование которых доказано в предложении 2.24. Ясно, что каждую изотропную геодезическую на $(M, g)$ можно перепараметризовать так, чтобы в результате она стала интегральной кривой поля $X_1$ или $X_2$. Поэтому интегральные кривые полей $X_1$ и $X_2$ естественно назвать *изотропными предгеодезическими*. Пусть $\gamma$: $(a, b) \to M$ — непродолжаемая изотропная геодезическая, которая перепараметризуется в интегральную кривую поля $X_1$. Если $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ для некоторых $t_1$ и $t_2$, $t_1 \neq t_2$, то из того, что $\gamma'(t_1)$ и $\gamma'(t_2)$ отличаются от $X_1(\gamma(t_1))$ лишь скалярным множителем, и из единственности геодезической вытекает, что $\gamma$ — гладкая замкнутая геодезическая. Однако, согласно предложению 2.26, это невозможно. Таким образом, справедливо следующее

**Следствие 2.27.** *Лоренцево многообразие* $(M, g)$, *гомеоморфное* $\mathbb{R}^2$, *не содержит замкнутых изотропных геодезических. Более того каждая непродолжаемая изотропная геодезическая* $\gamma$: $(a, b) \to M$ *является вложением и, значит, не содержит петель.*

Говорят, что семейство $F$ непродолжаемых изотропных геодезических *просто* покрывает многообразие $M$, если каждая точка $p \in M$ лежит ровно на одной геодезической из $F$. Пусть $(M, g)$ — лоренцево многообразие, гомеоморфное $\mathbb{R}^2$. Тогда интегральные кривые векторного поля $X_1$ (соответственно $X_2$), определенного в предложении 2.24, можно перепараметризовать в семейство $F_1$ (соответственно $F_2$) геодезических на $M$. Каждое семейство $F_i$ покрывает $M$ вследствие того, что $X_i(p) \neq 0$ для $i = 1, 2$ и всех $p \in M$. Более того, так как через каждую точку $p \in M$ проходит ровно одна интегральная кривая поля $X_i$, то каждое семейство $F_i$ покрывает $M$ просто. Поэтому из предложения 2.24 вытекает следующее утверждение (см. Бим и Ву (1969, с. 51)).

**Предложение 2.28.** *Пусть* $(M, g)$ — *лоренцево многообразие, гомеоморфное* $\mathbb{R}^2$. *Тогда непродолжаемые изотропные геодезические* $(M, g)$ *можно разбить на два семейства* $F_1$ *и* $F_2$ *так, что каждое из этих семейств покрывает* $M$ *просто.*

Пусть $\gamma$: $(a, b) \to M$ — непродолжаемая времениподобная кривая, а $c$: $(\alpha, \beta) \to M$ — непродолжаемая изотропная геодезическая. Ясно, что в произвольных лоренцевых многообразиях $\gamma$ и $c$ могут пересекаться более одного раза. Однако если $M$ гомеоморфно $\mathbb{R}^2$, то $\gamma$ и $c$ пересекаются самое большее в одной точке (см. Бим и Ву (1969, с. 52)).

**Предложение 2.29.** *Пусть* $(M, g)$ — *лоренцево многообразие, гомеоморфное* $\mathbb{R}^2$. *Тогда каждая времениподобная кривая пересекает заданную изотропную геодезическую не более одного раза.*

*Доказательство.* Пусть $c_0$ — непродолжаемая направленная в будущее изотропная геодезическая в $M$. Можно считать, что $c_0$ принадлежит семейству $F_1$, определяемому по изотропному векторному полю $X_1$, как описано выше. Пусть $\sigma$ — направленная в будущее времениподобная кривая в $M$, которая пересекает $c_0$ дважды (возможно, в одной и той же точке). Тогда можно найти такие $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$, что точки $\sigma(a)$, $\sigma(b)$ лежат на $c_0$, а $\sigma(t) \notin c_0$ при $a < t < b$. Ввиду того что $\sigma$ времениподобна, задаваемое ею отображение локально взаимно однозначно. Следовательно, если $\sigma|[a, b]$ не является взаимно однозначным, то $\sigma$ содержит замкнутые времениподобные петли. Взяв одну из этих петель, можно найти $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, подчиненные условию $a < \alpha < \beta < b$, и вторую изотропную геодезическую $c_1 \in F_1$ так, что

$\sigma | [\alpha, \beta]$ — взаимно однозначно, точки $\sigma(\alpha)$ и $\sigma(\beta)$ лежат на $c_1$ и $\sigma(t) \notin c_1$ при $\alpha < t < \beta$. Ниже мы покажем, что если направленная в будущее времениподобная кривая $\gamma: [a, b] \to M$ не имеет самопересечений, то не существует кривой $c \in F_1$, на которой лежали бы точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$, а $\gamma(t) \notin c$ для всех $t$, удовлетворяющих условию $a < t < b$. Если исходная времениподобная кривая $\sigma | [a, b]$ не имеет самопересечений, то, применив к ней приведенный выше факт, получим требуемое противоречие. Если же $\sigma | [a, b]$ имеет самопересечения, то требуемое противоречие возникает при рассмотрении $c_1$ и $\sigma | [\alpha, \beta]$.

Поэтому предложение будет доказано, если мы покажем, что нельзя найти кривой $\gamma: [a, b] \to M$, обладающей следующими свойствами: $\gamma$ направлена в будущее, времениподобна, не имеет самопересечений, точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ лежат на $c_0$, а $\gamma(t) \notin c_0$ при $a < t < b$. Проходя по $\gamma$ от $\gamma(a)$ до $\gamma(b)$, а затем по части $c_0$ от $\gamma(b)$ до $\gamma(a)$, получим замкнутую жорданову кривую, ограничивающую множество $W$, замыкание $\overline{W}$ которого компактно (рис. 2.7). Пусть $U$ — выпуклая нормальная окрестность с базовой точкой $\gamma(a)$. Выберем $t_1$ так, чтобы $a < t_1 < b$ и $\gamma(t_1) \in U$. Пусть $c_1$ — изотропная геодезическая семейства $F_1$, проходящая через $\gamma(t_1)$. Вследствие того что перепараметризацией кривую $c_1$ можно превратить в интегральную кривую поля $X_1$ и $c_1$ входит в $\overline{W}$ через точку $\gamma(t_1)$, из предложения 2.26 вытекает, что $c_1$ покидает $W$ в некоторой точке $\gamma(t_1')$, $t_1' > t_1$. Так как $c_0$ пересекает $\gamma$ в точке $\gamma(b)$, то должно выполняться неравенство $t_1' < b$. В частности, $[t_1, t_1'] \subset (a, b)$. Таким образом, мы нашли сегмент $[t_1, t_1'] \subset (a, b)$, обладающий следующими свойствами: $\gamma([t_1, t_1']) \subset \overline{W}$ и $\gamma$ пересекает изотропную геодезическую $c_1 \in F_1$ в точках $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_1')$ (рис. 2.7).

Теперь можно построить вторую замкнутую жорданову кривую, пройдя сначала по $\gamma$ от $t_1$ до $t_1'$, а затем по части $c_1$ от точки $\gamma(t_1')$ до точки $\gamma(t_1)$. Повторяя рассуждения предыдущего абзаца, получим сегмент $[t_2, t_1'] \subset (t_1, t_1')$, такой, что времениподобная кривая $\gamma | [t_2, t_2']$ пересекает изотропную геодезическую $c_2$ семейства $F_1$ в точках $\gamma(t_2)$ и $\gamma(t_2')$, причем так, что $\gamma(t_2)$ содержится в выпуклой нормальной окрестности точки $\gamma(t_1)$. Рассуждая по индукции, мы можем построить вложенную последовательность сегментов $[t_{k+1}, t_{k+1}'] \subset (t_k, t_k')$, такую, что точка $\gamma(t_{k+1})$ лежит в выпуклой нормальной окрестности точки $\gamma(t_k)$ и $\gamma | [t_{k+1}, t_{k+1}']$ пересекает изотропную геодезическую $c_{k+1} \in F_1$ в точках $\gamma(t_{k+1},)$ и $\gamma(t_{k+1}')$. Более того, сегменты $[t_k, t_k']$ можно выбрать так, что $\bigcap_{k=1}^{\infty} [t_k, t_k'] = \{t_0\}$ для некоторой $t_0 \in (a, b)$. Тем самым мы построили две последовательности $t_k \uparrow t_0$ и $t_k' \downarrow t_0$, обладающие следующим свойством: времениподобная кривая $\gamma$ пересекает изотропную геодезическую семейства $F_1$ в точках

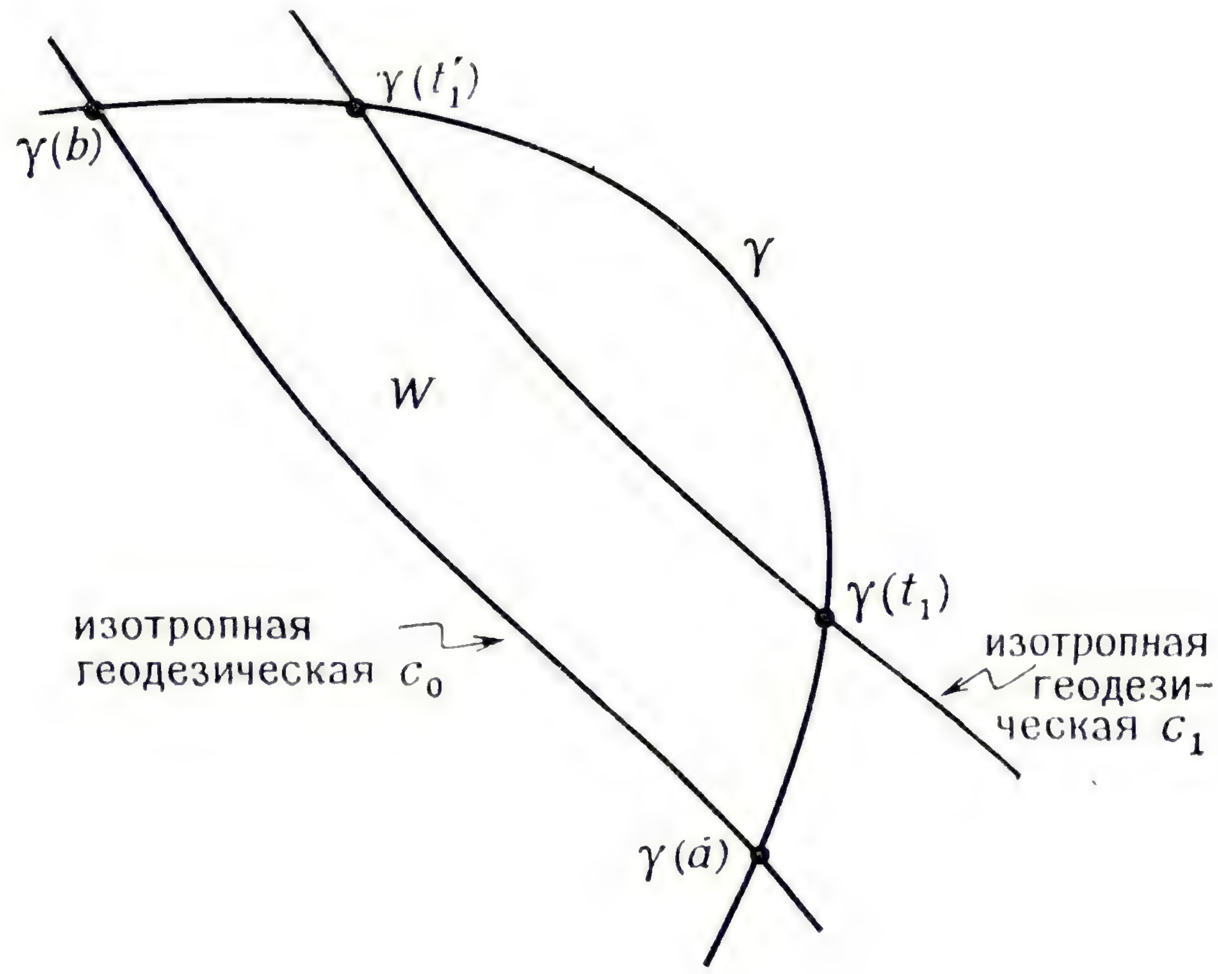



Рис. 2.7. В гомеоморфном $\mathbb{R}^2$ лоренцевом многообразии предполагается, что времениподобная кривая $\gamma$ пересекает изотропную геодезическую $c_0$ в точках $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$. Изотропная геодезическая $c_1$ входит в $W$ в точке $\gamma(t_1)$ и впервые выходит в точке $\gamma(t_1')$, $t_1' > t_1$.

$\gamma(t_k)$ и $\gamma(t_k')$ для каждого $k \geqslant 1$. Однако, согласно предложению 2.24, это невозможно. Следовательно, геодезическая $\gamma$: $[a, b] \to M$ пересекает $c_0$ самое большее в одной точке. □

**Теорема 2.30.** *Лоренцево многообразие* $(M, g)$, *гомеоморфное* $\mathbb{R}^2$, *устойчиво причинно.*

*Доказательство.* Напомним, что $g \in \mathrm{Lor}(M)$ устойчиво причинна, если существует $C^0$-окрестность $U$ метрики $g$ в $\mathrm{Lor}(M)$, такая, что все метрики в $U$ причинны. Так как сильная причинность влечет причинность, то отсюда вытекает, что все метрики в $\mathrm{Lor}(M)$ устойчиво причинны, если они сильно причинны в $\mathrm{Lor}(M)$. Поэтому теорема будет доказана, если показать, что для любой лоренцевой метрики $g$ на $M$ многообразие $(M, g)$ сильно причинно.

Предположим противное: лоренцева метрика $g$ на $M$ такова, что многообразие $(M, g)$ не является сильно причинным. Тогда найдется точка $p \in M$, в которой сильная причинность нарушается. Пусть $(U, x)$ — карта, содержащая $p$ и такая, что изотропные геодезические в $U$ лежат на множествах $x_1 = \mathrm{const}$ и $x_2 = \mathrm{const}$ (существование такой карты гарантируется леммой 2.23). Ввиду того что сильная причинность в точке $p$ нарушается, существуют произвольно малые окрестности $V$ точки $p$, $V \subset U$, и времениподобные кривые, которые начинаются в $p$, покидают $V$ и затем возвращаются в $V$. Согласно предложению 2.29, замкну-

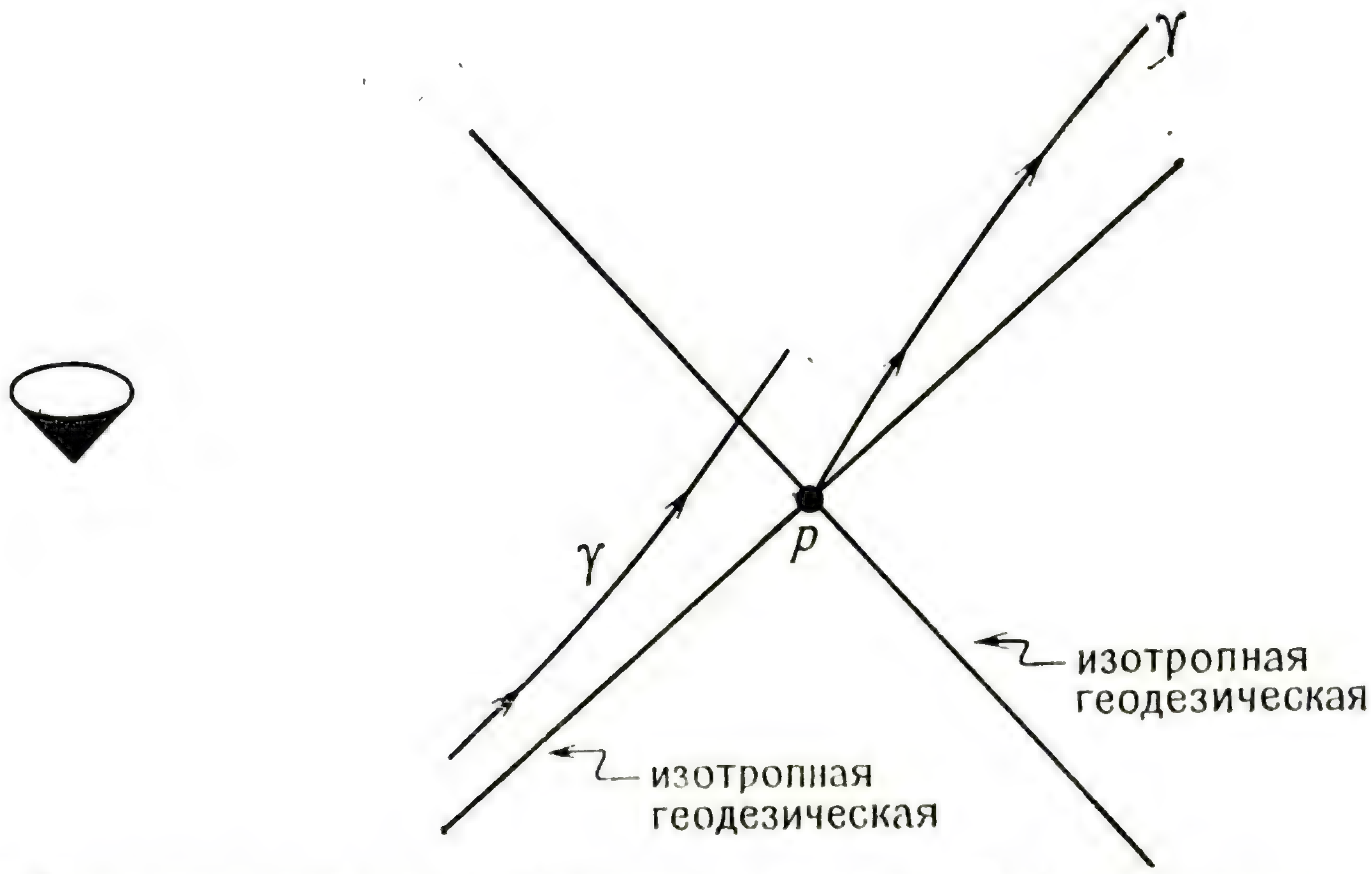



Рис. 2.8. Показано двумерное пространство-время $(M, g)$, у которого в точке $p$ нарушается сильная причинность. Существует направленная в будущее времениподобная кривая $\gamma$, которая начинается в точке $p$, возвращаясь, проходит вблизи $p$ и пересекает одну из изотропных геодезических, проходящих через $p$.

тых времениподобных кривых, проходящих через точку $p$, не существует. Поэтому, если $\gamma$, $\gamma(0) = p$, — направленная в будущее времениподобная кривая, которая покидает $V$ и затем возвращается, то $\gamma(t) \neq p$ для всех $t > 0$. Вследствие того что изотропные геодезические в $U$, проходящие через $p$, задаются в локальных координатах $x = (x_1, x_2)$ окрестности $U$ уравнениями $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, можно продеформировать $\gamma$ так, чтобы полученная кривая при возвращении в $V$ пересекала одну из изотропных геодезических, проходящих через $p$ (рис. 2.8). Следовательно, $\gamma$ пересекает изотропную геодезическую семейства $F_1$ или $F_2$ дважды, что противоречит предложению 2.29. □

**Следствие 2.31.** *Никакая лоренцева метрика на $\mathbb{R}^2$ не имеет замкнутых непространственноподобных кривых.*

Другое доказательство того, что всякое односвязное лоренцево 2-многообразие сильно причинно, можно найти у О'Нейла (1981). Что же касается случая больших размерностей, то в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, можно построить лоренцевы метрики, которые не являются хронологическими, а значит, и сильно причинными.

Каждое двумерное лоренцево многообразие $(M, g)$ имеет естественно связанное с ним лоренцево многообразие $(M, -g)$. Времениподобные кривые многообразия $(M, -g)$ являются пространственноподобными кривыми многообразия $(M, g)$, и наоборот. Полагая $M = \mathbb{R}^2$ и применяя к $(M, -g)$ следствие 2.31, получим

**Следствие 2.32.** *Никакая лоренцева метрика на $\mathbb{R}^2$ не содержит замкнутых пространственноподобных кривых.*

Если $(M, g)$ двумерно и оба многообразия $(M, g)$ и $(M, -g)$ устойчиво причинны, то, используя технику, развитую Бимом (1976а), можно доказать существование гладкого конформного множителя $\Omega$: $M \to (0, \infty)$, такого, что многообразие $(M, \Omega g)$ геодезически полно. Это приводит к следующему утверждению.

**Следствие 2.33.** *Пусть* $(M, g)$ — *лоренцево многообразие, гомеоморфное* $\mathbb{R}^2$. *Тогда существует гладкий конформный множитель* $\Omega$: $M \to (0, \infty)$, *такой, что* $(M, \Omega g)$ *геодезически полно.*

Существуют примеры двумерных пространств, никакое глобально конформное изменение которых не превращает их в непространственноподобно геодезически полные (см. разд. 5.2). Поэтому следствие 2.33 нельзя распространить на все двумерные пространства при помощи накрывающего пространства.

## 2.5. Вторая фундаментальная форма

Пусть $N$ — гладкое подмногообразие лоренцева многообразия $(M, g)$ и $i$: $N \to M$ — вложение. Отождествляя $i_{*p}(T_pN)$ с $T_pN$, можно считать $T_pN$ подпространством $T_pM$. Обозначим через $g_0 = i^*g$ симметричное тензорное поле, индуцированное на $N$. Наряду с $T_pN$ и $i_{*p}(T_pN)$ мы будем также отождествлять $g_0$ в точке $p$ и $g \mid T_pN \times T_pN$ для всех $p \in N$. Такое отождествление будет использоваться всюду в этом разделе.

**Определение 2.34.** Подмногообразие $N$ лоренцева многообразия $(M, g)$ называется *невырожденным*, если для любых точки $p \in N$ и ненулевого вектора $v \in T_pN$ существует вектор $w \in T_pN$, для которого $g(v, w) \neq 0$. Если к тому же форма $g \mid T_pN \times T_pN$ положительно определена в каждой точке $p \in N$, то $N$ называется *пространственноподобным подмногообразием*. Если же в каждой точке $p \in N$ $g \mid T_pN \times T_pN$ является лоренцевой метрикой, то $N$ называется *времениподобным подмногообразием*.

До конца этого раздела будем предполагать, что $N$ — невырожденное подмногообразие. Тем самым для каждой точки $p \in N$ подпространство $T_p^{\perp}N$ пространства $T_pM$, задаваемое формулой

$$T_p^{\perp}N = \{v \in T_pM:\ g(v, w) = 0 \text{ для всех } w \in T_pN\},$$

однозначно определено и обладает следующим свойством: $T_p^{\perp}N \cap T_pN = \{0\}$. Следовательно, однозначно определено и ортогональное проектирование $P$: $T_pM \to T_pN$. Связность $\nabla$, заданную на $(M, g)$, можно спроектировать в связность $\nabla^0$ на подмногообразии $N$, полагая по определению $\nabla_X^0 Y = P(\nabla_X Y)$, где $X$, $Y$ — векторные поля, касательные к $N$. Легко убедиться

в том, что $\nabla^0$ — единственная связность без кручения на $(N, g_0)$, удовлетворяющая равенству

$$X(g_0(Y, Z)) = g_0(\nabla^0_X Y, Z) + g_0(Y, \nabla^0_X Z)$$

для всех векторных полей $X$, $Y$, $Z$ на $N$. Вторая фундаментальная форма, измеряющая разницу между $\nabla$ и $\nabla^0$, может быть определена в точности так же, как и для римановых многообразий (см. Херман (1968, с. 319), Болтс (1977, с. 25, 51—52)).

**Определение 2.35.** Пусть $N$ — невырожденное подмногообразие $(M, g)$. Для данного вектора $n \in T_p^\perp N$ определим *вторую фундаментальную форму* $S_n$: $T_pN \times T_pN \to \mathbb{R}$ *в направлении* $n$ по следующему правилу. Продолжив векторы $x$, $y \in T_pN$ до локальных векторных полей $X$, $Y$, касательных к $N$, положим

$$S_n(x, y) = g(\nabla_X Y|_p, n) = g(\nabla_X Y|_p - \nabla^0_X Y|_p, n).$$

*Вторая фундаментальная форма* $S$: $T_p^\perp N \times T_pN \times T_pN \to \mathbb{R}$ определяется соотношением $S(n, x, y) = S_n(x, y)$. *Оператор второй фундаментальной формы* $L_n$: $T_pN \to T_pN$ определяется равенством $g(L_n(x), y) = S_n(x, y)$, где $x$, $y \in T_pN$ произвольны.

Нетрудно проверить, что определение $S_n(x, y)$ не зависит от выбора продолжений $X$, $Y$ векторов $x$, $y \in T_pN$ и что форма $S_n$: $T_pN \times T_pN \to \mathbb{R}$ симметрична, а форма $S$: $T_p^\perp N \times T_pN \times T_pN \to \mathbb{R}$ трилинейна для каждой точки $p \in N$.

**Лемма 2.36.** *Пусть $N$ — невырожденное подмногообразие $(M, g)$. Вторая фундаментальная форма $S = 0$ на $N$ тогда и только тогда, когда $\nabla_X Y = \nabla^0_X Y$ для всех векторных полей $X$, $Y$, касательных к $N$.*

*Доказательство.* Из определения 2.35 ясно, что если $\nabla_X Y = \nabla^0_X Y$ для всех векторных полей, касательных к $N$, то $S = 0$.

Полагая $S = 0$, возьмем произвольную точку $p \in N$. Тогда для всех $n \in T_p^\perp N$ и векторных полей $X$, $Y$, касательных к $N$, выполняется равенство $g(\nabla_X Y|_p - \nabla^0_X Y|_p, n) = 0$. Вследствие невырожденности $g | T_pN \times T_pN$ форма $g | T_p^\perp N \times T_p^\perp N$ также невырожденна. Поэтому векторы $\nabla_X Y|_p$ и $\nabla^0_X Y|_p$ имеют одинаковые проекции на $T_p^\perp N$. Из разложения $T_pM = T_pN \oplus T_p^\perp N$ вытекает, что $\nabla_X Y|_p = \nabla^0_X Y|_p$, как и требуется. □

Вторую фундаментальную форму можно использовать для описания вполне геодезических невырожденных подмногообразий $(M, g)$. Подмногообразие $N$ лоренцева многообразия $(M, g)$

называется *геодезическим* в точке $p \in N$, если всякая геодезическая $\gamma$ многообразия $(M, g)$, подчиненная условиям $\gamma(0) = p$ и $\gamma'(0) \in T_pN$, содержится в некоторой окрестности точки $p$ на $N$. Подмногообразие $N$ называется *вполне геодезическим*, если оно является геодезическим в каждой своей точке. Следующее предложение является лоренцевым аналогом хорошо известного риманова результата (см. Херман (1968, с. 338), Чигер и Эбин (1975, с. 23)).

**Предложение 2.37.** *Пусть $N$ — невырожденное подмногообразие $(M, g)$. Тогда $N$ вполне геодезично в том и только том случае, когда вторая фундаментальная форма $S$ обращается в нуль всюду на $N$.*

*Доказательство.* Предположим сначала, что $S = 0$ на $N$. По лемме 2.36 $\nabla_X Y = \overset{0}{\nabla}_X Y$ для любых векторных полей $X$, $Y$, касательных к $N$. Пусть $c$: $(-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ — геодезическая на $(M, g)$, причем $c'(0) = v \in T_pN$ для некоторой точки $p \in N$. Рассмотрим на $(N, g_0)$ геодезическую $\gamma$: $(-\delta, \delta) \to N$, $\gamma'(0) = v$. Вследствие равенства $\nabla_{\gamma'}\gamma' = \overset{0}{\nabla}_{\gamma'}\gamma' = 0$ кривая $\gamma$ будет геодезической и на $(M, g)$. Положим $\eta = \min(\varepsilon, \delta)$. Из того что геодезическая на $(M, g)$ с данным начальным направлением $v$ единственна, вытекает справедливость равенства $c(t) = \gamma(t)$ для любого $t \in (-\eta, \eta)$. Следовательно, $c \mid (-\eta, \eta) \subset N$, как и требовалось.

Обратно, предположим, что $N$ — вполне геодезическое подмногообразие $(M, g)$. Пусть $p \in N$ — произвольная точка, $n \in T_p^{\perp}N$ и $x \in T_pN$. Пусть далее $c$: $J \to N$ — геодезическая (и в $M$, и в $N$), у которой $c'(0) = x$. Продолжим $c'(t)$ до векторного поля $X$, касательного к $N$ вблизи точки $p$. Тогда форма $S(n, x, x) = g(\nabla_X X|_p, n) = g(\nabla_{c'}c'(0), n) = g(0, n) = 0$. Полярная ей билинейная форма $S(n, x, y) = 0$ для всех $x, y \in T_pN$. Тем самым $S = 0$ на $N$. □

Как мы увидим в гл. 11, вторая фундаментальная форма играет важную роль в теории сингулярностей общей теории относительности.

## 2.6. Искривленные произведения

Пусть $(M, g)$ и $(H, h)$ — римановы многообразия. На произведении многообразий $M \times H$ существует естественное произведение метрик $g_0$, такое, что $(M \times H, g_0)$ — вновь риманово многообразие. Бишоп и О'Нейл (1969) изучили больший класс римановых многообразий, включающий произведения, которые они назвали *искривленными*. Если $(M, g)$ и $(H, h)$ — римановы многообразия и $f$: $M \to (0, \infty)$ — некоторая гладкая функция, то

произведение многообразий $M \times H$, снабженное метрикой $g \oplus f h$, называется *искривленным произведением*, а $f$: $M \to (0, \infty)$ называется *искривляющей функцией*. Следуя Бишопу и О'Нейлу, будем обозначать риманово многообразие $(M \times H, g \oplus f h)$ через $M \times_f H$. Бишоп и О'Нейл (1969, с. 23) показали, что $M \times_f H$ является полным римановым многообразием тогда и только тогда, когда оба римановых многообразия $(M, g)$ и $(H, h)$ полны. При помощи этого результата им удалось, используя искривленные произведения, построить широкий класс полных римановых многообразий со всюду отрицательной секционной кривизной.

В этом разделе мы применим искривленные произведения для построения лоренцевых многообразий; затем мы изучим причинную структуру и свойства полноты построенного нами класса лоренцевых многообразий. Эта теория для лоренцевых многообразий несколько отличается от соответствующей теории для риманова случая вследствие того, что произведение двух лоренцевых многообразий $(M, g)$ и $(H, h)$ имеет сигнатуру $(-, -, +, \ldots, +)$ и, значит, не является лоренцевым многообразием. Тем не менее лоренцевы метрики искривленных произведений построить можно, используя для этого в качестве сомножителей лоренцево и риманово многообразия. Эту конструкцию можно применить, в частности, для построения примеров биинвариантных лоренцевых метрик для групп Ли (см. разд. 4.5). Исследование искривленных произведений псевдоримановых (не обязательно лоренцевых) многообразий, включающее вычисление их тензоров кривизны Римана и Риччи, проведено О'Нейлом (1981).

Всюду в этом разделе через $\pi$: $M \times H \to M$ и $\eta$: $M \times H \to H$ будут обозначаться отображения проектирования, задаваемые следующими формулами: $\pi(m, b) = m$ и $\eta(m, b) = b$ для $(m, b) \in M \times H$ соответственно.

**Определение 2.38.** Пусть $(M, g)$ есть $n$-мерное многообразие $(n \geqslant 1)$ с сигнатурой $(-, +, \ldots, +)$ и $(H, h)$ — риманово многообразие. Пусть далее $f$: $M \to (0, \infty)$ — гладкая функция. *Лоренцевым искривленным произведением* $M \times_f H$ называется многообразие, которое оснащено лоренцевой метрикой $\bar{g}$, определяемой по следующему правилу:

$$\bar{g}(v, w) = g(\pi_* v, \pi_* w) + f(\pi(\bar{p}))\, h(\eta_* v, \eta_* w),$$

где $\bar{p} \in \bar{M} = M \times H$, $v$, $w \in T_{\bar{p}}\bar{M}$.

**Определение 2.39.** Искривленное произведение $M \times_f H$ с $f = 1$ будем называть *лоренцевым произведением* и обозначать через $M \times H$.

**Замечание 2.40.** Лоренцевы многообразия можно получать также путем рассмотрения искривленных произведений вида

$H \times_f M$, где $(H, \mathrm{h})$ — риманово многообразие, $(M, g)$ — лоренцево многообразие и $f: H \to (0, \infty)$ — гладкая функция. Универсальное накрывающее многообразие пространства-времени де Ситтера 2-го рода (см. разд. 4.3) представляет собой важный в общей теории относительности пример пространства-времени, которое можно записать в виде искривленного произведения $H \times_f M$, где $H$ — риманово, а $M$ — лоренцево многообразия, но которое нельзя записать в виде искривленного произведения $M \times_f H$ из определения 2.38. Тем не менее в этой книге мы ограничимся рассмотрением только искривленных произведений вида $M \times_f H$.

Изучение причинных свойств искривленных произведений мы начнем со следующей леммы.

**Лемма 2.41.** *Искривленное произведение $M \times_f H$ многообразий $(M, g)$ и $(H, \mathrm{h})$ можно ориентировать во времени тогда и только тогда, когда либо $(M, g)$ ориентировано во времени (если* $\dim M \geqslant 2$), *либо $(M, g)$ — одномерное многообразие с отрицательно определенной метрикой.*

*Доказательство.* Предположим, что $M \times_f H$ ориентировано во времени. Рассмотрим сначала случай, когда $\dim M \geqslant 2$.

Вследствие того что $M \times_f H$ ориентировано во времени, на $M \times_f H$ существует непрерывное времениподобное векторное поле $X$. Так как $f > 0$ и $\mathrm{h}$ — положительно определенная метрика, то $g(\pi_* X, \pi_* X) = \bar{g}(X, X) < 0$. Тем самым векторное поле $\pi_* X$ задает на $(M, g)$ ориентацию во времени.

Обратно, допустим, что $\dim M \geqslant 2$ и $(M, g)$ ориентировано во времени посредством времениподобного векторного поля $V$. Тогда $V$ можно поднять до времениподобного векторного поля $\bar{V}$ на $M \times H$, удовлетворяющего двум условиям: $\pi_* \bar{V} = V$ и $\eta_* \bar{V} = 0$. Именно для любого фиксированного $\bar{p} = (m, b) \in M \times H$ существует естественный изоморфизм

$$T_{\bar{p}}(M \times_f H) = T_{\bar{p}}(M \times H) \cong T_m M \times T_b H.$$

Используя этот изоморфизм для отождествления $T_p(M \times H)$ и $T_m M \times T_b H$, можно определить $\bar{V}$ в $\bar{p}$, полагая $\bar{V}(\bar{p}) = (V(m), 0)$. Из определения 2.38 немедленно следует, что $\bar{g}(\bar{V}, \bar{V}) = g(V, V) < 0$. Поэтому $\bar{V}$ ориентирует $M \times_f H$ во времени, что и требовалось.

Рассмотрим теперь случай $\dim M = 1$. Известно, что тогда $M$ диффеоморфно либо $S^1$, либо $\mathbb{R}$. Если $\dim M = 1$, то по определению 2.38 $(M, g)$ имеет отрицательно определенную метрику. Пусть $T$ — гладкое векторное поле на $M$, такое, что $g(T, T) = -1$. Определяя $\bar{T}(\bar{p}) = (T(\pi(\bar{p})), 0_{\eta(\bar{p})})$, как и выше,

имеем $\eta_* \overline{T} = 0$, так что $\overline{T}$ ориентирует $\overline{M}$ во времени. Заметим также, что в случае, когда $M = S^1$, интегральные кривые поля $\overline{T}$ на $\overline{M}$ являются замкнутыми времениподобными кривыми. Поэтому $\overline{M}$ не хронологическое. □

**Лемма 2.42.** *Пусть* $(H, \mathrm{h})$ — *произвольное риманово многообразие, а на* $M = (a, b)$, *где* $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, *задана отрицательно определенная метрика* $-dt^2$. *Тогда для любой гладкой функции* $f$: $M \to (0, \infty)$ *искривленное произведение* $(M \times_f H, \overline{\mathrm{g}})$ *устойчиво причинно.*

*Доказательство.* В качестве временнóй функции можно взять отображение проектирования $\pi$: $M \times H \to M \subset \mathbb{R}$. □

Из приведенной на рис. 2.3 таблицы условий причинности получаем следующее утверждение.

**Следствие 2.43.** *Пусть* $(H, \mathrm{h})$ — *произвольное риманово многообразие и* $M$ — *интервал* $(a, b)$, *где* $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, *с заданной на нем отрицательно определенной метрикой* $-dt^2$. *Тогда для любой гладкой функции* $f$: $M \to (0, \infty)$ *искривленное произведение* $(M \times_f H, \overline{\mathrm{g}})$ *является хронологическим, причинным, различающим и сильно причинным.*

В приведенном выше доказательстве леммы 2.41 мы видели, что если $M = S^1$, то $(S^1 \times_f H, \overline{\mathrm{g}})$ не может быть хронологическим, а отсюда и причинным, различающим или сильно причинным.

Составим перечень некоторых элементарных свойств искривленных произведений, непосредственно вытекающих из определения 2.38. *Гомотетией* $F$: $(M_1, \mathrm{g}_1) \to (M_2, \mathrm{g}_2)$ называется такой диффеоморфизм, что $F^* (\mathrm{g}_2) = c\mathrm{g}_1$ для некоторой постоянной $c$. Заметим, что некоторые авторы требуют от гомотетичных отображений только гладкости, опуская взаимную однозначность.

**Замечание 2.44.** Пусть $M \times_f H$ — лоренцево искривленное произведение. Тогда

(а) для каждой точки $b \in H$ ограничение $\pi \mid \eta^{-1} (b)$: $\eta^{-1} (b) \to M$ является изометрией $\eta^{-1} (b)$ на $M$.

(б) для каждой точки $m \in M$ ограничение $\eta \mid \pi^{-1} (m)$: $\pi^{-1} (m) \to H$ является отображением гомотетии $\pi^{-1} (m)$, при этом коэффициент гомотетии равен $1/f (m)$.

(в) Если $v \in T (M \times H)$, то $\mathrm{g} (\pi_* v, \pi_* v) \leqslant \overline{\mathrm{g}} (v, v)$. Поэтому отображение $\pi_*$: $T_p (M \times H) \to T_{\pi(p)} M$ переводит непространственноподобные векторы в непространственноподобные векторы, а отображение $\pi$ переводит непространственноподобные кривые в $M \times_f H$ в непространственноподобные кривые в $M$.

(г) Отображение $\pi$ не уменьшает длин непространственноподобных кривых вследствие того, что $|g(\pi_* v, \pi_* v)| \geqslant |\bar{g}(v, v)|$, если $v \in T(M \times H)$ — непространственноподобный вектор (см. разд. 3.1, формулу (3.1), где определяется лоренцева длина дуги).

(д) Для каждой точки $(m, b) \in M \times H$ подмногообразия $\pi^{-1}(m)$ и $\eta^{-1}(b)$ многообразия $M \times_f H$ являются невырожденными в смысле определения 2.34.

е) Если $\varphi$: $H \to H$ — изометрия, то отображение $\Phi = 1 \times \times \varphi$: $M \times_f H \to M \times_f H$, задаваемое формулой $\Phi(m, b) = (m, \varphi(b))$, также является изометрией $M \times_f H$.

(ж) Если $\psi$: $M \to M$ — изометрия $M$, для которой $f \circ \psi = f$, то отображение $\Psi = \psi \times 1$: $M \times_f H \to M \times_f H$, задаваемое формулой $\Psi(m, b) = (\psi(m), b)$, является изометрией $M \times_f H$. Поэтому, если $X$ — векторное поле Киллинга на $M$ (т. е. $L_X g = 0$), подчиненное условию $X(f) = 0$, то естественное поднятие $\overline{X}$ на $M \times_f H$ поля $X$, задаваемое формулой $\overline{X}(p) = (X(\pi(p)), 0_{\eta(p)})$, является векторным полем Киллинга на $M \times_f H$.

**Лемма 2.45.** *Пусть $M \times_f H$ — лоренцево искривленное произведение. Тогда для каждой точки $b \in H$ слой $\eta^{-1}(b)$ вполне геодезичен.*

*Доказательство.* Из того, что отображение $\pi$: $M \times_f H \to M$ не уменьшает длин непространственноподобных кривых, а также из того, что непространственноподобные геодезические локально максимизируют длину, вытекает, что любая непространственноподобная геодезическая слоя $\eta^{-1}(b)$ (в метрике, индуцированной включением $\eta^{-1}(b) \subset M \times_f H$) является геодезической в объемлющем многообразии $M \times_f H$. Поэтому вторая фундаментальная форма обращается в нуль на всех непространственноподобных векторах в $T(\eta^{-1}(b))$. Из того, что любой касательный вектор из $T(\eta^{-1}(b))$ можно записать в виде линейной комбинации непространственноподобных векторов из $T(\eta^{-1}(b))$, вытекает, что вторая фундаментальная форма обращается в нуль тождественно. Отсюда и из предложения 2.37 следует, что слой $\eta^{-1}(b)$ является вполне геодезическим. □

Ввиду следствия 2.43 мы можем теперь ограничить наше внимание изучением основных причинных свойств ориентированных во времени лоренцевых искривленных произведений $(M \times_f H, \bar{g})$, у которых $\dim M \geqslant 2$.

**Лемма 2.46.** *Пусть $p = (p_1, p_2)$ и $q = (q_1, q_2)$ — точки из $M \times_f H$, связанные отношением $p \ll q$ (соответственно $p \leqslant q$) в $(M \times_f H, \bar{g})$. Тогда $p_1 \ll q_1$ (соответственно $p_1 \leqslant q_1$) в $(M, g)$.*

*Доказательство.* Если $\gamma$ — направленная в будущее времениподобная (соответственно непространственноподобная) кривая

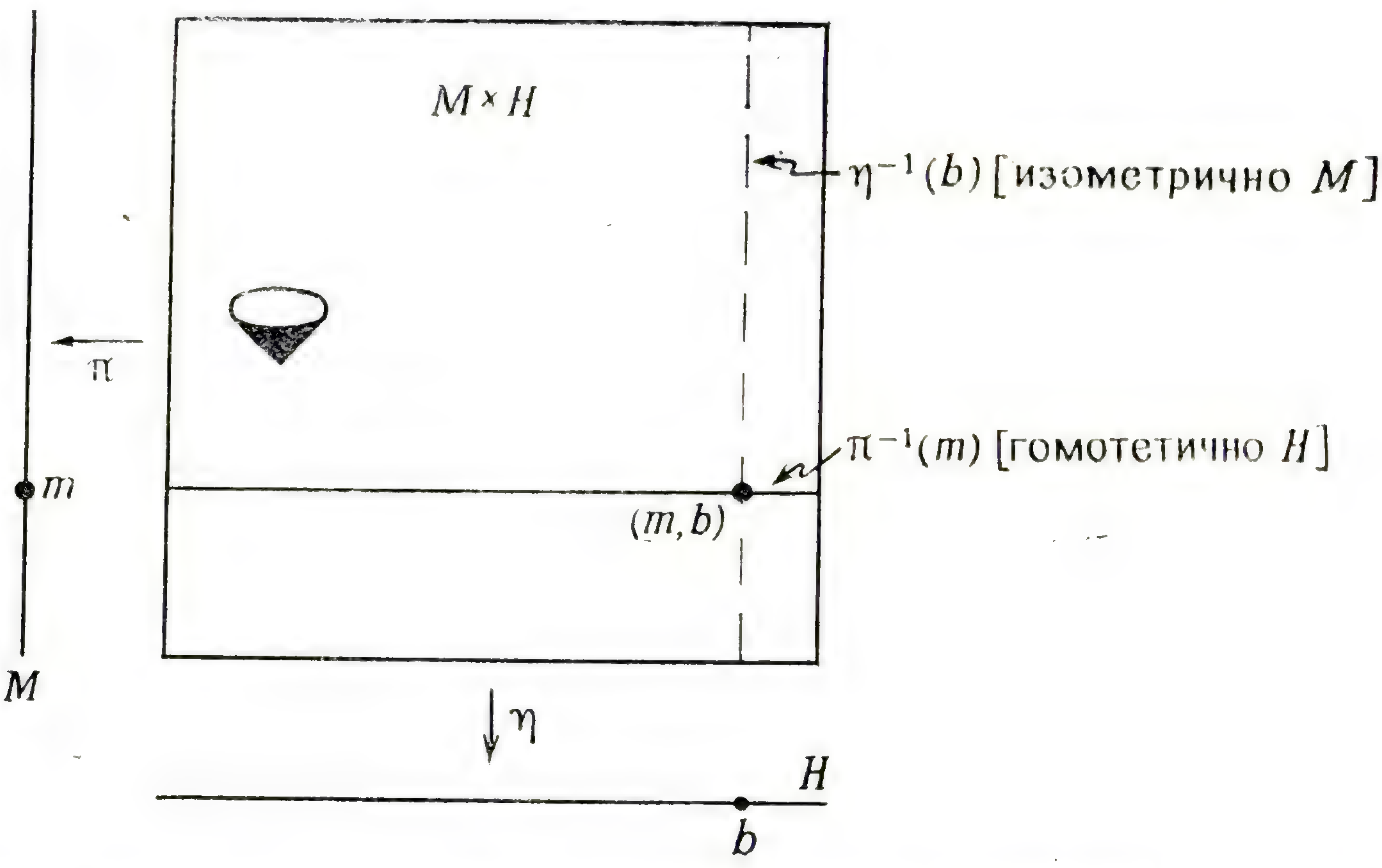



Рис. 2.9. Пусть $(m, b)$ — точка искривленного произведения $M \times_f H$. Тогда ограничение отображения проектирования $\pi$ на $\eta^{-1}(b)$ является изометрией на $M$, а ограничение отображения проектирования $\eta$ на $\pi^{-1}(m)$ — гомотетией на $H$.

в $M \times_f H$, идущая из $p$ в $q$, то $\pi \circ \gamma$ является направленной в будущее времениподобной (соответственно непространственноподобной) кривой в $M$, идущей из $p_1$ в $q_1$. □

Хотя отображение $\pi$: $M \times_f H \to M$ и переводит непространственноподобные кривые в непространственноподобные кривые, оно не сохраняет изотропных кривых. В самом деле, из определения 2.38 вытекает, что если $\gamma$ — произвольная гладкая изотропная кривая, у которой $\eta_*\gamma(t) \neq 0$ для всех $t$, то $g(\pi_*\gamma(t), \pi_*\gamma(t)) < 0$ для всех $t$.

Для случая, когда точки $p$ и $q$ расположены в одном слое $\eta^{-1}(b)$ произведения $M \times_f H$, лемма 2.46 может быть усилена в следующем направлении.

**Лемма 2.47.** *Если точки $p = (p_1, b)$ и $q = (q_1, b)$ расположены в одном и том же слое $\eta^{-1}(b)$ произведения $M \times_f H$, то $p \ll q$ (соответственно $p \leqslant q$) в $(M \times_f H, \bar{g})$ тогда и только тогда, когда $p_1 \ll q_1$ (соответственно $p_1 \leqslant q_1$) в $(M, g)$.*

*Доказательство.* В силу леммы 2.46 остается только показать, что если $p_1 \ll q_1$ (соответственно $p_1 \leqslant q_1$) в $(M, g)$, то $p \ll q$ (соответственно $p \leqslant q$) в $(M \times_f H, \bar{g})$. Но если $\gamma_1$: $[0, 1] \to M$ — направленная в будущее времениподобная (соответственно непространственноподобная) кривая в $M$, идущая из $p_1$ в $q_1$, то $\gamma(t) = (\gamma_1(t), b)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — направленная в будущее времениподобная (соответственно непространственноподобная) кривая в $M \times_f H$, идущая из $p$ в $q$. □

Из леммы 2.47 вытекает, что каждый слой $\eta^{-1}(b)$, $b \in H$, имеет те же хронологию и причинность, что и $(M, g)$. В частности, леммы 2.46 и 2.47 позволяют сформулировать следующий результат: $(M \times_f H, \bar{g})$ обладает замкнутой времениподобной (соответственно непространственноподобной) кривой тогда и только тогда, когда $(M, g)$ имеет замкнутую времениподобную (соответственно непространственноподобную) кривую. Отсюда вытекает

**Предложение 2.48.** *Пусть $(M, g)$ — пространство-время и $(H, h)$ — риманово многообразие. Тогда лоренцево искривленное произведение $(M \times_f H, \bar{g})$ является хронологическим (соответственно причинным) в том и только том случае, когда $(M, g)$ хронологично (соответственно причинно).*

Аналогичный результат имеет место и для сильной причинности.

**Предложение 2.49.** *Пусть $(H, g)$ — пространство-время и $(H, h)$ — риманово многообразие. Тогда лоренцево искривленное произведение $(M \times_f H, \bar{g})$ является сильно причинным в том и только том случае, когда $(M, g)$ сильно причинно.*

*Доказательство.* Покажем сначала, что если $(M, g)$ не является сильно причинным в точке $p_1$, то $(M \times_f H, \bar{g})$ не является сильно причинным в $p = (p_1, b)$ для любой точки $b \in H$. В силу того что в точке $p_1$ сильная причинность $(M, g)$ нарушается, можно указать открытую окрестность $U_1$ точки $p_1$ в $M$ и последовательность $\{\gamma_k : [0, 1] \to M\}$ направленных в будущее непространственноподобных кривых, такие, что $\gamma_k(0) \to p_1$, $\gamma_k(1) \to p_1$ при $k \to \infty$, но $\gamma_k(1/2) \notin U_1$ для всех $k$. Определим последовательность $\sigma_k : [0, 1] \to M \times H$, положив $\sigma_k(t) = (\gamma_k(t), b)$. Рассмотрим в $M \times H$ множество $U = U_1 \times V_1$, где $V_1$ — произвольная открытая окрестность точки $b$ в $H$. Множество $U$ представляет собой открытую окрестность точки $p = (p_1, b)$ в $M \times_f H$, а $\sigma_k$ — последовательность направленных в будущее непространственноподобных кривых в $M \times_f H$, у которых $\sigma_k(0) \to p$, $\sigma_k(1) \to p$ при $k \to \infty$, но $\sigma_k(1/2) \notin H$ для всех $k$. Поэтому $(M \times_f H, \bar{g})$ не может быть сильно причинным в точке $p$.

Обратно, предположим, что сильная причинность нарушается в точке $p = (p_1, q_1)$ искривленного произведения $(M \times_f H, \bar{g})$. Пусть $(x_1, \ldots, x_i)$ — локальные координаты на $M$ вблизи $p_1$, такие, что в точке $p_1$ метрика $g$ имеет вид $\mathrm{diag}\{-1, +1, \ldots, +1\}$, а $(x_{i+1}, \ldots, x_n)$ — локальные координаты на $H$ вблизи $q_1$, такие, что в точке $q_1$ $f\mathrm{h}$ имеет вид $\mathrm{diag}\{+1, \ldots, +1\}$. Тогда $(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ — локальные координаты на $M \times_f H$ вблизи точки $p$. Кроме того, $F_1 = x_1$ и $F_2 = x_1 \circ \pi$ являются (локально опреде-

ленными) временны́ми функциями для $M$ вблизи $p_1$ и для $M \times_f H$ вблизи $p$ соответственно. Нарушение сильной причинности в точке $p$ означает, что существует последовательность направленных в будущее непространственноподобных кривых $\gamma_k : [0, 1] \to M \times_f H$, обладающих следующим свойством: $\gamma_k(0) \to p$ и $\gamma_k(1) \to p$ при $k \to \infty$, но $F_2(\gamma_k(1/2)) \geqslant \varepsilon > 0$ для некоторой параметризации $\gamma_k$, $k$ любое. Выберем окрестность $W$ точки $p_1$ в $M$ так, чтобы в $W$ можно было ввести локальные координаты $(x_1, \ldots, x_i)$, как и выше, и $\sup \{F_1(r) : r \in W\} \leqslant \varepsilon/2$. Тогда $\pi \circ \gamma_k$ являются направленными в будущее непространственноподобными кривыми в $M$, для которых выполнены следующие соотношения: $\pi \circ \gamma_k(0) \to p_1$, $\pi \circ \gamma_k(1) \to p_1$ и $\pi \circ \gamma_k(1/2) \in W$. Возможность построения $W$ и $\{\pi \circ \gamma_k\}$, обладающих указанными свойствами, показывает, что сильная причинность $(M, g)$ нарушается в точке $p$, как и требовалось. □

В предложении 2.51 мы докажем эквивалентность устойчивой причинности многообразий $(M \times_f H, \bar{g})$ и $(M, g)$ в случае, когда $\dim M \geqslant 2$. Из этого и последних двух предложений вытекает, что основные причинные свойства $(M \times_f H, \bar{g})$ определяются соответствующими свойствами $(M, g)$.

Прежде чем приступить к рассмотрению предложения 2.51, сформулируем следующее замечание.

**Замечание 2.50.** Если $g < g_1$ на $M$, то существует гладкий конформный множитель $\Omega : M \to (0, \infty)$, такой, что $\Omega g_1(v, v) < g(v, v)$ для всех ненулевых векторов, непространственноподобных относительно метрики $g$.

**Предложение 2.51.** *Пусть* $(M, g)$ — *пространство-время и* $(H, h)$ — *риманово многообразие. Тогда лоренцево искривленное произведение* $(M \times_f H, \bar{g})$ *является устойчиво причинным в том и только том случае, когда* $(M, g)$ *устойчиво причинно.*

*Доказательство.* При доказательстве мы будем пользоваться отождествлением $T_p(M \times H) \cong T_{p_1}M \times T_bH$ для всех $p = (p_1, b) \in M \times H$.

Предполагая, что $(M \times_f H, \bar{g})$ устойчиво причинно, получаем, что существует метрика $\bar{g}_1 \in \mathrm{Lor}(M \times H)$, такая, что $\bar{g} < \bar{g}_1$ и $\bar{g}_1$ причинна. Если $b$ — фиксированная точка в $H$, то без потери общности можно считать, что $\bar{g}_1 \mid \eta^{-1}(b)$ невырожденна (вследствие невырожденности $\bar{g} \mid \eta^{-1}(b)$). Полагая $\tilde{g}_1 = \bar{g}_1 \mid \eta^{-1}(b)$ и используя $\pi \mid \eta^{-1}(b)$ для отождествления $\eta^{-1}(b)$ с $M$, получим метрику $g_1 \in \mathrm{Lor}(M)$, такую, что $\pi \mid \eta^{-1}(b)$ является изометрией

$(\eta^{-1}(b), \tilde{g}_1)$ на $(M, g_1)$. Заметим, что в силу причинности $(M \times H, \bar{g}_1)$ пространство-время $(\eta^{-1}(b), \tilde{g}_1)$, а отсюда и $(M, g_1)$ являются причинными. Чтобы доказать справедливость отношения $g < g_1$ на $M$, выберем ненулевой вектор $v_1 \in T_{p_1}M$ так, чтобы $g(v_1, v_1) \leqslant 0$. Обозначив через $0_b$ нулевой вектор в $T_bH$, получаем, что $\bar{g}(v, v) = g(v_1, v_1) \leqslant 0$, где $v = (v_1, 0_b) \in T_{p_1}M \times T_bH$. Из того, что $\bar{g} < \bar{g}_1$, вытекает $\bar{g}_1(v, v) = g_1(v_1, v_1) < 0$. Отсюда следует, что $g < g_1$ и $(M, g)$ устойчиво причинно.

Обратно, предположим теперь, что $(M, g)$ устойчиво причинно. Пусть $g_1 \in \mathrm{Lor}(M)$ — причинная метрика, удовлетворяющая условию $g < g_1$. Согласно замечанию 2.50, можно считать, что $g_1(v_1, v_1) < g(v_1, v_1)$ для всех векторов $v_1 \neq 0$, непространственноподобных относительно метрики $g$. Так как предложение 2.48 позволяет утверждать, что $\bar{g}_1 = g_1 \oplus f\mathrm{h}$ — причинная метрика на $M \times H$, то достаточно показать, что $\bar{g} < \bar{g}_1$. Пусть $v = (v_1, v_2)$ — ненулевой вектор в касательном пространстве $T_p(M \times H)$, являющийся непространственноподобным относительно метрики $\bar{g}$. Тогда вследствие неравенств $\bar{g}(v, v) = g(v_1, v_1) + f(\pi(v))\,\mathrm{h}(v_2, v_2) \leqslant 0$ и $f(\pi(v))\,\mathrm{h}(v_2, v_2) > 0$ и (последнее выполняется при $v_2 \neq 0$) из нетривиальности $v$ получаем, что $v_1 \neq 0$ и $g(v_1, v_1) \leqslant 0$. Поэтому $\bar{g}_1(v, v) = g_1(v_1, v_1) + f(\pi(v))\,\mathrm{h}(v_2, v_2) < g(v_1, v_1) + f(\pi(v))\,\mathrm{h}(v_2, v_2) \leqslant 0$. Полученное неравенство доказывает справедливость отношения $\bar{g} < \bar{g}_1$ и всего утверждения. □

Теорема расщепления Герока (см. теорему 2.13) гарантирует, что любое глобально гиперболическое пространство-время можно представить в виде топологического произведения $\mathbb{R} \times S$, где $S$ — гиперповерхность Коши. Результат Герока подсказывает, какие условия следует наложить на $(M, g)$ и на $(H, \mathrm{h})$ для того, чтобы искривленное произведение $(M \times_f H, \bar{g})$ было глобально гиперболично. Эти условия приведены в теореме 2.53 (для $\dim M = 1$) и в теореме 2.55 (для $\dim M \geqslant 2$). Чтобы доказать эти теоремы, необходимо показать сначала, что в полном римановом пространстве непродолжаемая в одном направлении кривая должна иметь бесконечную длину.

**Лемма 2.52.** *Пусть $(H, \mathrm{h})$ — полное риманово многообразие. Если $\gamma : [0, 1) \to H$ — кривая конечной длины в $(H, \mathrm{h})$, то найдется точка $p \in H$, такая, что $\gamma(t) \to p$ при $t \to 1^-$.*

*Доказательство.* Обозначим через $d_0$ риманову функцию расстояния, индуцированную на $H$ римановой метрикой $\mathrm{h}$. Пусть $L = L_0(\gamma)$ — риманова длина дуги кривой $\gamma$ и $K = \{q \in H : d_0(\gamma(0), q) \leqslant L\}$. Из теоремы Хопфа—Ринова (см. Хикс

(1965), с. 163—164)) вытекает, что множество $K$ компактно. Зафиксируем в $[0, 1)$ последовательность $\{t_n\}$, сходящуюся к 1, $t_n \to 1$. В силу неравенства $d(\gamma(0), \gamma(t)) \leqslant L(\gamma \mid [0, t]) \leqslant L$, справедливого для всех $t \in [0, 1)$, имеем $\gamma[0, 1) \subset K$. Вследствие компактности $K$ последовательность $\{\gamma(t_n)\}$ имеет предельную точку $p \in K$. Если $\lim\limits_{t \to 1^-} \gamma(t) \neq p$, то тогда должно существовать $\varepsilon > 0$, такое, что $\gamma$ покидает шар $\{m \in M : d(p, m) \leqslant \varepsilon\}$ бесконечное число раз. Но это приводило бы к тому, что $\gamma$ имеет бесконечную длину, что противоречит условию. □

Формулируемую ниже теорему можно получить из следствия 2.43 и леммы 2.52. Ее доказательство аналогично доказательству теоремы 2.55 и потому будет опущено.

**Теорема 2.53.** *Пусть* $(H, h)$ — *риманово многообразие, а* $M = (a, b)$, *где* $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, *наделено отрицательно определенной метрикой* $-dt^2$. *Тогда лоренцево искривленное произведение* $(M \times_f H, \bar{g})$ *является глобально гиперболическим в том и только том случае, когда* $(H, h)$ *полно.*

Теорему 2.53 можно рассматривать как «метрическое обращение» теоремы расщепления Герока. В случае, если $f = 1$, так что искривленное произведение $(M \times_f H, \bar{g})$ является просто метрическим произведением $(M \times H, g \oplus h)$, теорему 2.53 можно усилить, включив и геодезическую полноту (определение геодезической полноты см. в определении 5.2).

**Теорема 2.54.** *Пусть* $(H, h)$ — *риманово многообразие. Предположим, что на произведении* $\mathbb{R} \times H$ *задана лоренцева метрика* $-dt^2 \oplus h$. *Тогда следующие три утверждения равносильны:*

(а) $(H, h)$ — *геодезически полное.*
(б) $(\mathbb{R} \times H, -dt^2 \oplus h)$ — *геодезически полное.*
(в) $(\mathbb{R} \times H, -dt^2 \oplus h)$ — *глобально гиперболическое.*

*Доказательство.* Из теоремы 2.53 нам известно, что (а) выполняется или не выполняется одновременно с (в). Поэтому остается показать равносильность (а) и (б). Но она является следствием того факта, что все геодезические произведения $\mathbb{R} \times H$ имеют (с точностью до параметризации) либо вид $(\lambda t, c(t))$, $(\lambda_0, c(t))$, либо вид $(\lambda t, b_0)$, где $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ — постоянные, $b_0 \in H$, а $c : J \to H$ — нормальная геодезическая в $H$. □

Предположим, что пространство-время $(M, g)$ размерности $\geqslant 3$ имеет всюду неотрицательную непространственноподобную кривизну Риччи и удовлетворяет «типовому условию»: все непродолжаемые непространственноподобные геодезические содержат точку, в которой кривизна отлична от нуля (см. определение 11.7,

где дается точная фромулировка типового условия). Тогда, если пространство-время $(M, g)$ имеет компактную поверхность Коши, то оно геодезически неполно. Поэтому для произвольных искривленных произведений усиление теоремы 2.53 за счет геодезической полноты (как в теореме 2.54) невозможно. Космологические модели «большого взрыва» Робертсона—Уокера (см. разд. 4.4) являются примерами глобально гиперболических искривленных произведений, которые геодезически не полны.

С другой стороны, пусть $(\mathbb{R} \times H, -dt^2 \oplus h)$ — пространство-время вида, рассматриваемого в теореме 2.54. Зафиксируем точку $b_0 \in H$. Тогда $\gamma(t) = (t, b_0)$ является времениподобной геодезической, у которой $R(\gamma'(t), v) = 0$ для всех $v \in T_{\gamma(t)}(\mathbb{R} \times H)$ и любых $t \in \mathbb{R}$. Поэтому $(\mathbb{R} \times H, -dt^2 \oplus h)$ не может удовлетворять типовому условию.

Если $\dim M = 1$ и $M$ гомеоморфно $\mathbb{R}$, мы можем дать необходимые и достаточные условия для того, чтобы искривленное произведение $M \times_f H$ было глобально гиперболическим (см. теорему 2.53). Если же $M = S^1$, то, как мы отметили выше, $(M \times_f H, \bar{g})$ не является хронологическим вне зависимости от того, какая риманова метрика $h$ выбрана на $H$. Поэтому никакое искривленное произведение $(S^1 \times_f H, \bar{g})$ не может быть глобально гиперболическим пространством-временем.

Рассмотрим теперь случай $\dim M \geqslant 2$.

**Теорема 2.55.** *Пусть $(M, g)$ — пространство-время и $(H, h)$ — риманово многообразие. Тогда лоренцево искривленное произведение $(M \times_f H, \bar{g})$ является глобально гиперболическим в том и только том случае, когда одновременно выполнены следующие условия:*

(а) $(M, g)$ — *глобально гиперболическое.*

(б) $(H, h)$ — *полное риманово многообразие.*

*Доказательство.* ($\Rightarrow$) Предположим сначала, что $(M \times_f H, \bar{g})$ является глобально гиперболическим. Фиксируя $b \in H$, можно отождествить $(M, g)$ с замкнутым подмногообразием $\eta^{-1}(b) = M \times \{b\}$ вследствие того, что отображение проектирования $\pi : \eta^{-1}(b) \to M$ является изометрией. Из леммы 2.47 вытекает, что при таком отождествлении множество $J^+(p_1) \cap J^-(q_1)$ в $M$ соответствует множеству $\eta^{-1}(b) \cap J^+((p_1, b)) \cap J^-((q_1, b))$ в $M \times_f H$ для любых $p_1, q_1 \in M$. Так как $\eta^{-1}(b)$ замкнуто, а $(M \times_f H, \bar{g})$ глобально гиперболично, то $\eta^{-1}(b) \cap J^+((p_1, b)) \cap J^-((q_1, b))$ компактно в $M \times_f H$. Отсюда следует, что $J^+(p_1) \cap J^-(q_1)$ компактно в $M$. Так как $(M \times_f H, \bar{g})$ глобально гиперболично, то оно также и сильно причинно. Тем самым, согласно предложению 2.49, $(M, g)$ сильно причинно. Значит, $(M, g)$ глобально гиперболично, как и требовалось.

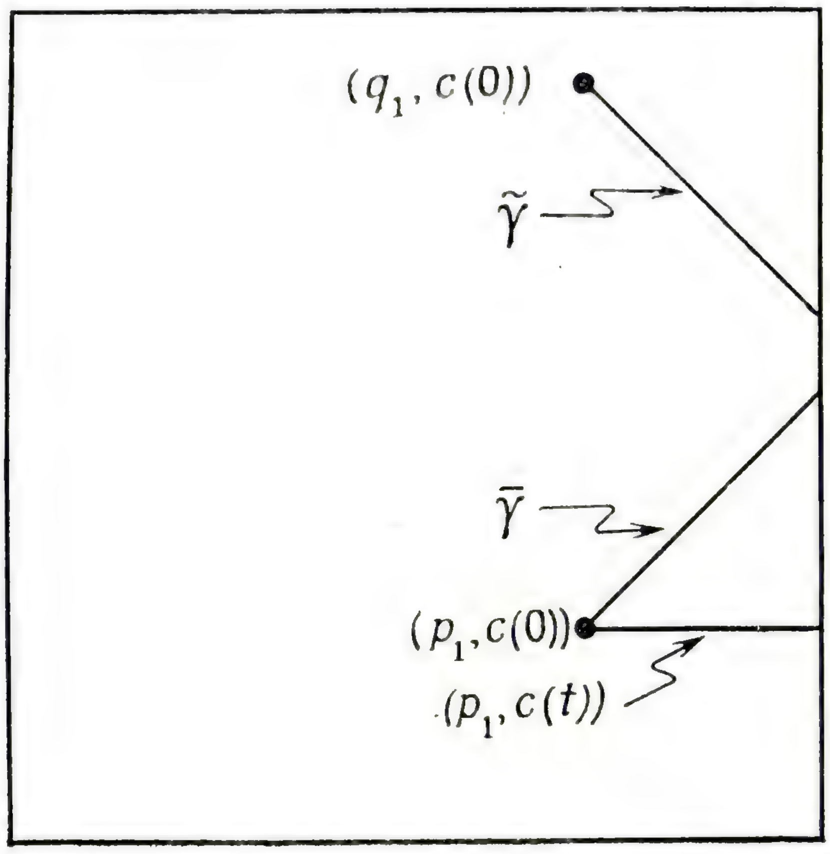



Рис. 2.10. В доказательстве теоремы 2.55 кривая $c$: $[0, \beta) \to H$ является геодезической, непродолжаемой в $t = \beta < \infty$. Кривые $\bar{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), c(t))$ и $\tilde{\gamma} = (\gamma_1(L - t), c(t))$ — непродолжаемые непространственноподобные кривые в $(M \times_f H, \bar{g})$ и, следовательно, не имеют компактного замыкания.

Покажем, что глобальная гиперболичность $(M \times_f H, \bar{g})$ означает, что $(H, h)$ — полное риманово многообразие. Предположим, что $(H, h)$ неполно, и получим отсюда противоречие с глобальной гиперболичностью $(M \times_f H, \bar{g})$. Зафиксируем произвольную пару точек $p_1, q_1 \in M$, связанных отношением $p_1 \ll q_1$, и рассмотрим в $M$ направленную в будущее времениподобную кривую $\gamma_1 : [0, L] \to M$ с единичным вектором скорости, идущую из $p_1$ в $q_1$. Положим $\alpha = \sup \{f(\gamma_1(t)) : t \in [0, L]\}$, где $f : M \to (0, \infty)$ — заданная искривляющая функция. Вследствие того что $\gamma_1([0, L])$ — компактное подмножество $M$, имеем $0 < \alpha < \infty$.

Ввиду предположенной неполноты $(H, h)$ из теоремы Хопфа—Ринова получаем, что существует геодезическая $c : [0, \beta) \to H$, удовлетворяющая условию $h(c'(t), c'(t)) = 1/\alpha$ и не продолжаемая в $t = \beta < \infty$. Путем изменения $c(0)$ и перепараметризации $c$, если это необходимо, можно добиться того, чтобы $0 < \beta < 1/2$. Определим направленную в будущее непространственноподобную кривую $\bar{\gamma} : [0, \beta) \to M \times H$ и направленную в прошлое непространственноподобную кривую $\tilde{\gamma} : [0, \beta) \to M \times H$, положив соответственно $\bar{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), c(t))$ и $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma_1(L - t), c(t))$. Для каждого $t$, $0 \leqslant t < \beta$, вследствие условия $t < L - t$ имеем $\gamma_1(t) \ll \gamma_1(L - t)$ в $(M, g)$. Отсюда по лемме 2.47 мы заключаем, что $(\gamma_1(t), c(t)) \ll (\gamma_1(L - t), c(t))$ в $M \times_f H$. Поэтому $(p_1, c(0)) \leqslant \bar{\gamma}(t) \ll \tilde{\gamma}(t) \leqslant (q_1, c(0))$ для всех $0 \leqslant t < \beta$ (рис. 2.10). Отсюда следует, что $\bar{\gamma}([0, \beta))$ содержится в $J^+((p_1, c(0)) \cap J^-((q_1, c(0)))$. Ввиду того что $c = \eta \circ \bar{\gamma}$ не имеет компактного замыкания в $H$, кривая $\bar{\gamma} : [0, \beta) \to M \times_f H$ не имеет компактного замыкания в $J^+((p_1, c(0))) \cap J^-((q_1, c(0)))$. Однако вследствие глобальной гиперболичности $(M \times_f H, \bar{g})$ множество

$J^+((p_1, c(0))) \cap J^-((q_1, c(0)))$ компактно, что и приводит к ожидаемому противоречию.

($\Leftarrow$) Предположим теперь, что $(M, g)$ глобально гиперболично. Допуская, что $(M \times_f H, \bar{g})$ не является глобально гиперболическим, мы должны показать, что $(H, h)$ неполно. Вследствие сильной причинности $(M, g)$ искривленное произведение $(M \times_f H, \bar{g})$, согласно предложению 2.49, также сильно причинно. Вследствие того что $(M \times_f H, \bar{g})$ не является глобально гиперболическим, в $(M \times_f H, \bar{g})$ должна существовать пара различных точек $(p_1, b_1)$ и $(p_2, b_2)$, для которых множество $J^+((p_1, b_1)) \cap J^-((p_2, b_2))$ некомпактно. Тогда найдется направленная в будущее непространственноподобная кривая $\gamma : [0, 1) \to J^+((p_1, b_1)) \cap J^-((p_2, b_2))$, непродолжаемая в будущее в $(M \times_f H, \bar{g})$. Пусть $\gamma(t) = (u_1(t), u_2(t))$, где $u_1 : [0,1) \to M$ и $u_2 : [0,1) \to H$. Тогда $u_1 : [0,1) \to M$ — направленная в будущее непространственноподобная кривая, содержащаяся в $J^+(p_1) \cap J^-(p_2)$. Последнее компактно вследствие глобальной гиперболичности $(M, g)$. Отсюда вытекает, что $\alpha_0 = \inf\{f(m) : m \in J^+(p_1) \cap J^-(p_2)\} > 0$. Ввиду сильной причинности $(M, g)$ никакая направленная в будущее непродолжаемая в будущее непространственноподобная кривая не может быть захвачена в будущем компактным множеством $J^+(p_1) \cap J^-(p_2)$ (см. предложение 2.9). Тем самым существует точка $r \in J^+(p_1) \cap J^-(p_2)$, такая, что $\lim\limits_{t \to 1^-} u_1(t) = r$. Тогда, полагая $u_1(1) = r$, $u_1$ можно продолжить до непрерывной кривой $u_1 : [0, 1] \to M$. В силу того что кривая $\gamma = (u_1, u_2)$ непродолжаема в $t = 1$, заключаем, что $u_2(t)$ не может сходиться ни к какой точке из $H$ при $t \to 1^-$. Тогда по лемме 2.52 либо $(H, h)$ неполно, либо $u_2$ имеет бесконечную длину. Так как непространственноподобная кривая $u_1 : [0, 1] \to M$ определена на замкнутом отрезке, то она имеет в $(M, g)$ конечную длину. Вследствие того что $f(u_1(t)) \geqslant \alpha_0 > 0$ для всех $t \in [0, 1]$ и

$$\bar{g}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = g(u_1'(t), u_1'(t)) + f(u_1(t))\, h(u_2'(t), u_2'(t)) \leqslant 0,$$

кривая $u_2$ в $(H, h)$ также имеет конечную длину. Поэтому $(H, h)$ неполно, что и требовалось. □

Для глобально гиперболических лоренцевых искривленных произведений поверхности Коши можно строить следующим образом.

**Теорема 2.56.** *Пусть $(H, h)$ — полное риманово многообразие и $(M \times_f H, \bar{g})$ — лоренцево искривленное произведение $(M, g)$ и $(H, h)$.*

(1) *Если $M = (a, b)$, где $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, наделено метрикой $-dt^2$, то $\{p_1\} \times H$ — поверхность Коши многообразия $(M \times_f H, \bar{g})$ для любой точки $p_1 \in M$.*

(2) *Если многообразие $(M, g)$ глобально гиперболично и $S_1$ — его поверхность Коши, то $S_1 \times H$ — поверхность Коши для $(M \times_f H, \bar{g})$.*

*Доказательство.* Вследствие того что доказательства утверждений (1) и (2) весьма схожи, мы приведем только доказательство утверждения (2). При высказанных предположениях $S_1 \times H$ является ахрональным подмножеством многообразия $(M \times_f H, \bar{g})$. Чтобы доказать, что $S_1 \times H$ — поверхность Коши, нужно убедиться в том, что каждая непродолжаемая непространственноподобная кривая в $M \times_f H$ встречает $S_1 \times H$. Возьмем точку $(p_1, p_2) \in M \times H \diagdown S_1 \times H$, а в остальном произвольную. Тогда либо каждая направленная в будущее непродолжаемая в будущее непространственноподобная кривая в $(M, g)$, исходящая из $p_1$, встречает $S_1$, либо каждая направленная в прошлое непродолжаемая в прошлое непространственноподобная кривая, исходящая из $p_1$, встречает $S_1$. Ввиду того что оба случая весьма похожи, будем предполагать, что выполнена первая из двух возможностей, и покажем тогда, что каждая направленная в будущее непродолжаемая в будущее непространственноподобная кривая $\gamma : [0, 1) \to \to M \times_f H$, у которой $\gamma(0) = (p_1, p_2)$, встречает $S_1 \times H$.

Предположим противное: найдется направленная в будущее непродолжаемая в будущее непространственноподобная кривая $\gamma : [0, 1) \to M \times_f H$, исходящая из точки $\gamma(0) = (p_1, p_2)$, которая не встречает $S_1 \times H$. Представим $\gamma(t)$ в следующем виде: $\gamma(t) = (u_1(t), u_2(t))$, где $u_1 : [0, 1) \to M$, $u_2 : [0, 1) \to H$. Так как $S_1$ является поверхностью Коши для $(M, g)$, а $(M, g)$ глобально гиперболично, то множество $J^+(p_1) \cap J^-(S_1)$ компактно (см. Бим и Эрлих (1979а, с. 163)). Как и в доказательстве теоремы 2.55, сильная причинность $(M, g)$ означает, что существует точка $r \in J^+(p_1) \cap J^-(S_1)$, для которой $\lim\limits_{t \to 1^-} u_1(t) = r$. Вследствие компактности множества $J^+(p_1) \cap J^-(S_1)$ искривляющая функция $f: M \to (0, \infty)$ достигает на нем минимума $\alpha_0 > 0$. Как и в доказательстве теоремы 2.55, это означает, что кривая $u_2: [0, 1) \to H$ имеет конечную длину. Ввиду полноты $(H, h)$ и в силу леммы 2.52 в $H$ найдется точка $b = \lim\limits_{t \to 1^-} u_2(t)$. Полагая $\gamma(1) = (r, b)$, продолжаем $\gamma$ до непространственноподобной направленной в будущее кривой $\gamma: [0, 1] \to M \times_f H$, что противоречит непродолжаемости $\gamma$. Отсюда следует, что $\gamma$ должна встретить $S_1 \times H$, как и требуется. □

Обратимся теперь к рассмотрению непространственноподобной геодезической полноты лоренцевых искривленных произведений $\bar{M} = (a, b) \times_f H$, $\bar{g} = -dt^2 \oplus fh$. Пространство-время называется здесь *изотропно* (соответственно *времениподобно*) *геодези-*

*чески неполным*, если некоторую направленную в будущее изотропную (соответственно времениподобную) геодезическую нельзя продолжить так, чтобы она была определена для произвольных положительных и отрицательных значений аффинного параметра (см. определения 5.2 и 5.3). Ввиду того что на $(a, b)$ мы пользуемся метрикой $-dt^2$, кривая $c(t) = (t, y_0)$, где $y_0 \in H$ фиксирована, является времениподобной нормальной геодезической в $(\bar{M}, \bar{g})$ вне зависимости от того, какая искривляющая функция выбрана. Следовательно, если $a > -\infty$ или $b < \infty$, то $(\bar{M}, \bar{g})$ времениподобно геодезически неполно для всевозможных искривляющих функций $f$. Более того, если оба числа $a$ и $b$ конечны, а $\gamma$ — произвольная времениподобная геодезическая на $\bar{M} = (a, b) \times_f H$, то $L(\gamma) \leqslant b - a < \infty$. Таким образом, если $a$ и $b$ конечны, то все времениподобные геодезические неполны и в прошлом, и в будущем. Тем не менее если выбрать искривляющую функцию $f$ подходящим образом, то $(\bar{M}, \bar{g})$ может оказаться изотропно геодезически полным даже в том случае, когда конечны $a$ и $b$. Это будет ясно из доказательства приводимой ниже теоремы 2.57.

Для лоренцева искривленного произведения $\bar{M} = \mathbb{R} \times_f H$ с метрикой $\bar{g} = -dt^2 \oplus f\mathrm{h}$ любая времениподобная геодезическая вида $c(t) = (t, y_0)$ является времениподобно полной и в прошлом, и в будущем. С другой стороны, можно построить лоренцевы искривленные произведения $\bar{M} = \mathbb{R} \times_f H$, у которых все непространственноподобные геодезические, кроме имеющих вид $t \to (t, y_0)$, неполны в будущем. Один такой пример можно получить путем следующих рассуждений. Буземан и Бим (1966) изучали пространство-время $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ с лоренцевой метрикой $ds^2 = y^{-2}(dx^2 - dy^2)$ и заметили (с. 245 их работы), что все времениподобные геодезические этого пространства-времени, за исключением геодезических вида $t \to (t, y_0)$, являются неполными в будущем. Полагая $t = \ln y$, преобразуем это пространство-время в лоренцево искривленное произведение $\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}$ с метрикой $\bar{g} = -dt^2 \oplus f dt^2$, где $f(t) = e^{-2t}$. Вследствие того что отображение $F: (\bar{M}, ds^2) \to (\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}, \bar{g})$, задаваемое формулой $F(x, y) = (x, \ln y)$, является глобальной изометрией, все времениподобные геодезические $(\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}, \bar{g})$, кроме тех, что имеют вид $t \to (t, y_0)$, неполны в будущем. Из приводимой ниже теоремы 2.57 вытекает, что все изотропные геодезические также неполны в будущем. Рассуждая подобным же образом, можно получить еще один пример. Пусть $(\mathbb{R}^n, \mathrm{h})$ — пространство $\mathbb{R}^n$ с обычной евклидовой метрикой $\mathrm{h} = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$. Тогда лоренцево искривленное произведение $(\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^n, \bar{g})$ с $\bar{g} = -dt^2 \oplus f\mathrm{h}$ и $f(t) = e^{-2t}$ представляет собой пространство-время, все непространственно-

подобные геодезические которого, за исключением геодезических вида $t \to (t, y_0)$, неполны в будущем.

Чтобы изучать геодезическую полноту лоренцевых искривленных произведений, необходимо определить связность Леви—Чивита для их метрик. Рассмотрим для этого общее искривленное произведение $(M \times_f H,\ g \oplus f h)$, где $f: M \to (0, \infty)$, $(H, h)$ — риманово многообразие, а $(M, g)$ наделено метрикой с сигнатурой $(-, +, \ldots, +)$. Обозначим через $\nabla^1$ связность Леви—Чивита для $(M, g)$, а через $\nabla^2$ связность Леви—Чивита для $(H, h)$. Векторные поля $X_1$, $Y_1$ и $X_2$, $Y_2$, заданные на $M$ и $H$ соответственно, можно поднять до векторных полей $X = (X_1, 0) + (0, X_2) = (X_1, X_2)$ и $Y = (Y_1, 0) + (0, Y_2) = (Y_1, Y_2)$ на $M \times H$. Напомним, что связность $\bar{\nabla}$ для $(M \times_f H,\ g \oplus f h)$ и метрика $\bar{g} = g \oplus f h$ соотносятся так, что справедлива формула

$$2\bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, Z) = X\bar{g}(Y, Z) + Y\bar{g}(X, Z) - Z\bar{g}(X, Y) + \\ + \bar{g}([X, Y], Z) - \bar{g}([X, Z], Y) - \bar{g}([Y, Z], X)$$

(см. Чигер и Эбин (1975, с. 2)). Используя эту формулу и полагая $\varphi = \ln f$, получаем для $\bar{\nabla}$ следующее соотношение:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla^1_{X_1} Y_1 + \nabla^2_{X_2} Y_2 + \\ + \frac{1}{2}\,[X_1(\varphi)\,Y_2 + Y_1(\varphi)\,X_2 - \bar{g}(X_2, Y_2)\operatorname{grad}\varphi], \quad (2.4)$$

где $X$ и $Y$ определены выше. Здесь $\operatorname{grad}\varphi$ обозначает градиент функции $\varphi$ на $(M, g)$, вектор $\nabla^1_{X_1} Y_1|_p \in T_p M$ отождествлен с вектором $(\nabla^1_{X_1} Y_1|_p, 0_q) \in T_{(p,q)}(M \times H)$ и т. п.

Теперь можно сформулировать следующий критерий изотропной геодезической неполноты лоренцевых искривленных произведений $\bar{M} = (a, b) \times_f H$ (см. Бим, Эрлих и Пауэлл (1980)). Всюду до конца этого раздела через $\omega_0$ будет обозначаться точка $(a, b)$.

**Теорема 2.57.** *Пусть $\bar{M} = (a, b) \times_f H$ — лоренцево искривленное произведение с лоренцевой метрикой $\bar{g} = -dt^2 \oplus f h$, где $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, $(H, h)$ — произвольное риманово многообразие и $f: (a, b) \to (0, \infty)$. Положим $S(t) = \sqrt{f(t)}$. Тогда, если*

$$\lim_{t \to a^+} \int_t^{\omega_0} S(s)\,ds \ \left(\text{соответственно } \lim_{t \to b^-} \int_{\omega_0}^t S(s)\,ds\right) \text{ конечен, то}$$

*каждая направленная в будущее изотропная геодезическая в $(\bar{M}, \bar{g})$ является неполной в прошлом (соответственно в будущем).*

*Доказательство.* Пусть $\gamma_0$ — произвольная направленная в будущее изотропная геодезическая в $(\bar{M}, \bar{g})$. Можно перепараметри-

зовать $\gamma_0$ к виду $\gamma(t) = (t, c(t))$, где $\gamma$ — гладкая изотропная предгеодезическая. Соответственно этому существует гладкая функция $g(t)$, такая, что

$$\bar{\nabla}_{\gamma_1}\gamma'|_t = g(t)\gamma'(t) = g(t)\frac{\partial}{\partial t}\Big|_t + g(t)c'(t)$$

(см. Хокинг и Эллис (1977, с. 44)). С другой стороны, вследствие того что $\gamma'(t) = \partial/\partial t\,|_t + c'(t)$ и $\bar{g}(\gamma', \gamma') = -1 + \bar{g}(c', c') = 0$, из формулы (2.4) получаем, что

$$\bar{\nabla}_{\gamma'}\gamma'|_t = \nabla'_{\partial/\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_t + \nabla^2_{c'}c'|_t + \frac{\partial}{\partial t}(\varphi)\,c'(t) -$$

$$-\frac{1}{2}\bar{g}(c'(t), c'(t))\,\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla^2_{c'}c'|_t + \frac{f'(t)}{f(t)}c'(t) + \frac{f'(t)}{2f(t)}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_t.$$

Приравнивая выражения, содержащие $\partial/\partial t$, приходим к формуле

$$g(t) = \frac{f'(t)}{2f(t)}. \tag{2.5}$$

Поэтому $\bar{\nabla}_{\gamma'}\gamma'|_t = (1/2)\,[\ln f(t)]'\gamma'(t) = [\ln S(t)]'\gamma'(t)$. Если определить отображение $p\colon (b, b) \to \mathbb{R}$ при помощи соотношения

$$p(t) = \int_{\omega_0}^{t} S(s)\,ds,$$

то из того, что $p'(t) = S(t) > 0$, можно заключить, что существует обратное, $p^{-1}$. Более того, из классической теории преобразований проектирования известно, что $\gamma_1(t) = \gamma \circ p^{-1}(t) = (p^{-1}(t), c \circ p^{-1}(t))$ 'является изотропной геодезической (см. Спивак (1970, с. 6—35 и далее)). Пусть

$$A = \lim_{t \to a^+} p(t), \qquad B = \lim_{t \to b^-} p(t).$$

Ввиду того что функция $p$ монотонно возрастает, отображение $p\colon (a, b) \to (A, B)$ взаимно однозначно. Отсюда вытекает, что $p^{-1}\colon (A, B) \to (a, b)$, и поэтому $\gamma_1 = \gamma \circ p^{-1}\colon (A, B) \to \bar{M}$. Таким образом, если $A$ конечно, то $\gamma_1$ неполна в прошлом, а если $B$ конечно, то $\gamma_1$ неполна в будущем, что и требовалось доказать. □

Из теоремы 2.57 немедленно следует, что если $a$ и $b$ конечны и искривляющая функция $f\colon (a, b) \to (0, \infty)$ ограничена, то $(M, g)$ является изотропно геодезически неполным как в прошлом, так и в будущем. Таким образом, предполагая, что $a$ и $b$ конечны, можно легко строить однопараметрические семейства пространств $(\bar{M}, \bar{g}(s)) = (\bar{M}, -dt^2 \oplus f(s)\,\mathrm{h})$, изотропно геодезически неполных в прошлом и в будущем. Выбирая однопараметрическое семейство функций $f(s)\colon (a, b) \to (0, \infty)$ подходящим образом,

можно добиться того, что кривая $s \to \bar{g}(s) = -dt^2 \oplus f(s)\,\mathrm{h}$ в пространстве $\mathrm{Lor}(\bar{M})$ не будет непрерывной кривой в тонкой $C^r$-топологии. Таким образом, пространства $(\bar{M}, \bar{g}(0))$ и $(\bar{M}, \bar{g}(s))$ могут оказаться весьма далекими в $\mathrm{Lor}(\bar{M})$ при $s \neq 0$.

Заметим, что если риманово многообразие $(H, \mathrm{h})$ геодезически неполно, то $\bar{M} = (a, b) \times_f H$ может быть изотропно геодезически неполным даже в том случае, когда оба интеграла из теоремы 2.57 расходятся. С другой стороны, если предполагать полноту $(H, \mathrm{h})$, то из доказательства теоремы 2.57 можно получить следующее необходимое и достаточное условие изотропной геодезической неполноты $\bar{M} = (a, b) \times_f H$.

**Замечание 2.58.** Пусть $\bar{M} = (a, b) \times_f H$ — лоренцево искривленное произведение с лоренцевой метрикой $\bar{g} = -dt^2 \oplus f\mathrm{h}$, где $(H, \mathrm{h})$ — полное риманово многообразие и $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. Положим, как и выше, $S(t) = \sqrt{f(t)}$. Тогда $(\bar{M}, \bar{g})$ является изотропно геодезически неполным в прошлом (соответственно в будущем) в том и только том случае, когда $\lim\limits_{t \to a^+} \int_t^{\omega_0} S(s)\,ds$ (соответственно $\lim\limits_{t \to b^-} \int_{\omega_0}^t S(s)\,ds$) конечен.

В теории сингулярностей общей теории относительности на тензор кривизны $(\bar{M}, \bar{g})$ накладываются некоторые условия. Эти условия — *типовое условие* и *сильное энергетическое условие* — будут рассматриваться в разд. 11.2. Выполнение этих условий гарантирует, что если непространственноподобную геодезическую $\gamma$ можно продолжить на все положительные и отрицательные значения аффинного параметра и $\dim \bar{M} \geqslant 3$, то $\gamma$ обязательно содержит пару сопряженных точек. Поэтому для того, чтобы показать непространственноподобную геодезическую неполноту $(\bar{M}, \bar{g})$, эти условия на кривизну можно объединять с такими геометрическими или физическими допущениями, как, например, причинная разделяемость $(\bar{M}, \bar{g})$ или то, что $(\bar{M}, \bar{g})$ содержит замкнутое ловушечное множество (см. разд. 11.4). Вследствие того что $(\bar{M}, \bar{g})$ удовлетворяет типовому условию и сильному энергетическому условию, если непространственноподобная кривизна Риччи всюду положительна, представляется интересным рассмотрение условий на искривляющую функцию $f$ лоренцева искривленного произведения, которые обеспечивали бы положительность непространственноподобной кривизны Риччи всюду в $(\bar{M}, \bar{g})$. Допущение $\dim \bar{M} \geqslant 3$, принимаемое в теории сингулярностей, необходимо (вследствие того что никакая изотропная геодезическая произвольного двумерного лоренцева многообразия не со-

держит сопряженных точек) для существования изотропно сопряженных точек.

Сейчас мы приведем формулы для вычисления тензора кривизны $R$ и тензора кривизны Риччи Ric лоренцева искривленного произведения $(M \times {}_f H, \bar{g})$, где $\bar{g} = g \oplus fh$. Как и выше, обозначим через $\nabla^1$ (соответственно $\nabla^2$) ковариантное дифференцирование на $(M, g)$ (соответственно на $(H, h)$). Положим $\varphi = \ln f$ и напомним, что через $\operatorname{grad} \varphi$ обозначается градиент функции $\varphi$ на $(M, g)$. Касательные векторы $x \in T_{\bar{p}}(M \times H)$, как и выше, будем представлять в виде $x = (x_1, x_2)$. Пусть $R^1$ (соответственно $R^2$) — тензор кривизны $(M, g)$ (соответственно $(H, h)$). Для заданных векторов $x_1, y_1 \in T_pM$ тензоры Гессе $H_\varphi$ и $h_\varphi$ определяются соответственно по правилам

$$H_\varphi(x_1) = \nabla^1_{x_1} \operatorname{grad} \varphi \tag{2.6}$$

и

$$h_\varphi(x_1, y_1) = g(\nabla^1_{x_1} \operatorname{grad} \varphi, y_1). \tag{2.7}$$

Вместо $g(\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \varphi)$ будем писать также $\| \operatorname{grad} \varphi \|^2$. Используя соглашение о знаке тензора кривизны

$$R(X, Y)Z = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z$$

и заменяя $\bar{\nabla}$ по формуле (2.4), получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} R(x, y)z = {} & R^1(x_1, y_1)z_1 + R^2(x_2, y_2)z_2 + \\ & + \frac{1}{2}[h_\varphi(x_1, z_1)y_2 - h_\varphi(y_1, z_1)x_2 + \bar{g}(x_2, y_2)H_\varphi(y_1) - \\ & - \bar{g}(y_2, z_2)H_\varphi(x_1)] + \\ & + \frac{1}{4}\{[x_1(\varphi)z_1(\varphi) + \bar{g}(x_2, z_2)\|\operatorname{grad}\varphi\|^2(p)]y_2 - \\ & - [y_1(\varphi)z_1(\varphi) + \bar{g}(y_2, z_2)\|\operatorname{grad}\varphi\|^2(p)]x_2 + \\ & + [y_1(\varphi)\bar{g}(x_2, z_2) - x_1(\varphi)\bar{g}(y_2, z_2)]\operatorname{grad}\varphi(p)\}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где $x, y, z \in T_{(p, q)}(M \times H)$.

Пусть $\dim M = m$ и $\dim H = n$. Для вычисления в точке $\bar{p} = (p, q) \in M \times H$ кривизны Риччи выберем в $T_pM$ базис $\{e_1, \ldots, e_m\}$ так, чтобы $g(e_1, e_1) = -1$, $g(e_j, e_j) = 1$ для $2 \leqslant j \leqslant m$ и $g(e_i, e_j) = 0$, если $i \neq j$. Пусть $\{e_{m+1}, \ldots, e_{m+n}\}$ — ортонормированный базис пространства $T_qH$. Тогда для любых $x, y \in T_{\bar{p}}(M \times H)$ имеем

$$\operatorname{Ric}(x, y) = -\bar{g}(R(e_1, x)y, e_1) + \sum_{j=2}^{m+n} \bar{g}(R(e_j, x)y, e_j).$$

Даламбертиан $\Box\varphi$ функции $\varphi$ можно вычислить по правилу

$$\Box\,\varphi(p)=-h_\varphi(e_1,e_1)+\sum_{j=2}^{m}h_\varphi(e_j,e_j).$$

Используя формулу (2.8), получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{Ric}(x,y)&=\operatorname{Ric}^1(x_1,y_1)+\operatorname{Ric}^2(x_2,y_2)-\\&-\bar{g}(x_2,y_2)\left[\frac{1}{2}\Box\,\varphi(p)+\frac{\dim H}{4}\|\operatorname{grad}\varphi(p)\|^2\right]-\\&-\frac{\dim H}{2}h_\varphi(x_1,y_1)-\frac{\dim H}{4}x_1(\varphi)\,y_1(\varphi),\end{aligned}\tag{2.9}$$

где $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)\in T_{(p,q)}(M\times H)$, а $\operatorname{Ric}^1$ и $\operatorname{Ric}^2$ — тензоры кривизны Риччи многообразий $(M,g)$ и $(H,h)$ соответственно.

Сосредоточим теперь наше внимание на случае, когда $\overline{M}=(a,b)\times_f H$ с метрикой искривленного произведения $\bar{g}=-dt^2\oplus f\mathrm{h}$. В этом случае $\Box\varphi(t)=-\varphi''(t)$ и $\|\operatorname{grad}\varphi(t)\|^2=-[\varphi'(t)]^2$. Поэтому из формулы (2.9) для $\bar{v}=(0,v)\in T_{(t,q)}(\mathbb{R}\times H)$ получаем

$$\operatorname{Ric}(\bar{v},\bar{v})=\operatorname{Ric}^2(v,v)+\bar{g}(v,v)\left\{\frac{1}{2}\varphi''(t)+\frac{\dim H}{4}[\varphi'(t)]^2\right\}.\tag{2.10}$$

Если $x=\partial/\partial t|_t+v\in T_{(t,q)}(\mathbb{R}\times H)$, где $v\in T_qH$, то

$$\begin{aligned}\operatorname{Ric}(x,x)&=\operatorname{Ric}^2(v,v)+\bar{g}(v,v)\left\{\frac{1}{2}\varphi''(t)+\right.\\&\left.+\frac{\dim H}{4}[\varphi'(t)]^2\right\}+\left\{-\frac{\dim H}{2}\varphi''(t)-\frac{\dim H}{4}[\varphi'(t)]^2\right\}.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Выражения, заключенные в формулах (2.10) и (2.11) в фигурные скобки, будут положительными при условии, что

$$-[\varphi'(t)]^2\dim H<2\varphi''(t)<-[\varphi'(t)]^2\tag{2.12}$$

для всех $t\in(a,b)$. Поэтому, если $\operatorname{Ric}^2(v,v)\geqslant 0$ для всех $v\in TH$ и выполняется неравенство (2.12), то кривизна Риччи пространства-времени $(\overline{M},\bar{g})$ будет всюду положительна. Глобально гиперболическое семейство таких пространств образуют искривленные произведения $\overline{M}=(0,\infty)\times_f H$, в которых $(H,\mathrm{h})$ — полное риманово многообразие неотрицательной кривизны Риччи и $\bar{g}=-dt^2\oplus f\mathrm{h}$ с $f(t)=t^r$, где $r\in\mathbb{R}$ — постоянная, подчиненная условию $2/\dim H<r<2$. Если в качестве $(H,\mathrm{h})$ взять $\mathbb{R}^3$ с обычной евклидовой метрикой и положить $r=4/3$, то мы получим вселенную Эйнштейна — де Ситтера (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 157), Сакс и Ву (1977a, предложение 6.2.7 и далее)).

Если тензор Риччи многообразия $(H, \mathrm{h})$ ограничен снизу, то для положительности непространственноподобной кривизны Риччи можно получить на $\varphi = \ln f$ следующее условие.

**Предложение 2.59.** *Пусть* $\overline{M} = (a, b) \times {}_f H$, *где* $n = \dim H \geqslant 2$ *и* $\overline{\mathrm{g}} = -dt^2 \oplus f\mathrm{h}$, $\varphi = \ln f$. *Предположим, что* $\mathrm{Ric}^2(v, v) \geqslant \lambda \mathrm{h}(v, v)$ *для некоторой постоянной* $\lambda \in \mathbb{R}$ *и всех* $v \in TH$. *Тогда, если неравенство*

$$2\varphi''(t) < \min\{-(\varphi'(t))^2,\ 4(n-1)^{-1}\lambda e^{-\varphi(t)}\} \tag{2.13}$$

*выполняется для всех* $t \in (a, b)$, *то лоренцево искривленное произведение* $(\overline{M}, \overline{\mathrm{g}})$ *имеет всюду положительную непространственноподобную кривизну Риччи.*

*Доказательство.* Достаточно показать, что $\mathrm{Ric}(x, x) > 0$ для всех непространственноподобных касательных векторов $x$ вида $x = \partial/\partial t + v \in T(M \times H)$, $v \in TH$. Вследствие того что $\overline{\mathrm{g}}(x, x) \leqslant 0$ и $\overline{\mathrm{g}}(\partial/\partial t, \partial/\partial t) = -1$, имеем $\beta = \overline{\mathrm{g}}(v, v) \leqslant 1$. Отсюда $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Тогда $\mathrm{h}(v, v) = \beta e^{-\varphi}$, и из формулы (2.11) мы получаем

$$\mathrm{Ric}(x, x) \geqslant \beta e^{-\varphi}\lambda + \left[\frac{\beta}{2} - \frac{n}{2}\right]\varphi'' + \frac{n}{4}(\beta - 1)(\varphi')^2. \tag{2.14}$$

Поэтому неравенство $\mathrm{Ric}(x, x) > 0$ будет выполнено, если для всех $\beta \in [0, 1]$ $\varphi'' < G(\beta)$, где

$$G(\beta) = \frac{4\beta e^{-\varphi}\lambda - n(1-\beta)(\varphi')^2}{2(n-\beta)}.$$

Нетрудно подсчитать, что на отрезке $[0, 1]$ производная $G'(\beta)$ не изменяет знака. Поэтому минимальное значение на $[0, 1]$ функция $G(\beta)$ принимает либо при $\beta = 0$, либо при $\beta = 1$. Следовательно, $\mathrm{Ric}(x, x) > 0$ при условии, что $\varphi'' < \min\{G(0), G(1)\}$. Последнее неравенство и дает условие (2.13). □

Рассмотрим теперь скалярную кривизну искривленных произведений вида $\overline{M} = \mathbb{R} \times {}_f H$, $\overline{\mathrm{g}} = -dt^2 \oplus f\mathrm{h}$. Ниже будем считать, что $n = \dim H$. Пусть $(t, q) \in \overline{M}$ — произвольная точка. Выберем $e_j \in T_q H$, $1 \leqslant j \leqslant n$, так, что если $\bar{e}_j = (0, e_j) \in T_{(t, q)}\overline{M}$, то векторы $\{\overline{\partial/\partial t} = (\partial/\partial t, 0_q), \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ образуют $\overline{\mathrm{g}}$-ортонормированный базис пространства $T_{(t, q)}M$. Отсюда следует, что $\{\sqrt{f(t)}\, e_1, \ldots, \sqrt{f(t)}\, e_n\}$ есть $\mathrm{h}$-ортонормированный базис $T_q H$. Поэтому если $\tau\colon \overline{M} \to \mathbb{R}$ и $\tau_H\colon H \to \mathbb{R}$ — скалярные кривизны соответственно $(\overline{M}, \overline{\mathrm{g}})$ и $(H, \mathrm{h})$, то

$$\tau(t, q) = -\mathrm{Ric}\left[\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right] + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ric}(\bar{e}_j, \bar{e}_j)$$

и

$$\tau_H(q) = f(t) \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ric}^2(e_j, e_j).$$

Приведенные выше формулы (2.10) и (2.11) можно упростить:

$$\mathrm{Ric}\left[\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right] = -\frac{n}{2}\varphi''(t) - \frac{n}{4}[\varphi'(t)]^2 \tag{2.15}$$

и

$$\mathrm{Ric}(\bar{e}_j, \bar{e}_j) = \mathrm{Ric}^2(e_j, e_j) + \frac{1}{2}\varphi''(t) + \frac{n}{4}[\varphi'(t)]^2, \tag{2.16}$$

где $1 \leqslant j \leqslant n$. Тем самым справедлива формула

$$\tau(t, q) = \frac{1}{f(t)}\tau_H(q) + n\varphi''(t) + \frac{1}{4}(n^2 + n)[\varphi'(t)]^2.$$

Вспоминая, что $\varphi(t) = \ln f(t)$, можно переписать ее в следующем виде:

$$\tau(t, q) = \frac{1}{f(t)}\tau_H(q) + n\frac{f''(t)}{f(t)} + \frac{1}{4}(n^2 - 3n)\left[\frac{f'(t)}{f(t)}\right]^2, \tag{2.17}$$

где $\dim H = n$, как и выше. В частности, при $n = 3$ (как в общей теории относительности) получаем

$$\tau(t, q) = \frac{1}{f(t)}\tau_H(q) = 3\frac{f''(t)}{f(t)}. \tag{2.18}$$

**Пример 2.60.** Пользуясь полученными в этом разделе формулами, приведем пример однопараметрического семейства $\bar{g}_\lambda$ неизометричных между собой метрик Эйнштейна для $\mathbb{R}^{n+1}$, такого, что при $\lambda = 0$ получается $(n+1)$-мерное пространство-время Минковского $(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$. Пусть $(\mathbb{R}^n, h)$ есть $n$-мерное евклидово пространство с обычной евклидовой метрикой $h = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$. Рассмотрим семейство, составляющими которого являются искривленные произведения $\bar{M}_\lambda = \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ с лоренцевыми метриками $\bar{g}_\lambda = -dt^2 \oplus e^{\lambda t}h$, т. е. $f(t) = e^{\lambda t}$. По теореме 2.57 для всех $\lambda > 0$ пространство-время $(\mathbb{R}^{n+1}, \bar{g}_\lambda)$ является изотропно геодезически полным в будущем, но изотропно геодезически неполным в прошлом, а для всех $\lambda < 0$ пространство-время $(\mathbb{R}^{n+1}, \bar{g}_\lambda)$ изотропно геодезически полно в прошлом, но не является изотропно геодезически полным в будущем. Применяя формулы (2.15)—(2.17), получаем

$$\mathrm{Ric}(\bar{g}_\lambda) = \frac{n\lambda^2}{4}\bar{g}_\lambda \tag{2.19}$$

$$\tau_{\bar{g}_\lambda} = \frac{1}{4}(n^2 + n)\lambda^2. \tag{2.20}$$

Таким образом, если $\lambda \neq 0$, то $(\overline{M}_\lambda, \bar{g}_\lambda)$ представляет собой пространство-время Эйнштейна с постоянной положительной скалярной кривизной.

**Пример 2.61.** Пусть $\overline{M}_\lambda = (0, \infty) \times {}_f\mathbb{R}^3$, где $\bar{g}_\lambda = -dt^2 \oplus f\mathrm{h}$, $f(t) = \lambda t$, $\lambda > 0$, и $\mathrm{h}$ — обычная евклидова метрика на $\mathbb{R}^3$. Тогда из формулы (2.18) немедленно следует, что $\tau(\bar{g}_\lambda) \equiv 0$ для всех $\lambda > 0$. С другой стороны, вследствие равенства $\varphi(t) = \ln(\lambda t)$ можно убедиться, используя формулы (2.15) и (2.16), что для любого $\lambda > 0$ $(\overline{M}_\lambda, \bar{g}_\lambda)$ не является ни риччи-плоским, ни эйнштейновым. Кроме того, для любого $\lambda > 0$ и всех $t > 0$

$$\mathrm{Ric}\left[\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right] = \frac{3}{4} t^{-2}.$$

Отсюда вытекает, что пространство-время $(\overline{M}_\lambda, \bar{g}_\lambda)$ «непродолжаемо через» $\{0\} \times \mathbb{R}^3$ (см. разд. 5.5). Отметим также, что по теореме 2.57 $(\overline{M}_\lambda, \bar{g}_\lambda)$ изотропно геодезически полно в будущем.

Глава 3

# ЛОРЕНЦЕВО РАССТОЯНИЕ

Цель этой главы состоит в том, чтобы изучить свойства лоренцева расстояния, соответствующие основным свойствам риманова расстояния (см. гл. 1), и показать, как лоренцево расстояние связано с причинной структурой заданного пространства-времени. Мы покажем также, что отображения сильно причинного пространства-времени на себя, которые сохраняют лоренцево расстояние, являются диффеоморфизмами, сохраняющими метрический тензор.

Хотя многие свойства римановой и лоренцевой функций расстояния похожи, в этой главе будут выявлены также и многие существенные различия. Тем не менее как в этой главе, так и в последующих главах двойственность между «минимальными» свойствами в римановых многообразиях и «максимальными» в лоренцевых многообразиях будет постоянно отмечаться.

## 3.1. Основные понятия и определения

Пусть $(M, g)$ — лоренцево многообразие размерности, большей или равной двум. Для заданных точек $p, q \in M$, связанных отношением $p \leqslant q$, обозначим через $\Omega_{p,q}$ пространство путей, образованное всеми направленными в будущее непространственноподобными кривыми $\gamma: [0, 1] \to M$, для которых $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$. Функционал лоренцевой длины дуги $L = L_g: \Omega_{p,q} \to \mathbb{R}$ определяется по следующему правилу (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 119)). Выберем разбиение $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ заданной кусочно-гладкой кривой $\gamma \in \Omega_{p,q}$ так, чтобы кривая $\gamma | (t_i, t_{i+1})$ была гладкой для каждого $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Тогда

$$L(\gamma) = L_g(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t=t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{-g(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt. \tag{3.1}$$

Как и в элементарной дифференциальной геометрии, можно проверить (см. О'Нейл (1966, с. 51—52)), что это определение лоренцевой длины дуги не зависит от выбора параметризации кривой $\gamma$.

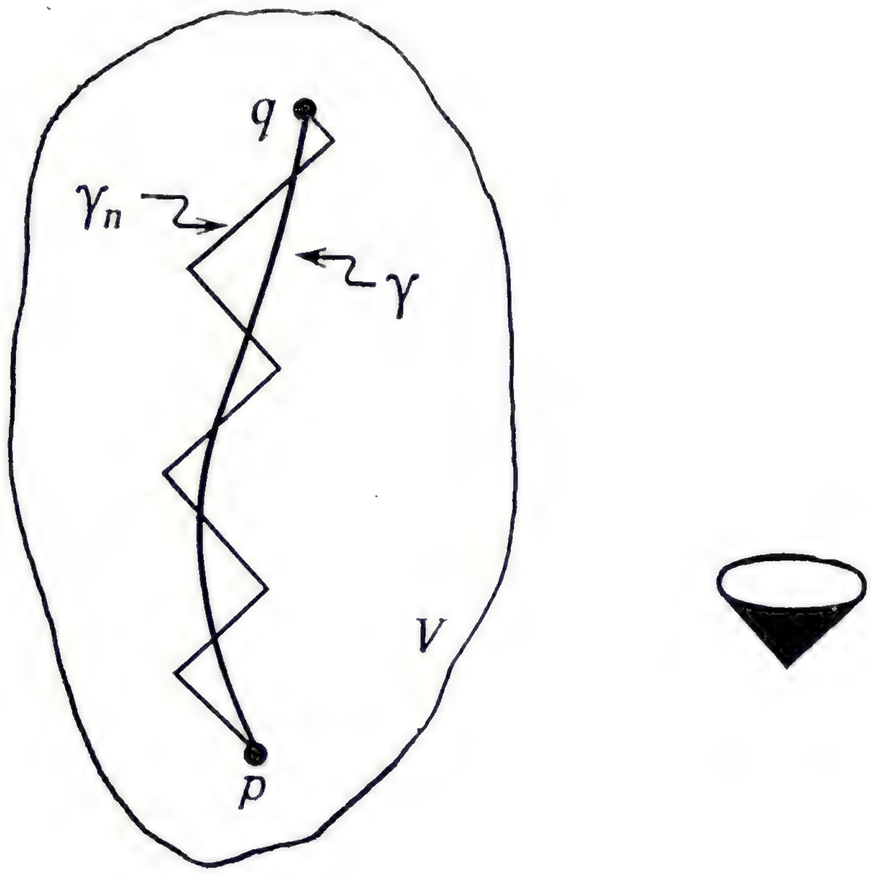



Рис. 3.1. Времениподобная кривая $\gamma$, идущая из $p$ в $q$, аппроксимируется последовательностью кривых $\gamma_n$; при этом $\gamma_n \to \gamma$ в $C^0$-топологии, но $L(\gamma_n) \to 0$.

В силу того что произвольная непространственноподобная кривая локально удовлетворяет условию Липшица, она дифференцируема почти всюду. Следовательно, лоренцеву длину дуги $L(\gamma)$ такой кривой $\gamma$ можно по-прежнему определить, используя формулу (3.1). Другие, но эквивалентные определения $L(\gamma)$ для произвольных неизотропных непространственноподобных кривых можно получить или путем аппроксимации $\gamma$ $C^1$-гладкими времениподобными кривыми (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 237)), или путем аппроксимации $\gamma$ последовательностями ломаных непространственноподобных геодезических (см. Пенроуз (1972, с. 53)). Лоренцеву длину дуги произвольной изотропной кривой положим равной нулю.

Зафиксируем точки $p, q \in M$, связанные отношением $p \ll q$. Если $\gamma$ — времениподобная кривая, идущая из $p$ в $q$, то $L(\gamma) > 0$. С другой стороны, $\gamma$ можно аппроксимировать последовательностью кусочно-гладких «почти изотропных» кривых $\gamma_n$: $[0, 1] \to M$, подчиненных условию $\gamma_n(0) = p$, $\gamma_n(1) = q$ и таких, что $\gamma_n \to \gamma$ в $C^0$-топологии, в то время как $L(\gamma_n) \to 0$ (рис. 3.1). Эта конструкция показывает, кроме того, что для любых $p, q \in M$, связанных отношением $p \ll q$, существуют кривые $\gamma \in \Omega_{p,q}$ произвольно малой лоренцевой длины. Следовательно, точная нижняя грань лоренцевых длин всех кусочно-гладких кривых, соединяющих две хронологически связанные точки $p$ и $q$, всегда равна нулю. С другой стороны, если $p$ и $q$ лежат в геодезически выпуклой окрестности $U$, то направленный в будущее времениподобный геодезический сегмент, лежащий в $U$ и соединяющий точки $p$ и $q$, имеет наибольшую лоренцеву длину среди всех непространственноподобных кривых, лежащих в $U$ и соединяющих точки $p$ и $q$.

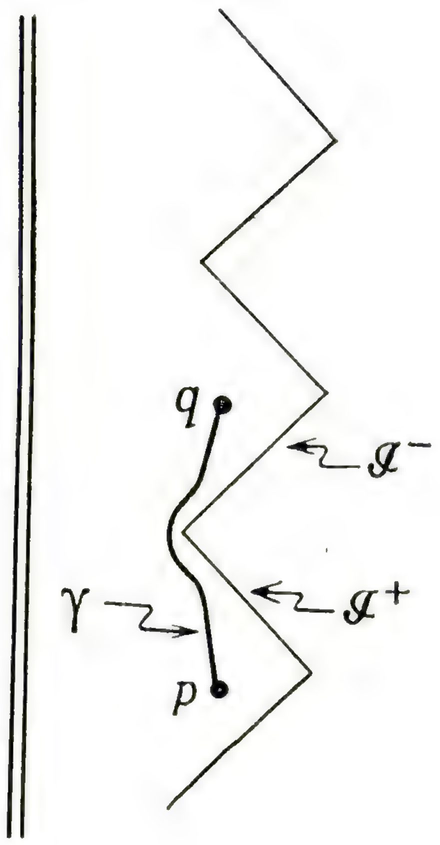



Рис. 3.2. Показано пространство-время Райсснера—Нордстрема с $e^2 = m^2$. Выбирая времениподобные кривые $\gamma$, идущие из $p$ в $q$ близко к $\mathscr{I}^+$ и $\mathscr{I}^-$ мы можем сделать $L(\gamma)$ произвольно большим. Поэтому $d(p, q) = \infty$.

Поэтому естественно дать следующее определение лоренцевой функции расстояния $\mathrm{d} = \mathrm{d}(g)$: $M \times M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ в пространстве-времени $(M, g)$.

**Определение 3.1.** Для данной точки $p \in M$ полагаем $\mathrm{d}(p, q) = 0$, если $q \notin J^+(p)$. Если же $q \in J^+(p)$, то $\mathrm{d}(p, q) = \sup\{L_g(\gamma): \gamma \in \Omega_{p,q}\}$.

Из определения немедленно следует, что

$$\mathrm{d}(p, q) > 0 \Leftrightarrow q \in I^+(p). \tag{3.2}$$

Таким образом, лоренцева функция расстояния определяет хронологическое прошлое и хронологическое будущее каждой точки. Вместе с тем лоренцева функция расстояния, вообще говоря, не определяет причинного прошлого и причинного будущего множеств точки $p$ вследствие того, что из равенства $\mathrm{d}(p, q) = 0$ *не* вытекает включения $q \in J^+(p) - I^+(p)$. Тем не менее, если $q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$, то $\mathrm{d}(p, q) = 0$.

Подчеркнем, что лоренцево расстояние $\mathrm{d}(p, q)$ *не* обязательно должно быть конечным. Одной из возможностей того, что $\mathrm{d}(p, q) = \infty$, может быть следующая: времениподобные кривые из $p$ в $q$ при подходе к некоторым граничным точкам пространства-времени могут достигать произвольно больших длин. На рис. 3.2 показаны две точки в пространстве-времени Райсснера—Нордстрема с $e^2 = m^2$, расстояние между которыми бесконечно: $\mathrm{d}(p, q) = \infty$ (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 179)).

Второй возможностью того, что лоренцево расстояние может оказаться бесконечным, являются нарушения причинности. Напомним, что пространство-время называется полностью искаженным, если $I^+(p) \cap I^-(p) = M$ для всех $p \in M$.

**Лемма 3.2.** *Пусть $(M, q)$ — произвольное пространство-время,*

(а) *Если* $p \in I^+(p)$, *то* $\mathrm{d}(p, p) = \infty$. *Поэтому для любой точки* $p \in M$ *либо* $\mathrm{d}(p, p) = 0$, *либо* $\mathrm{d}(p, p) = \infty$.
(б) $(M, g)$ *является полностью искаженным в том и только том случае, когда* $\mathrm{d}(p, q) = \infty$ *для всех* $p, q \in M$.

*Доказательство.* (а) Пусть $p \in I^+(p)$. Тогда можно найти замкнутую времениподобную кривую $\gamma\colon [0, 1] \to M$, у которой $\gamma(0) = \gamma(1) = p$. Вследствие того что $\gamma$ времениподобна, $L(\gamma) > 0$. Если $\sigma_n \in \Omega_{p, p}$ — времениподобная кривая, получаемая путем $n$-кратного обхода $\gamma$, то $L(\sigma_n) = nL(\gamma) \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому $\mathrm{d}(p, p) = \infty$.

(б) Пусть $(M, g)$ полностью искажено. Зафиксируем в $M$ точки $p$ и $q$. Пусть $n > 0$ — произвольное целое число. По доказанному в (а) из включения $p \in I^+(p)$ вытекает существование кривой $\gamma_1 \in \Omega_{p, p}$, длина которой $L(\gamma_1) \geqslant n$. Так как $q \in I^+(p)$, то найдется времениподобная кривая $\gamma_2$, идущая из $p$ в $q$. Тогда $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 \in \Omega_{p, q}$ — времениподобная кривая, длина которой $L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) > n$. Следовательно, $\mathrm{d}(p, q) = \infty$.

Обратно, предположим, что $\mathrm{d}(p, q) = \infty$ для всех $p, q \in M$. Фиксируя $r \in M$, получаем, что $\mathrm{d}(r, p) > 0$ и $\mathrm{d}(p, r) > 0$ для всех $p \in M$. Поэтому из формулы (3.2) вытекает, что $I^+(r) \cap I^-(r) = M$. $\square$

Согласно определению 3.1, если $I^+(p) \neq M$, то существуют точки $q \in M$, отличные от $p$, $p \neq q$, и такие, что $\mathrm{d}(p, q) = 0$. Тем самым в отличие от римановой функции расстояния лоренцева функция расстояния обычно не может быть невырожденной. Мы видели даже, что возможно и такое неравенство $\mathrm{d}(p, p) > 0$. Но если $(M, g)$ — хронологическое, то $\mathrm{d}(p, p) = 0$ для всех $p \in M$. Кроме того, лоренцева функция расстояния имеет известную склонность к несимметричности. Более точно, для произвольных пространств можно показать справедливость следующего утверждения.

**Замечание 3.3.** *Если* $p \neq q$ *и оба расстояния* $\mathrm{d}(p, q)$ *и* $\mathrm{d}(q, p)$ *конечны, то либо* $\mathrm{d}(p, q) = 0$, *либо* $\mathrm{d}(q, p) = 0$. *Или, что равносильно, если* $d(p, q) > 0$ *и* $\mathrm{d}(q, p) > 0$, *то* $\mathrm{d}(p, q) = \mathrm{d}(q, p) = \infty$.

*Доказательство.* Если и $\mathrm{d}(p, q) > 0$, и $\mathrm{d}(q, p) > 0$, то можно указать направленные в будущее времениподобные кривые $\gamma_1$ из $p$ в $q$ и $\gamma_2$ из $q$ в $p$ соответственно. Положим $\gamma_n = \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_1)^n \in \Omega_{p, q}$. Так как $L(\gamma_n) \to \infty$ при $n \to \infty$, то $\mathrm{d}(p, q) = \infty$. Аналогично доказывается, что $\mathrm{d}(q, p) = \infty$. $\square$

Менее очевидным следствием определения 3.1 является такой факт: если $\gamma\colon [0, \infty) \to (M, g)$ — любая направленная в будущее

полная в будущем времениподобная геодезическая в произвольном пространстве-времени $(M, g)$, то

$$\lim_{t\to\infty} d(\gamma(0), \gamma(t)) \geqslant \lim_{t\to\infty} L(\gamma|[0, t]) = \infty.$$

С другой стороны, полное риманово многообразие $(N, g_0)$ может содержать (незамкнутые) геодезические $\sigma$: $[0, \infty) \to (N, g_0)$, для которых $\sup\{d_0(\sigma(0), \sigma(t)): t \geqslant 0\}$ конечна. Для того чтобы гарантировать для всех геодезических $\sigma$: $[0, \infty) \to (N, g_0)$ в римановых многообразиях предельное соотношение $\lim\limits_{t\to\infty} d(\sigma(0), \sigma(t)) = \infty$, необходимы дальнейшие допущения (см. Чигер и Эбин (1975, с. 53 и 151)).

Хотя лоренцева функция расстояния не может быть симметричной и невырожденной, выполняется по крайней мере обратное неравенство треугольника (см. рис. 1.3). Именно

$$\text{если } p \leqslant r \leqslant q, \text{ то } d(p, q) \geqslant d(p, r) + d(r, q). \tag{3.3}$$

Рассмотрим теперь некоторые свойства лоренцева расстояния, которые делают его полезным инструментом в общей теории относительности и в лоренцевой геометрии. Прежде всего лоренцева функция расстояния полунепрерывна снизу там, где она конечна (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 237)).

**Лемма 3.4.** *Если* $d(p, q) < \infty$ *и* $p_n \to p$, $q_n \to q$, *то* $d(p, q) \leqslant \underline{\lim}\, d(p_n, q_n)$. *Если же* $d(p, q) = \infty$ *и* $p_n \to p$, $q_n \to q$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} d(p_n, q_n) = \infty$.

*Доказательство.* Рассмотрим сначала случай, когда $d(p, q) < \infty$. Если $d(p, q) = 0$, то утверждение леммы не вызывает сомнений. Пусть $d(p, q) > 0$. Тогда $q \in I^+(p)$ и полунепрерывность снизу вытекает из того, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти времениподобную кривую $\gamma$ длины $d(p, q) - \varepsilon/2$, идущую из $p$ в $q$, и достаточно малые окрестности $U_1$ точки $p$ и $U_2$ точки $q$ так, что $\gamma$ можно продеформировать во времениподобную кривую, связывающую произвольную точку $r$ из $U_1$ с произвольной точкой $s$ из $U_2$ и имеющую длину, не меньшую $d(p, q) - \varepsilon$.

Предположим теперь, что $d(p, q) = \infty$, но $\underline{\lim}\, d(p_n, q_n) = R < \infty$. Вследствие того что $d(p, q) = \infty$, найдется времениподобная кривая $\gamma$ из $p$ в $q$ длины $L(\gamma) > R + 2$. Это означает, что существуют окрестности $U_1$ и $U_2$ точек $p$ и $q$ соответственно, такие, что кривую $\gamma$ можно продеформировать во времениподобную кривую длины, не меньшей $R + 1$, идущую из произвольной точки $r$ окрестности $U_1$ в произвольную точку $s$ из $U_2$. Это противоречит тому, что $\underline{\lim}\, d(p_n, q_n) = R$. □

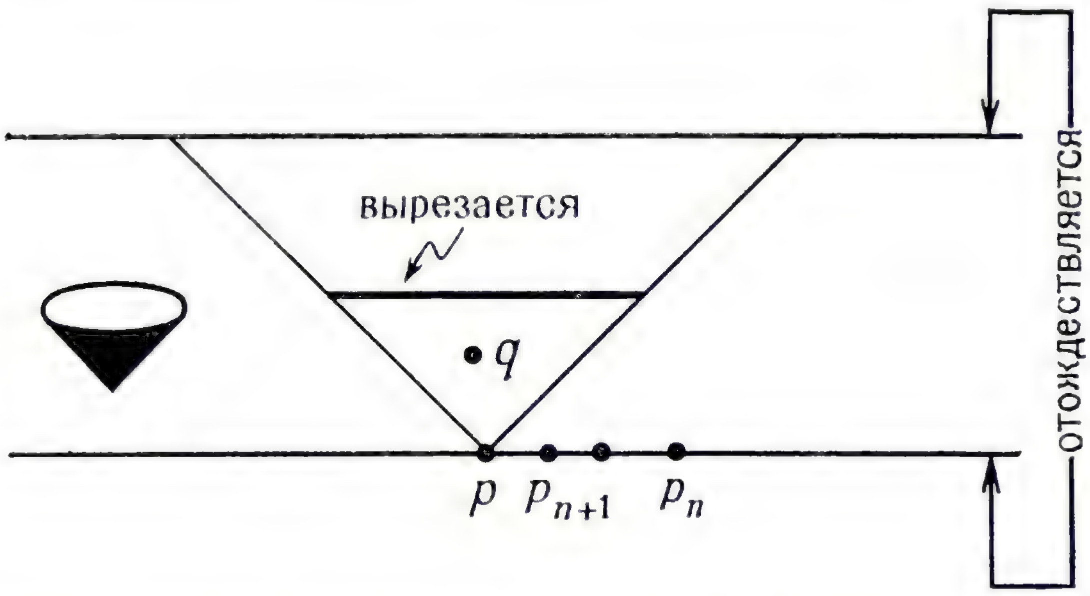



Рис. 3.3. Показано пространство-время $(M, ds^2)$, где $M$ — множество $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leqslant y \leqslant 2\} \setminus \{(x, 1): -1 \leqslant x \leqslant 1\}$, в котором точки $(x, 0)$ и $(x, 2)$ отождествляются, и $ds^2 = dx^2 - dy^2$ — плоская лоренцева метрика. Пусть $p = (0, 0)$, $q = (0, 1/2)$ и $p_n \to p$, как показано. Тогда $p_n \in I^+(p_n)$ и, значит, $d(p_n, p_n) = \infty$ для всех $n$. Для больших $n$ $q \in I^+(p_n)$, и поэтому $d(p_n, q) = \infty$. С другой стороны, из $d(p, q) = 1/2$ получаем, что $d(p, q) < \underline{\lim}\, d(p_n, q)$. Это пространство-время не является причинным. Однако функция расстояния может не быть полунепрерывной сверху и в причинных пространствах (см. рис. 3.6).

Полунепрерывной сверху лоренцева функция расстояния, вообще говоря, может не быть. Мы приведем пример пространства-времени $(M, g)$, содержащего бесконечную последовательность точек $p_n \to p$ и точку $q \in I^+(p)$, такие, что $d(p_n, q) = \infty$ для всех больших $n$, но $d(p, q) < \infty$ (рис. 3.3).

С другой стороны, для глобально гиперболических пространств лоренцева функция расстояния так же, как и риманова функция расстояния, конечна и непрерывна.

**Лемма 3.5.** *Если $(M, g)$ — глобально гиперболическое пространство-время, то лоренцева функция расстояния конечна и непрерывна на $M \times M$.*

*Доказательство.* Чтобы доказать конечность d, покроем компактное множество $J(p) \cap J(q)$ конечным числом выпуклых нормальных окрестностей $B_1, B_2, \ldots, B_m$ так, что никакая непространственноподобная кривая, покидающая произвольную окрестность $B_i$, никогда в нее не возвращается и каждая непространственноподобная кривая в любой $B_i$ имеет длину не больше единицы. Вследствие того что произвольная непространственноподобная кривая $\gamma$ из $p$ в $q$ может входить в каждую окрестность $B_i$ не более одного раза, ее длина $L(\gamma) \leqslant m$. Тем самым $d(p, q) \leqslant m$ и d конечна.

Если d не является полунепрерывной сверху в $(p, q) \in M \times M$, то можно указать $\delta > 0$ и последовательности $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$, сходящиеся к $p$ и $q$ соответственно и такие, что $d(p_n, q_n) \geqslant d(p, q) + 2\delta$ для всех $n$. По определению $d(p_n, q_n)$ тогда существует (для каждого $n$) направленная в будущее непространствен-

ноподобная кривая $\gamma_n$ из $p_n$ в $q$, длина которой $L(\gamma_n) \geq d(p, q) + \delta$. Согласно следствию 2.19, последовательность $\{\gamma_m\}$ имеет непространственноподобную предельную кривую $\gamma$, идущую из $p$ в $q$, а по предложению 2.21 некоторая подпоследовательность $\{\gamma_m\}$ последовательности $\{\gamma_n\}$ сходится к $\gamma$ в $C^0$-топологии. Отсюда $L(\gamma) \geq d(p, q) + \delta$ в соответствии с замечанием 2.22. Но это противоречит определению лоренцева расстояния. Поэтому функция d полунепрерывна сверху в точке $(p, q)$. $\square$

Определим теперь следующее понятие (см. Бим и Эрлих (1977, условие 4)).

**Определение 3.6.** Будем говорить, что пространство-время $(M, g)$ удовлетворяет *условию конечности расстояния*, если $d(g)(p, q) < \infty$ для всех $p, q \in M$.

Тогда из леммы 3.5 вытекает

**Следствие 3.7.** *Если* $(M, g)$ *глобально гиперболично, то оно удовлетворяет условию конечности расстояния и функция* $d(g): M \times M \to \mathbb{R}$ *непрерывна.*

Если $(M, g)$ глобально гиперболично, то и все метрики из конформного класса $C(M, g)$ являются глобально гиперболичными. Отсюда следует, что все метрики из $C(M, g)$ удовлетворяют условию конечности расстояния. Обращение этого утверждения мы разберем в разд. 3.3 (теорема 3.30).

Поскольку исходная топология гладкого многообразия совпадает с метрической топологией, индуцированной произвольной римановой метрикой, то для лоренцева многообразия представляется естественным рассмотрение множеств вида $\{m \in I^+(p): d(p, m) < \varepsilon\}$. Однако, как показывает пример пространства Минковского, эти множества не образуют базиса исходной топологии многообразия (рис. 3.4). Фактически тот же самый пример показывает, что вне зависимости от малости $\varepsilon > 0$ множества $\{m \in J^+(p): d(p, m) \leq \varepsilon\}$ могут не быть ни компактными, ни геодезически выпуклыми, так же как они могут не быть диффеоморфными замкнутому $n$-диску.

Сфера радиуса $\varepsilon$ с центром в точке $p \in M$ задается формулой $K(p, \varepsilon) = \{q \in M: d(p, q) = \varepsilon\}$. Это множество не обязательно компактно. Однако из обратного неравенства треугольника и соотношения (3.2) вытекает, что $K(p, \varepsilon)$ является ахрональным для всех конечных $\varepsilon > 0$ и всех $p \in M$.

В произвольных пространствах *внутренний шар* будущего (соответственно прошлого) $B^+(p, \varepsilon) = \{q \in I^+(p): d(p, q) < \varepsilon\}$ (соответственно $B^-(p, \varepsilon) = \{q \in I^-(p): d(q, p) < \varepsilon\}$) не обязательно открыт. С другой стороны, если функция расстояния $d: M \times M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ непрерывна, то эти внутренние шары должны быть открытыми. В разд. 3.3 мы покажем, что для раз-

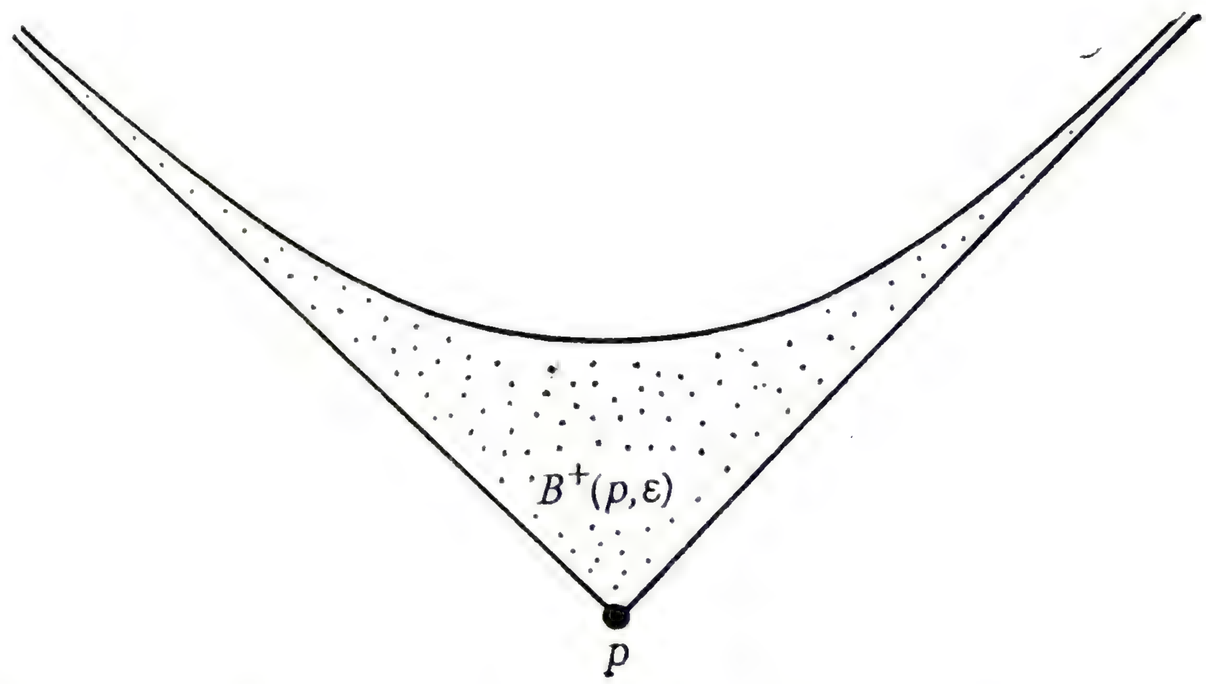



Рис. 3.4. Множество $B^+(p, \varepsilon) = \{q \in I^+(p): d(p, q) < \varepsilon\}$ в пространстве-времени Минковского не имеет компактного замыкания, не является геодезически выпуклым и не содержит точку $p$. Более того, множества вида $B^+(p, \varepsilon)$ не образуют базиса топологии этого многообразия. Однако в общем случае, когда $(M, g)$ является различающим пространством-временем с непрерывной функцией лоренцева расстояния, то подбазис топологии многообразия образуют множества вида $B^+(p, \varepsilon)$ и $B^-(p, \varepsilon)$ (см. предложение 3.31). Отсюда, в частности, следует, что эти множества должны образовывать подбазис исходной топологии пространства-времени Минковского.

личающих пространств с непрерывными функциями расстояния внутренние шары прошлого и будущего образуют подбазис топологии многообразия.

Другой подбазис для топологии любого сильно причинного пространства-времени $(M, g)$ с возможно разрывной функцией расстояния $d = d(g): M \times M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ можно получить, используя вместо внутренних шаров внешние шары $O^+(p, \varepsilon)$ и $O^-(p, \varepsilon)$.

**Определение 3.8.** *Внешний шар* $O^+(p, \varepsilon)$ (соответственно $O^-(p, \varepsilon)$) множества $I^+(p)$ (соответственно $I^-(p)$) задается следующей формулой:

$$O^+(p, \varepsilon) = \{q \in M: d(p, q) > \varepsilon\}$$

(соответственно:

$$O^-(p, \varepsilon) = \{q \in M: d(q, p) > \varepsilon\})$$

(рис. 3.5).

Так как лоренцева функция расстояния полунепрерывна снизу там, где она конечна, то внешние шары $O^+(p, \varepsilon)$ и $O^-(p, \varepsilon)$ в произвольном пространстве-времени открыты. Из обратного неравенства треугольника вытекает следующее свойство: если $m, n \in O^+(p, \varepsilon)$ (соответственно $m, n \in O^-(p, \varepsilon)$) и $m \leqslant n$, то любая направленная в будущее непространственноподобная кривая из $m$ в $n$ лежит в $O^+(p, \varepsilon)$ (соответственно в $O^-(p, \varepsilon)$). Более того, справедливо следующее утверждение.

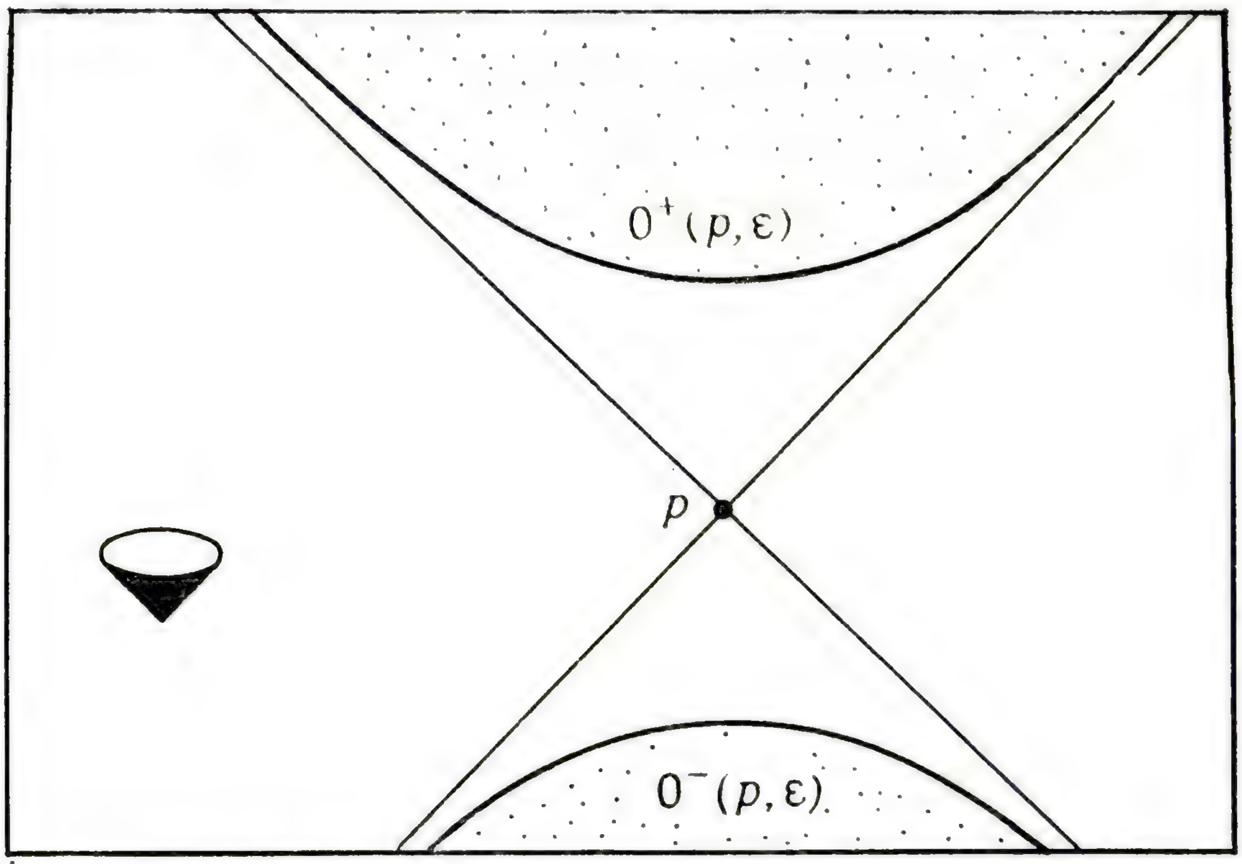



Рис. 3.5. Внешние шары $O^+(p, \varepsilon) = \{q \in M: d(p, q) > \varepsilon\}$ и $O^-(p, \varepsilon) = \{q \in M: d(q, p) > \varepsilon\}$ открыты в произвольном пространстве-времени. Кроме того, $O^+(p, \varepsilon)$ и $O^-(p, \varepsilon)$ всегда являются подмножествами множеств $I^+(p)$ и $I^-(p)$ соответственно. Если $(M, g)$ сильно причинно, то внешние шары $O^+(p, \varepsilon)$ и $O^-(p, \varepsilon)$, где $p \in M$ и $\varepsilon > 0$ произвольны, образуют подбазис топологии многообразия.

**Теорема 3.9.** *Пусть* $(M, g)$ *сильно причинно. Тогда набор* $\{O^+(p, \varepsilon_1) \cap O^-(q, \varepsilon_2): p, q \in M, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0\}$ *образует базис исходной топологии многообразия.*

*Доказательство.* Обозначим через $U$ произвольную открытую окрестность точки $m \in M$. Можно указать локально причинную окрестность $U_1$, для которой $m \in U_1 \subset U$, т. е. никакая непространственноподобная кривая, покидающая $U_1$, никогда не возвращается. Выберем $p_1, p_2 \in U_1$ так, чтобы $p_1 \ll m \ll p_2$ и $I^+(p_1) \cap I^-(p_2) \subset U_1$. В соответствии с хронологическими допущениями относительно $p_1$ и $p_2$ получаем, что $\mathrm{d}(p_1, m) > 0$ и $\mathrm{d}(m, p_2) > 0$. Выберем постоянные $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$, исходя из следующих условий: $0 < \varepsilon_1 < \mathrm{d}(p_1, m)$ и $0 < \varepsilon_2 < \mathrm{d}(m, p_2)$. Тогда $m \in O^+(p_1, \varepsilon_1) \cap O^-(p_2, \varepsilon_2)$. Из включений $O^+(p_1, \varepsilon_1) \subset I^+(p_1)$ и $O^-(p_2, \varepsilon_2) \subset I^-(p_2)$ получаем, что $O^+(p_1, \varepsilon_1) \cap O^-(p_2, \varepsilon_2) \subset I^+(p_1) \cap I^-(p_2) \subset U_1 \subset U$, как и требуется. □

В полном римановом многообразии любые две точки можно соединить минимальным (реализующим расстояние) геодезическим сегментом. Исследуем теперь соответствующее свойство для пространства-времени.

Хокинг и Эллис (1977, с. 125) называют времениподобную геодезическую $\gamma$, соединяющую $p$ и $q$, максимальной, если ее индексная форма отрицательно полуопределена. Это означает, что если геодезическая $\gamma$ *не* максимальна, то существуют вариации $\gamma$,

которые дают кривые, проходящие из $p$ в $q$ «близко» от $\gamma$ и имеющие лоренцеву длину, большую, чем у $\gamma$. Но если $\gamma$ максимальна в указанном выше смысле, то никакая малая вариация $\gamma$, сохраняющая фиксированные точки $p$ и $q$, не дает времениподобных кривых $\sigma$ из $p$ в $q$, имеющих лоренцеву длину $L(\sigma) > L(\gamma)$. Тем не менее в $M$ может существовать геодезическая $\sigma_1$, идущая из $p$ в $q$ («далеко» от $\gamma$) и такая, что $d(p, q) = L(\sigma_1) > L(\gamma)$. Поэтому максимальность, как она определена Хокингом и Эллисом, не означает «максимальности в большом». Чтобы исследовать «максимальность в большом», мы примем на вооружение по аналогии с понятием минимальности в римановой геометрии определение максимальности, привлекая все кривые из пространства путей $\Omega_{p,q}$ (см. Бим и Эрлих (1977, определение 1)). Обоснованием нашего определения может служить излагаемая ниже теорема 3.13 (см. Бим и Эрлих (1979a, с. 166)) и ее приложения, в частности построение геодезических как предельных кривых для последовательностей «почти максимальных» кривых (гл. 7) и определение лоренцева множества раздела (гл. 8).

**Определение 3.10.** Пусть $p, q \in M$, причем $p \leqslant q$ и $p \neq q$. Кривая $\gamma \in \Omega_{p,q}$ называется *максимальной*, если $L(\gamma) = d(p, q)$.

Непосредственным следствием обратного неравенства треугольника является

**Замечание 3.11.** Если $\gamma\colon [0, 1] \to M$ из $\Omega_{p,q}$ максимальна, то для любых $s, t$, связанных условием $0 \leqslant s < t \leqslant 1$, имеем $d(\gamma(s), \gamma(t)) = L(\gamma|[s, t])$.

Следующий результат, полученный несколько иначе Пенроузом (1972, предложение 7.2), является аналогом того принципа в римановой геометрии, что геодезические «локально» минимизируют длину (см. Бишоп и Криттенден (1967, с. 189, теорема 2)).

**Предложение 3.12.** *Пусть $U$ — выпуклая нормальная окрестность с базовой точкой $p \in M$. Обозначим через $\overline{pq}$, где $q \in J^+(p)$, единственную непространственноподобную геодезическую $c\colon [0, 1] \to U$, для которой $c(0) = p$, $c(1) = q$. Если $\gamma$ — произвольная направленная в будущее непространственноподобная кривая в $U$, идущая из $p$ в $q$, длина которой $L(\gamma) = d(p, q)$, то $\gamma$ совпадает с $\overline{pq}$ с точностью до параметризации.*

*Доказательство.* Для случая, когда $q \in I^+(p)$ и $d(p, q) > 0$, Пенроуз (1972, с. 53) показал, используя синхронную координатную систему, что если $\gamma$ — произвольный причинный путь в $U$ из $p$ в $q$, отличный от $\overline{pq}$, то $L(\gamma) < L(\overline{pq}) = d(p, q)$. Этот результат можно получить также, используя лемму Гаусса (см. следствие 9.19 разд. 9.1). Таким образом, для $d(p, q) > 0$ утверждение доказано.

Предположим теперь, что $d(p, q) = 0$. Пусть $\gamma$ — произвольная непространственноподобная кривая в $U$ из $p$ в $q$. Тогда $L(\gamma) \leqslant d(p, q) = 0$. Поэтому $\gamma$: $[0, 1] \to M$ — изотропная кривая. Предположим, что $\gamma(t) \notin \operatorname{Int}(\overline{pq})$. Обозначим через $\gamma_1$ однозначно определяемую изотропную геодезическую в $U$, идущую из $p$ в $\gamma(t)$, а через $\gamma_2$ однозначно определяемую изотропную геодезическую в $U$, идущую из $\gamma(t)$ в $q$. Согласно предложению 2.19 Пенроуза (1972, с. 15), либо $\gamma_1 * \gamma_2$ — гладкая изотропная геодезическая, либо $p \ll q$. Вследствие того что $d(p, q) = 0$, последнее невозможно. Отсюда вытекает, что $\gamma_1 * \gamma_2$ — гладкая изотропная геодезическая, которая в силу выпуклости $U$ должна совпадать с $\overline{pq}$ с точностью до параметризации. □

Доказанное предложение имеет важное следствие.

**Теорема 3.13.** *Если $\gamma \in \Omega_{p,q}$ и выполняется равенство $L(\gamma) = d(p, q)$, то $\gamma$ можно перепараметризовать так, чтобы получилась гладкая геодезическая.*

*Доказательство.* Зафиксируем на $\gamma$ произвольную точку $\gamma(t)$. Можно указать $\delta > 0$ так, чтобы выпуклая окрестность с базовой точкой $\gamma(t + \delta)$ содержала $\gamma([t - \delta, t + \delta])$. Согласно замечанию 3.11, кривая $\gamma | [t - \delta, t + \delta]$ максимальна. Поэтому предложение 3.12 обеспечивает возможность перепараметризации $\gamma | [t - \delta, t + \delta]$ в гладкую геодезическую. Ввиду произвольности выбора $t$ теорема доказана. □

В качестве примера использования определения 3.10 и теоремы 3.13 приведем простое доказательство основного результата элементарной теории причинности (см. Пенроуз (1972, предложение 2.20)), который обычно получают другими методами.

**Следствие 3.14.** *Если $p \leqslant q$, но не выполняется $p \ll q$, то существует изотропная геодезическая, идущая из $p$ в $q$.*

*Доказательство.* Согласно предположениям причинности, сделанным относительно $p$ и $q$, выполняется равенство $d(p, q) = 0$. Пусть $\gamma$ — направленная в будущее непространственноподобная кривая из $p$ в $q$. По определению лоренцева расстояния $d(p, q) \geqslant L(\gamma) \geqslant 0$. Поэтому $L(\gamma) = d(p, q) = 0$ и $\gamma$ максимальна. По теореме 3.13 кривую $\gamma$ можно перепараметризовать в гладкую геодезическую $c$: $[0, 1] \to M$ из $p$ в $q$. Вследствие неравенства $L(c) \leqslant d(p, q) = 0$ эта геодезическая $c$ должна быть изотропной. □

В качестве второго примера использования элементарных свойств функции расстояния приведем доказательство существования гладкой замкнутой времениподобной геодезической на любом компактном пространстве-времени, имеющем регулярное

накрытие с компактной поверхностью Коши. Используя бесконечномерную теорию Морса (см. Клингенберг (1982)), можно показать, что любое компактное риманово многообразие допускает по крайней мере одну гладкую замкнутую геодезическую. Однако метод доказательства существенно опирается на положительную определенность метрики и потому неприменим к лоренцевым многообразиям. Тем не менее прямыми методами можно получить следующую теорему Типлера (см. Типлер (1979), где доказан более сильный результат).

**Теорема 3.15.** *Пусть* $(M, g)$ — *компактное пространство-время с регулярным накрывающим пространством, которое глобально гиперболично и имеет компактную поверхность Коши. Тогда* $(M, g)$ *содержит замкнутую времениподобную геодезическую.*

*Доказательство.* Вследствие компактности $M$ существует замкнутая направленная в будущее времениподобная кривая $\gamma\colon [0, 1] \to M$. Пусть $p = \gamma(0) = \gamma(1)$. Обозначим через $\pi\colon \tilde{M} \to M$ заданное накрывающее многообразие, а через $\tilde{\gamma}\colon [0, 1] \to \tilde{M}$ поднятие $\gamma$, т. е. $\pi \circ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ для всех $t \in [0, 1]$. Тогда $\tilde{\gamma}$ — направленная в будущее времениподобная замкнутая кривая в $\tilde{M}$. Положим $p_1 = \tilde{\gamma}(0)$, $p_2 = \tilde{\gamma}(1)$. Из глобальной гиперболичности $M$ вытекает, что $p_1$ и $p_2$ — различные точки, которые не могут лежать на общей для них поверхности Коши. В силу того что накрытие $\pi\colon \tilde{M} \to M$ регулярно, должно существовать преобразование накрытия $\psi\colon \tilde{M} \to \tilde{M}$, переводящее $p_1$ в $p_2$ (см. Вольф (1982, с. 53—56, 78)). Выберем компактную поверхность Коши $S_1$ накрытия $M$, содержащую $p_1$, и положим $S_2 = \psi(S_1)$. Вследствие того что $(\tilde{M}, \tilde{g})$ глобально гиперболично, функция расстояния $d = d(\tilde{g})\colon \tilde{M} \times \tilde{M} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ принимает конечные значения и непрерывна. Поэтому посредством формулы $f(s) = d(s, \psi(s))$ определяется непрерывная функция $f\colon S_1 \to \mathbb{R}$. Заметим, что $A = \sup\{d(s, \psi(s))\colon s \in S_1\} > 0$ вследствие того, что $f(p_1) > 0$. Более того, в силу компактности $S_1$ $A < \infty$ и существует $r_1 \in S_1$, для которой $d(r_1, \psi(r_1)) = A$. Пусть $\tilde{c}\colon [0, 1] \to \tilde{M}$ — времениподобный геодезический сегмент, такой, что $\tilde{c}(0) = r_1$, $\tilde{c}(1) = \psi(r_1)$ и $L(c) = d(r_1, \psi(r_1)) = A$. Эта геодезическая существует вследствие того, что $(M, g)$ глобально гиперболично. Так как $\tilde{g} = \pi^* g$, то $c = \pi \circ \tilde{c}\colon [0, 1] \to M$ — времениподобная геодезическая, у которой в силу равенств $\tilde{c}(0) = r_1$, $\tilde{c}(1) = \psi(r_1)$ $c(0) = c(1)$. Если $c$ не является гладкой в $c(0)$, то ее можно продеформировать во времениподобную кривую $\sigma\colon [0, 1] \to M$ со следующими свойствами: $L_g(\sigma) > L(c)$, $\sigma(0) = \sigma(1) \in \pi(S_1)$; при этом кривую $\sigma$ можно поднять до кривой $\tilde{\sigma}\colon [0, 1] \to \tilde{M}$,

у которой $\tilde{\sigma}(0) \in S_1$, $\tilde{\sigma}(1) = \psi(\tilde{\sigma}(0)) \in S_2$. Но тогда $L_{\tilde{g}}(\tilde{\sigma}) = L_g(\sigma) > L_g(c) = L_{\tilde{g}}(\tilde{c}) = A$, что и приводит к противоречию. □

## 3.2. Изометрические и гомотетические отображения

Майерс и Стинрод (1939) и Палэ (1957) показали, что если отображение $f$ риманова многообразия $(N_1, g_1)$ на риманово многообразие $(N_2, g_2)$ сохраняет расстояние, то $f$ является диффеоморфизмом, сохраняющим метрические тензоры, т. е. $f^*g_2 = g_1$. В частности, каждое отображение $(N_1, g_1)$ на себя, сохраняющее расстояние, является гладкой изометрией. В этом разделе, следуя Биму (1978а), мы приведем аналогичные результаты для лоренцевых многообразий.

Напомним, что диффеоморфизм $f: (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ лоренцева многообразия $(M_1, g_1)$ на лоренцево многообразие $(M_2, g_2)$ называется *гомотетичным*, если существует постоянная $c > 0$, такая, что $g_2(f_*v, f_*w) = cg_1(v, w)$ для любых $v, w \in T_pM_1$ и $p \in M_1$. В частности, если $c = 1$, то $f$ — (гладкая) изометрия. Группа гомотетических преобразований важна в общей теории относительности вследствие того, что, как было показано Зиманом (1964) и Гебелем (1976), она является группой преобразований, сохраняющих причинную структуру большого класса пространств.

Обозначим через $d_1$ лоренцеву функцию расстояния на $(M_1, g_1)$, а через $d_2$ лоренцеву функцию расстояния на $(M_2, g_2)$. Аналог гладкого гомотетического отображения для расстояния определяется следующим образом.

**Определение 3.16.** Отображение $f: (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ называется *гомотетично преобразующим расстояние*, если существует постоянная $c > 0$, такая, что $d_2(f(p), f(q)) = cd_1(p, q)$ для всех $p, q \in M_1$. Если $c = 1$, то отображение $f$ называют *сохраняющим расстояние*.

Важно отметить, что для произвольных лоренцевых многообразий сохранение расстояния не означает непрерывности отображения. Как мы видели, если $(M, g)$ — полностью искаженное пространство-время, то $d(p, q) = \infty$ для любых $p, q \in M$ (см. лемму 3.2 (б)). Отсюда следует, что любая теоретически мыслимая биекция $f: M \to M$ сохраняет расстояния, но не обязана быть непрерывной.

**Теорема 3.17.** *Пусть $(M_1, g_1)$ — сильно причинное пространство-время, а $(M_2, g_2)$ — произвольное пространство-время. Если отображение $f: (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ является гомотетично преобразующим расстояние ($f$ не предполагается непрерывным), то $f$*

*является гладким гомотетическим отображением, т. е. $f$ — диффеоморфизм, и существует постоянная $c > 0$, такая, что $f^* g_2 = c g_1$. В частности, каждое отображение сильно причинного пространства-времени на себя, которое сохраняет лоренцево расстояние, является изометрией.*

**Следствие 3.18.** *Если $(M, g)$ — сильно причинное пространство-время, то пространство отображений $(M, g)$ на себя, гомотетично преобразующих расстояние, наделенное компактно-открытой топологией, является группой Ли.*

*Доказательство следствия 3.18.* Так как $(M, g)$ сильно причинно, то эта группа по теореме 3.17 совпадает с пространством гладких гомотетических отображений $M$ на себя, сохраняющих ориентацию во времени. А последняя является группой Ли. □

Доказательство теоремы 3.17 разобьем на несколько лемм.

**Лемма 3.19.** *Пусть $(M_1, g_1)$ и $(M_2, g_2)$ — два пространства-времени и $f: (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ — сюръективное (не обязательно непрерывное) отображение. Если $f$ является гомотетично преобразующим расстояние, то*

(а) *$p \ll q$ тогда и только тогда, когда $f(p) \ll f(q)$.*

(б) *$f(I^+(p) \cap I^-(q)) = I^+(f(p)) \cap I^-(f(q))$.*

*Доказательство.* Первое утверждение (а) выполняется вследствие того, что $d_2(f(p), f(q)) = c d_1(p, q)$ и $p \ll q$ (соответственно $f(p) \ll f(q)$), тогда и только тогда, когда $d_1(p, q) > 0$ (соответственно $d_2(f(p), f(q)) > 0$). Из того, что (а) обеспечивает справедливость отношений $p \ll r \ll q$ в том и только том случае, когда $f(p) \ll f(r) \ll f(q)$, получаем утверждение (б). □

Утверждение (*б*) важно вследствие того, что если $(M, g)$ сильно причинно, то множества $\{I^+(p) \cap I^-(q): p, q \in M\}$ образуют базис топологии на $M$. Напомним, что отображение $f: M_1 \to M_2$ называется *открытым*, если $f$ переводит каждое открытое множество из $M_1$ в открытое множество из $M_2$.

**Лемма 3.20.** *Пусть $(M_1, g_1)$ — сильно причинное пространство-время, а $(M_2, g_2)$ — произвольное пространство-время. Если $f$ — отображение $(M_1, g_1)$ на $(M_2, g_2)$ (не обязательно непрерывное), гомотетично преобразующее расстояние, то $f$ открыто и взаимно однозначно.*

*Доказательство.* Открытость $f$ немедленно вытекает из утверждения (б) леммы 3.19. Остается показать, что $f$ является взаимно однозначным. Предположим противное: найдутся точки $p$ и $q$ из $M_1$, такие, что $f(p) = f(q)$. Пусть $U(p)$ — открытая окрестность $p$, не содержащая $q$ и такая, что никакая непространственноподобная кривая не пересекает $U(p)$ более чем один раз. Выберем

$r_1$, $r_2 \in U(p)$ так, чтобы $r_1 \ll p \ll r_2$. Ясно, что $q \notin I^+(r_1) \cap \cap I^-(r_2)$. Согласно лемме 3.19, из $f(r_1) \ll f(p) = f(q) \ll f(r_2)$ вытекает, что $r_1 \ll q \ll r_2$. Это означает, что $q \in I^+(r_1) \cap I^-(r_2)$, и требуемое противоречие получено. □

Прилагая результаты леммы 3.20 к $f$ и $f^{-1}$, получим

**Предложение 3.21.** *Пусть* $(M_1, g_1)$ — *сильно причинное пространство-время,* $(M_2, g_2)$ — *произвольное пространство-время и* $f$ — *не обязательно непрерывное отображение* $M_1$ *на* $M_2$. *Если* $f$ *является гомотетично преобразующим расстояние, то* $f$ — *гомеоморфизм и* $(M_2, g_2)$ *сильно причинно.*

*Доказательство.* Отображение $f^{-1}$ существует в силу того, что по лемме 3.20 $f$ взаимно однозначно. Более того, $f^{-1}$ непрерывно, так как по той же лемме 3.20 отображение $f$ открыто.

Чтобы завершить доказательство, достаточно убедиться в том, что $M_2$ сильно причинно, так как тогда в силу леммы 3.20 можно утверждать, что $f^{-1}$ — открытое отображение и, следовательно, $f$ непрерывно. Взяв $p' \in M_2$, положим $p = f^{-1}(p')$. Если $r' \ll \ll p' \ll q'$, то, применяя лемму 3.19 к отображению $f^{-1}$, гомотетично преобразующему расстояние, получаем, что $f^{-1}(r') \ll \ll p \ll f^{-1}(q')$. Пусть $U'(p')$ — открытая окрестность точки $p'$. Выберем $V'(p') \subset U'(p')$ так, чтобы замыкание $\overline{V'(p')}$ было компактным множеством, вмещающимся в открытую выпуклую нормальную окрестность $W'(p')$ точки $p'$. Можно считать, что $(W'(p'), g_2 | W'(p'))$ глобально гиперболично. Пусть $\{r'_n\}$ и $\{q'_n\}$ — последовательности в $V'(p')$, сходящиеся к $p'$, $r'_n \to p'$, $q'_n \to p'$, и такие, что $r'_n \ll p' \ll q'_n$ для всех $n$. Предположим, что сильная причинность $M_2$ нарушается в точке $p'$. Это означает, что для каждого $n$ множество $I^+(r'_n) \cap I^-(q'_n)$ не может содержаться в выпуклой нормальной окрестности $W'(p')$, так как в противном случае множества $I^+(r'_n) \cap I^-(q'_n)$ дали бы произвольно малые окрестности точки $p'$, которые каждая непространственноподобная кривая пересекает самое большее один раз. Выберем последовательность точек $\{z'_n\}$, содержащихся в границе $V'(p')$ и таких, что $z'_n \in \in I^+(r'_n) \cap I^-(q'_n)$ для каждого $n$. Последовательность $\{z'_n\}$ имеет точку накопления $z$, потому что замыкание $\overline{V'(p')}$ компактно. Кроме того, $f^{-1}(z'_n) \in f^{-1}(I^+(r'_n) \cap I^-(q'_n)) = I^+(f^{-1}(r'_n)) \cap \cap I^-(f^{-1}(q'_n))$. Непрерывность $f^{-1}$ означает, что $f^{-1}(r'_n) \to p$ и $f^{-1}(q'_n) \to q$, а сильная причинность приводит к тому, что множества $I^+(f^{-1}(r'_n)) \cap I^{-1}(f^{-1}(q'_n))$ подходят близко к точке $p$. Поэтому $f^{-1}(z'_n) \to p$, откуда следует равенство $f^{-1}(z) = p = f^{-1}(p')$, которое противоречит взаимной однозначности $f^{-1}$. Следовательно, $M_2$ обязано быть сильно причинным, и предложение доказано. □

Рассмотрим сильно причинное пространство-время $M$. Возьмем $p \in M$ и построим ее выпуклую нормальную окрестность $U(p)$. Множество $U(p)$ можно выбрать столь малым, что если $q, r \in U(p)$ и связаны отношением $q \leqslant r$, то расстояние $\mathrm{d}(q, r)$ равно длине единственного геодезического сегмента $\alpha(q, r)$ с концами $q$ и $r$, лежащего в $U(p)$. Более того, $U(p)$ можно выбрать так, что если $q, z, r \in U(p)$ связаны соотношением $q \ll z \ll r$, то обратное неравенство треугольника $\mathrm{d}(q, r) \geqslant \mathrm{d}(q, z) + \mathrm{d}(z, r)$ обращается в точное равенство тогда и только тогда, когда $z$ лежит на геодезическом сегменте с концами $q$ и $r$, лежащем в $U(p)$. Таким образом, времениподобные геодезические в сильно причинном пространстве-времени описываются при помощи функции расстояния, а отображения, гомотетично преобразующие расстояния, переводят времениподобные геодезические во времениподобные геодезические.

**Лемма 3.22.** *Если отображение $f$, гомотетично преобразующее расстояние, определено на сильно причинном пространстве-времени, то $f$ переводит изотропные геодезические в изотропные геодезические.*

*Доказательство.* Пусть $U(p)$ — выпуклая нормальная окрестность точки $p$, выбранная, как и в абзаце, предшествующем формулировке леммы, достаточно мала, так что $f(U(p))$ лежит в выпуклой нормальной окрестности точки $f(p)$. Пусть далее $\alpha(q, r)$ — изотропная геодезическая в $U(p)$. Выберем $q_n \to q$ и $r_n \to r$, связанные отношением $q_n \ll r_n$, где $n$ любое. Тогда из предложения 3.21 вытекает, что $f(q_n) \to f(q)$ и $f(r_n) \to f(r)$. Отображение $f$ переводит времениподобную геодезическую $\alpha(q_n, r_n)$ с концами $q_n$ и $r_n$ во времениподобную геодезическую $\alpha(f(q_n), f(r_n))$. Вследствие сходимости геодезических $\alpha(q_n, r_n)$ к $\alpha(q, r)$ и геодезические $\alpha(f(q_n), f(r_n))$ сходятся к $\alpha(f(q), f(r))$. Это означает, что $f$ отображает $\alpha(q, r)$ в $\alpha(f(q), f(r))$. $\square$

*Доказательство теоремы 3.17.* То, что $f$ — диффеоморфизм, вытекает из результата, доказанного Хокингом, Кингом и Маккартни (1976), которые установили, что гомеоморфизм, переводящий изотропные геодезические в изотропные геодезические, должен быть диффеоморфизмом. Вследствие сильной причинности $M_1$ и $M_2$ для каждой точки $p \in M_1$ существует выпуклая нормальная окрестность $U_1(p)$, такая, что для точки $q \in U_1(p)$, подчиненной условию $p \ll q$, длины времениподобных геодезических $\alpha(p, q)$, соединяющих $p$ с $q$, и $\alpha(f(p), f(q))$, соединяющих $f(p)$ с $f(q)$, соответственно равны $\mathrm{d}_1(p, q)$ и $\mathrm{d}_2(f(p), f(q))$. Из того, что $\mathrm{d}_2(f(p), f(q)) = c\, \mathrm{d}_1(p, q)$, вытекает, что $f$ отображает $g_1$ на тензор $c^{-2}g$. $\square$

Хорошо известно, что если полное риманово многообразие не является локально плоским, то оно не допускает гомотетических отображений на себя, отличных от изометрий (см. Кобаяси и Номидзу (1981, с. 228, лемма 2)). Существенным местом в доказательстве этого факта является обоснование того, что любая гомотетия произвольного полного риманова многообразия, отличная от изометрии, имеет единственную неподвижную точку. Это можно сделать, применяя неравенство треугольника к римановой функции расстояния и используя метрическую полноту произвольного геодезически полного риманова многообразия.

Принимая во внимание теорему 3.17, интересно рассмотреть аналогичный вопрос о существовании гомотетических преобразований лоренцева многообразия, отличных от изометрических (см. Бим (1978б)). Ниже мы будем использовать стандартную терминологию, называя гомотетические преобразования, отличные от изометрических, *собственными*.

Заметим сначала, что $\mathbb{R}^2$ с лоренцевой метрикой $ds^2 = dxdy$ представляет собой пример глобально гиперболического геодезически полного пространства-времени, которое допускает собственное гомотетическое преобразование без неподвижных точек. Для произвольного фиксированного $\beta \neq 0$ и произвольно выбранного $c > 0$ отображение $f(x, y) = (x + \beta, cy)$ является гомотетическим отображением без неподвижных точек с коэффициентом гомотетии $c$. Поэтому в отличие от риманова случая для геодезически полных лоренцевых многообразий у собственно гомотетического отображения должно предполагаться наличие неподвижной точки.

Предположим, что $f$ является собственно гомотетическим преобразованием пространства-времени $(M, g)$, так что $f(p) = p$ для некоторой точки $p \in M$. Тогда $f_{*p} : T_pM \to T_pM$ имеет по крайней мере один непространственноподобный собственный вектор (см. Бим (1978б, с. 319, лемма 3)). Однако этот собственный вектор может быть изотропным. Например, соединяя лоренцеву изометрию

$$F(x, y) = (x \operatorname{ch} t + y \operatorname{sh} t,\ x \operatorname{sh} t + y \operatorname{ch} t),$$

где $t > 0$ фиксировано, многообразия $(\mathbb{R}^2, ds^2 = dx^2 - dy^2)$ и растяжение $T(x, y) = (cx, cy)$, $c > 0$, $c \neq 1$, получим собственное гомотетическое преобразование $f$ пространства-времени Минковского, сохраняющее начальную точку, так что $f_{*(0,0)}$ имеет изотропные собственные векторы.

Но если $f_{*p} : T_pM \to T_pM$ — собственно гомотетическое преобразование, имеющее времениподобный собственный вектор с собственным значением $\lambda < 1$, то можно показать, что $(M, g)$ является пространством-временем Минковского (см. Бим (1978б, с. 319,

предложение 4)). Также если $f$ — гомотетическое преобразование с неподвижной точкой $p$ и такое, что все собственные значения $f_{*p}$ вещественны и по абсолютной величине меньше единицы, то $(M, g)$ является пространством-временем Минковского (см. Бим (1978б, с. 316, теорема 1)).

Приведем пример неплоского пространства-времени, допускающего глобально гомотетическую деформацию. Пусть на $M = \mathbb{R}^3$ задана метрика $g = ds^2 = e^{xz}\,dxdy + dz^2$. Тогда если

$$v = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}, \quad w = \bar{a}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{b}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{c}\frac{\partial}{\partial z}$$

суть касательные векторы в точке $(x, y, z)$, то

$$g(v, w) = e^{xz}\frac{\bar{a}b + a\bar{b}}{2} + c\bar{c}.$$

Нетрудно проверить, что, хотя $(M, g)$ и неплоское, преобразование $\varphi_t\colon (\mathbb{R}^3, ds^2) \to (\mathbb{R}^3, ds^2)$, задаваемое формулой

$$\varphi_t(x, y, z) = (e^t x, e^{-3t}y, e^{-t}z),$$

является собственно гомотетией, у которой $g(\varphi_{t*}v, \varphi_{t*}w) = e^{-2t}g(v, w)$ для каждого фиксированного $t \neq 0$.

Однако сейчас мы покажем, что это пространство-время изотропно геодезически неполно. Пусть $X = \partial/\partial x$, $Y = \partial/\partial y$ и $Z = \partial/\partial z$. Тогда все скалярные произведения, кроме $g(X, Y) = e^{xz}/2$, $g(Z, Z) = -1$, обращаются в нуль и $[X, Y] = [X, Z] = 0$. Отсюда, используя соотношение

$$2g(\nabla_U V, W) = Ug(V, W) + Vg(U, W) - Wg(U, V) + g([U, V], W) - g([U, W], V) - g([V, W], U),$$

получим для связности Леви-Чивита пространства-времени следующие формулы:

$$\nabla_X X = zX, \quad \nabla_Y Y = \nabla_Z Z = 0,$$

$$\nabla_X Y = -\frac{x}{4}e^{xz}Z, \quad \nabla_X Z = \frac{x}{2}X, \quad \nabla_Y Z = \frac{x}{2}Y.$$

Таким образом, отличными от нуля являются только следующие символы Кристоффеля: $\Gamma_{11}^1 = z$, $\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = -\frac{x}{4}e^{xz}$, $\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = \frac{x}{2}$. Отсюда следует, что если $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ — геодезическая, то обычная система дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\circ\gamma(t)\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0$$

для $\gamma$ сводится к следующей системе:

$$x'' + z(x')^2 + xx'z' = 0,$$
$$y'' + xy'z' = 0,$$
$$z'' - \frac{e^{xz}}{2} xx'y' = 0.$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что $\gamma: (-1, \infty) \to (\mathbb{R}^3, ds^2)$, задаваемая по правилу $\gamma(t) = (\ln(1 + t), 0, 1)$, удовлетворяет этой системе дифференциальных уравнений, и, значит, существует единственная изотропная геодезическая, у которой $\gamma'(0) = \partial/\partial x|_{(0, 0, 1)}$. Поэтому пространство-время $(\mathbb{R}^3, ds^2)$ изотропно геодезически неполное.

## 3.3. Лоренцева функция расстояния и причинность

В этом разделе мы исследуем связь между причинной структурой многообразия $(M, g)$ и непрерывностью и конечностью лоренцевой функции расстояния $d = d(g): M \times M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ для этого многообразия. Наиболее простые свойства, включая утверждение сформулированной выше леммы 3.2, собраны в следующей лемме. Напомним, что через $\mathrm{Lor}(M)$ обозначено пространство всех лоренцевых метрик на $M$. $C^0$-топология на $\mathrm{Lor}(M)$ определена в разд. 2.2.

**Лемма 3.23.** (а) $d(p, q) > 0$ *тогда и только тогда, когда* $q \in I^+(p)$.

(б) *Пространство-время* $(M, g)$ *является полностью искаженным в том и только том случае, когда* $d(p, q) = \infty$ *для любых* $p, q \in M$.

(в) *Пространство-время* $(M, g)$ *является хронологическим в том и только том случае, когда* $d$ *тождественно равно нулю на диагонали* $\Delta(M) = \{(p, p): p \in M\}$ *произведения* $M \times M$.

(г) *Пространство-время* $(M, g)$ *является различающим будущее (соответственно прошлое) в том и только том случае, когда для каждой пары различных точек* $p, q \in M$ *найдется некоторая точка* $x \in M$, *такая, что в точности одно из расстояний* $d(p, x)$ *или* $d(q, x)$ (*соответственно* $d(x, p)$ *или* $d(x, q)$) *равно нулю.*

(д) *Пространство-время* $(M, g)$ *является устойчиво причинным в том и только том случае, когда существует окрестность* $U$ *метрики* $g$ *в* $C^0$-*топологии на* $\mathrm{Lor}(M)$, *такая, что* $d(g')(p, p) = 0$ *для всех* $g' \in U$ *и* $p \in M$.

Доказательство этих свойств проводится аналогично доказательствам леммы 3.2 и замечания 3.3. □

Напомним, что лоренцева функция расстояния в общем случае не является полунепрерывной сверху. Поэтому непрерывность

d (g) должна быть как-то связана с причинной структурой $(M, g)$. Примером этого может служить следующий результат, впервые установленный Бимом и Эрлихом (1977, с. 1130). Здесь d считается непрерывной в точке $(p, q) \in M \times M$, где $d(p, q) = \infty$, потому что $d(p_n, q_n) \to \infty$ для всех последовательностей $p_n \to p$ и $q_n \to q$ (см. лемму 3.4).

**Теорема 3.24.** *Пусть* $(M, g)$ — *различающее пространство-время. Если* $d = d(g)\colon M \times M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *непрерывна, то* $(M, g)$ *причинно непрерывно.*

*Доказательство.* Нужно показать только, что $I^+$ и $I^-$ внешне непрерывны. Предположим противное: $I^+$ не является внешне непрерывным. Тогда найдутся компактное множество $K \subset M \setminus \overline{I^+(p)}$ и последовательность $p_n \to p$, такие, что $K \cap \overline{I^+(p_n)} \neq \varnothing$ для всех $n$. Пусть $q_n \in K \cap \overline{I^+(p_n)}$, а $\{q_m\}$ — подпоследовательность последовательности $\{q_n\}$, такая, что $q_m$ сходятся к некоторой точке $q$ компактного множества $K$. Тогда $q_m \to q$ и $q_m \in \overline{I^+(p_m)}$ означают, что должна существовать последовательность $q'_m$, сходящаяся к $q$ так, что $q'_m \in I^+(p_m)$ для любого $m$. Вследствие того что $M \setminus \overline{I^+(p)}$ — открытая окрестность $q$, найдется $r \in M \setminus I^+(p)$, подчиненная условию $q \ll r$. Тогда $q'_m \ll r$ для достаточно больших $m$, а отсюда и $p_m \ll q'_m \ll r$. Тем самым справедливо неравенство $d(p_m, r) \geqslant d(p_m, q'_m) + d(q'_m, r)$. Используя полунепрерывность снизу расстояния и причинную связь $q \ll r$, получаем $0 < d(q, r) \leqslant \varliminf d(q'_m, r)$. Следовательно, $d(p_m, r) \geqslant d(q, r)/2 > 0$ для всех достаточно больших $m$. Однако ввиду того, что $r \notin I^+(p)$, выполняется соотношение $d(p, r) = 0$, откуда следует, что $d(p, r) \neq \lim d(p_m, r)$. Таким образом, если d непрерывна, то $I^+$ внешне непрерывно. Аналогичные рассуждения показывают, что $I^-$ является внешне непрерывным. Тем самым непрерывность d означает, что $(M, g)$ причинно непрерывно. □

Причинная непрерывность, напротив, не означает непрерывности лоренцевой функции расстояния. Обозначим через $(M, g)$ пространство-время Минковского с одной выколотой точкой. Пространство-время $(M, \Omega g)$ будет причинно непрерывным для любого гладкого конформного множителя $\Omega\colon M \to (0, \infty)$. Однако $\Omega$ можно выбрать так, что $d = d(\Omega g)$ *не* является непрерывной (рис. 3.6).

Обратимся теперь к описанию сильно причинных пространств при помощи лоренцевой функции расстояния. Определение выпуклой нормальной окрестности было дано в разд. 3.1. Пусть $(M, g)$ — заданное пространство-время.

**Определение 3.25.** *Локальной функцией расстояния* $(D, U)$ *на* $(M, g)$ называется выпуклая нормальная окрестность $U$ вместе

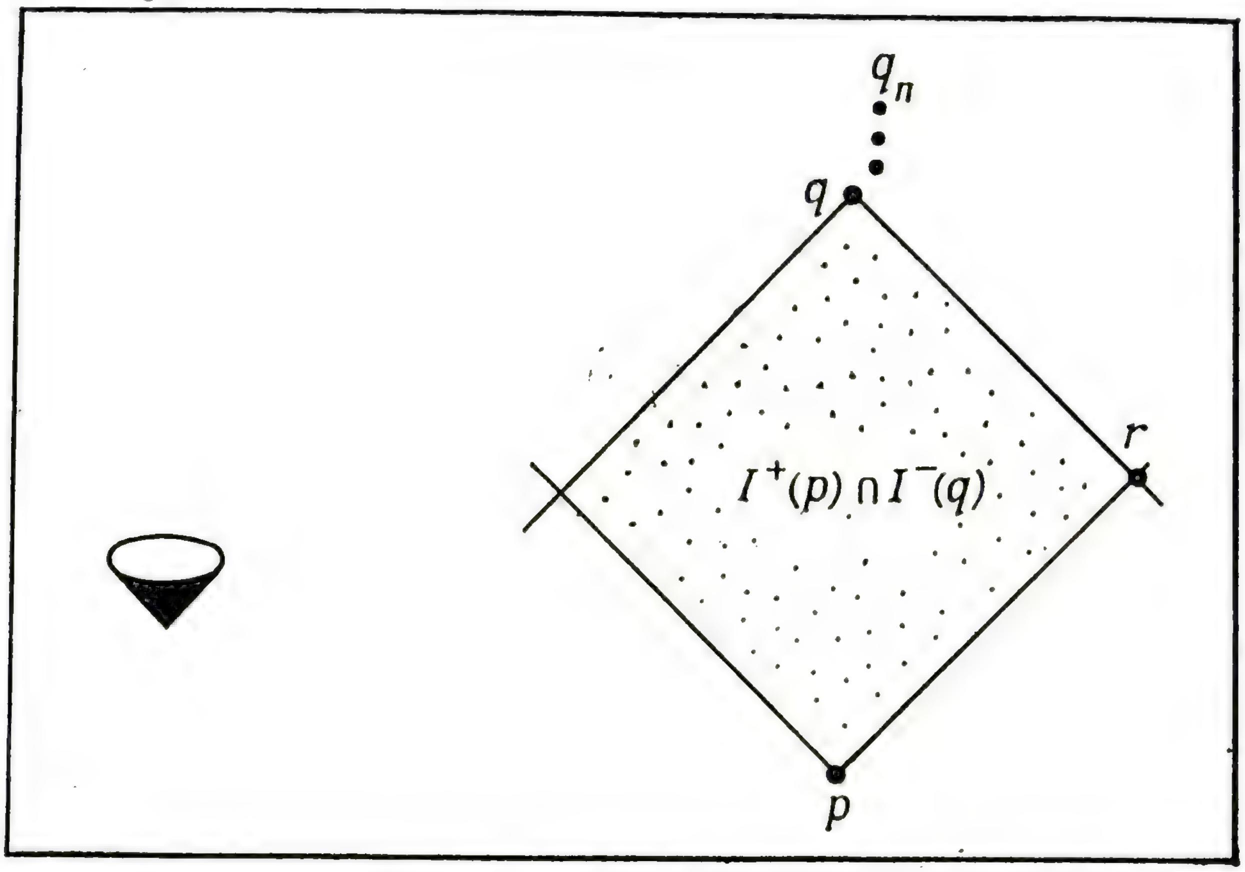



Рис. 3.6. Обозначим через $(M, g)$ пространство-время Минковского с выброшенной точкой $r$. Выберем $p, q \in M$ так, чтобы в пространстве-времени Минковского точка $r$ лежала на границе множества $I^+(p) \cap I^-(q)$, как показано на рисунке. Пусть $\{q_n\}$ — последовательность точек, сходящаяся к $q$, причем такая, что $q \ll q_n$ для каждого $n$. Существует гладкий конформный множитель $\Omega$: $M \to (0, \infty)$, равный единице на $I^+(p) \cap I^-(q)$ и такой, что $d(\Omega g)(p, q_n) \geqslant 2d(g) \times (p, q)$ для каждого $n$. Вблизи выброшенной точки $r$ функция $\Omega$ будет неограниченна. Ввиду того что

$$d(g)(p, q) = d(\Omega g)(p, q) < \varliminf d(\Omega g)(p, q_n),$$

лоренцева функция расстояния причинно непрерывного пространства-времени $(M, \Omega g)$ разрывна в точке $(p, q) \in M \times M$.

с функцией расстояния $D: U \times U \to \mathbb{R}$, индуцированной на $U$ пространством-временем $(U, g \mid U)$.

Более подробно, пусть $p, q \in U$. Тогда $D(p, q) = 0$ в том случае, если в $U$ не существует направленной в будущее времениподобной геодезической с концами $p$ и $q$. В противном случае, $D(p, q)$ равно лоренцевой длине дуги однозначно определенного времениподобного геодезического сегмента в $U$ с концами $p$ и $q$.

Хронологическое (соответственно причинное) будущее точки $p$ относительно пространства-времени $(U, g \mid U)$ будем обозначать через $I^+(p, U)$ (соответственно через $J^+(p, U)$).

**Лемма 3.26.** *Пусть $(M, g)$ — пространство-время и $U$ — выпуклая нормальная окрестность $(M, g)$. Пусть $D$: $U \times U \to \mathbb{R}$ — функция расстояния для $(U, g \mid U)$. Тогда $D$ непрерывна на $U \times U$ и дифференцируема на $U^+ = \{(p, q) \in U \times U: q \in I^+(p, U)\}$.*

*Доказательство.* Для заданных $p, q \in U$, связанных условием $q \in J^+(p, U)$, обозначим через $c_{pq}$: $[0, 1] \to U$ единственный непространственноподобный геодезический сегмент, у которого $c_{pq}(0) = p$ и $c_{pq}(1) = q$. Тогда $D(p, q) = [-g(c'_{pq}(0), c'_{pq}(0))]^{1/2}$

и $[D(p, q)]^2 = -g(c'_{pq}(0), c'_{pq}(0))$. Из дифференцируемой зависимости геодезических от концевых точек в выпуклых окрестностях сразу же вытекает и непрерывность $D$ на $U \times U$, и дифференцируемость $D$ на $U^+$. □

Пример пространства-времени Минковского показывает, что $D$ не дифференцируема в направлениях, трансверсальных изотропным конусам, и поэтому не может быть гладкой всюду на $U \times U$.

Нетрудно видеть, что локальная функция расстояния $(D, U)$ однозначно определяет лоренцеву метрику $g$ на $U$. Следовательно, если $\{U_\alpha\}$ — покрытие $M$ выпуклыми нормальными окрестностями с согласованными локальными функциями расстояния $\{(D_\alpha, U_\alpha)\}$, то $\{(D_\alpha, U_\alpha)\}$ однозначно определяет $g$ на $M$.

Попробуем теперь охарактеризовать сильно причинные пространства при помощи локальной функции расстояния (см. Бим и Эрлих (1979в, теорема 3.4)).

**Теорема 3.27.** *Пространство-время* $(M, g)$ *является сильно причинным в том и только в том случае, когда у каждой точки* $r \in M$ *есть выпуклая нормальная окрестность* $U$, *такая, что локальная функция расстояния* $(D, U)$ *на* $U \times U$ *согласуется с функцией расстояния* $d = d(g)\colon M \times M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

*Доказательство.* Если $(M, g)$ сильно причинно и $r \in M$, то существует выпуклая нормальная окрестность $U$ точки $r$, такая, что никакая непространственноподобная кривая, которая покидает $U$, в нее не возвращается. Тогда локальная функция расстояния для $U$ согласуется с $d = d(g) \mid (U \times U)$.

Обратно, предположим, что сильная причинность нарушается в некоторой точке $r \in M$. Пусть $U$ — выпуклая нормальная окрестность точки $r$, такая, что $D(p, q) = d(p, q)$ для всех $p, q \in U$. Существует окрестность $W \subset U$ точки $r$, для которой любая направленная в будущее непространственноподобная кривая $\gamma\colon (0, 1] \to U$, не продолжаемая в $U$ в прошлое и подчиненная условию $\gamma(1) \in W$, содержит точку, не принадлежащую $J^+(W, U)$. Вследствие того что в $r$ нарушается сильная причинность, найдется направленная в будущее времениподобная кривая $\gamma_1\colon [0, 1] \to M$, у которой $r' = \gamma_1(0) \in W$, $\gamma_1(^1/_2) \notin U$ и $\gamma_1(1) \in W$. По построению $W$ существует точка $p \in \gamma_1 \cap U$, для которой $p \notin J^+(r', U)$. Отсюда $D(r', p) = 0$. В то же время $d(r', p) > 0$, так как $d(r', p)$ не меньше длины $\gamma_1$ от $r'$ до $p$. Поэтому $D(r', p) \neq d(r', p)$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения теоремы. □

**Следствие 3.28.** *Если* $(M, g)$ *сильно причинно, то* $d$ *непрерывна в некоторой окрестности диагонали* $\Delta(M) = \{(p, p)\colon p \in$

$\in M\}$ *произведения* $M \times M$. *Кроме того, для любой точки* $m \in$ $\in M$ *существует выпуклая нормальная окрестность* $U$ *точки* $m$, *такая, что* $\mathrm{d} \mid (U \times U)$ *принимает конечные значения.*

Используя лоренцеву функцию расстояния, приведем характеристику глобально гиперболических пространств, выделяющую их из класса всех сильно причинных пространств. Для этого сначала необходимо показать, что обычное определение глобальной гиперболичности можно несколько ослабить. В доказательстве леммы 3.29 для обозначения замыкания мы будем пользоваться символом cl.

**Лемма 3.29.** *Пусть* $(M, g)$ — *сильно причинное пространство-время. Если множество* $J^+(p) \cap J^-(q)$ *имеет компактное замыкание для любых* $p, q \in M$, *то* $(M, g)$ *глобально гиперболично.*

*Доказательство.* Необходимо показать только, что множество $J^+(p) \cap J^-(q)$ всегда замкнуто. Пусть $r \in \mathrm{cl}\,(J^+(p) \cap J^-(q)) \setminus$ $\setminus (J^+(p) \cap J^-(q))$. Выберем в $J^+(p) \cap J^-(q)$ последовательность $\{r_n\}$ точек, сходящуюся к $r$, и возьмем для каждого $n$ направленную в будущее непродолжаемую в будущее непространственноподобную кривую $\gamma_n$: $[0, 1) \to M$, подчинив ее условиям $p = \gamma_n(0)$ и $q$, $r_n \in \gamma_n$. Согласно предложению 2.18, существует направленная в будущее непродолжаемая в будущее непространственноподобная кривая $\gamma$: $[0, 1) \to M$, предельная для последовательности $\{\gamma_n\}$, причем $p = \gamma(0)$. Предельная кривая $\gamma$ не может быть захваченной в будущем никаким компактным подмножеством $M$ вследствие сильной причинности $(M, g)$ (см. предложение 2.9). Поэтому на $\gamma$ найдется точка $x$, удовлетворяющая условию $x \notin$ $\notin \mathrm{cl}\,(J^+(p) \cap J^-(q))$. Определение предельной кривой подразумевает наличие подпоследовательности $\{\gamma_m\}$ последовательности $\{\gamma_n\}$ и точек $x_m \in \gamma_m$, сходящихся к $x$. Вследствие того что $x \notin \mathrm{cl}\,(J^+(p) \cap J^-(q))$, для достаточно больших $m$ имеем $x_m \notin$ $\notin J^+(p) \cap J^-(q)$. Используя включение $\gamma_m \subset J^+(p)$, получаем, что для больших $m$ $x_m \notin J^-(q)$. Отсюда следует, что для больших $m$ точка $q$ лежит на $\gamma_m$ между $p$ и $x_m$. Обозначим через $\gamma\,[p, x]$ (соответственно $\gamma_m\,[p, x_m]$) часть $\gamma$ (соответственно $\gamma_m$), соединяющую $p$ и $x$ (соответственно $x_m$). Согласно предложению 2.21, можно считать, переходя, если необходимо, от $\{\gamma_m\,[p, x_m]\}$ к ее подпоследовательности, что $\{\gamma_m\,[p, x_m]\}$ сходится к $\gamma\,[p, x]$ в $C^0$-топологии на кривых. Из того, что $q \in \gamma_m\,[p, x_m]$ для больших $m$, получаем $q \in \gamma\,[p, x]$. Кроме того, из того, что $r_m \to r$ и $r_m \leqslant q$, следует включение $r \in \gamma\,(p, q)$. Поэтому $r \in J^+(p) \cap$ $\cap J^-(q)$, что и приводит к требуемому противоречию. □

Напомним, что по определению 3.6 пространство-время $(M, g)$ удовлетворяет *условию конечности расстояния* тогда и только тогда, когда $\mathrm{d}(g)(p, q) < \infty$ для всех $p, q \in M$. Это условие

можно применить для того, чтобы выделить глобально гиперболические пространства среди всех сильно причинных пространств (см. Бим и Эрлих (1979б, теорема 3.5)).

**Теорема 3.30.** *Сильно причинное пространство-время* $(M, g)$ *является глобально гиперболичным тогда и только тогда, когда* $(M, g')$ *удовлетворяет условию конечности расстояния для всех* $g' \in C(M, g)$.

*Доказательство.* Ранее уже было замечено (см. следствие 3.7), что если $(M, g)$ глобально гиперболическое, то все метрики в $C(M, g)$ удовлетворяют условию конечности расстояния.

Обратно, допустим, что $(M, g)$ не является глобально гиперболическим. Из леммы 3.29 вытекает, что существуют точки $p, q \in M$, для которых множество $J^+(p) \cap J^-(q)$ не имеет компактного замыкания. Пусть $h$ — вспомогательная геодезически полная положительно определенная метрика на $M$, и пусть $d_0\colon M \times M \to \mathbb{R}$ — риманова функция расстояния, индуцированная на $M$ метрикой $h$. По теореме Хопфа — Ринова все подмножества $M$, ограниченные относительно $d_0$, имеют компактные замыкания. Поэтому $J^+(p) \cap J^-(q)$ неограниченно. Отсюда заключаем, что для каждого $n$ можно выбрать $p_n \in J^+(p) \cap J^-(q)$ так, что $d_0(p, p_n) > n$. Возьмем $p'$ и $q'$, связанные условием $p' \ll p \ll q \ll q'$, и покажем, что существует конформный множитель $\Omega$, такой, что $d(\Omega g)(p', q') = \infty$. Для каждого $n > 1$ в качестве $\gamma_n$ выберем направленную в будущее времениподобную кривую из $p'$ в $p_n$ так, что $\gamma_n[1/2, 3/4] \subset \{r \in M\colon n - 1 < d_0(p, r) < n\}$. Обозначим через $\Omega_n\colon M \to \mathbb{R}$ гладкую функцию, обладающую следующими свойствами: $\Omega_n(x) = 1$, если $x \notin \{r\colon n - 1 < d_0(p, r) < n\}$, и длина $\gamma_n[1/2, 3/4]$ в метрике $\Omega_n g$ больше $n$. Пусть $\Omega = \Pi\Omega_n$. Это бесконечное произведение на $M$ корректно определено вследствие того, что для каждого $x \in M$ самое большее один из множителей $\Omega_n$ отличен от единицы. Тогда получаем, что $d(\Omega g)(p', p_n) > n$ для каждого $n > 1$. Из того, что $d(\Omega g)(p', q') \geq d(\Omega g)(p', p_n) + d(\Omega g)(p_n, q')$ выполнено для любого $n$, вытекает соотношение $d(\Omega g)(p', q') = \infty$. □

Обратимся теперь к доказательству того, что для различающего пространства-времени с непрерывной функцией расстояния внутренние шары будущего и прошлого образуют подбазис исходной топологии многообразия. Напомним, что

$$B^+(p, \varepsilon) = \{q \in I^+(p)\colon d(p, q) < \varepsilon\} = \{q \in M\colon 0 < d(p, q) < \varepsilon\}$$

и

$$B^-(p, \varepsilon) = \{q \in I^-(p)\colon d(q, p) < \varepsilon\} = \{q \in M\colon 0 < d(q, p) < \varepsilon\}.$$

Поэтому, определяя $f_i\colon M \to \mathbb{R}$ для $i = 1, 2$ соотношениями $f_1(q) = d(p, q)$ и $f_2(q) = d(q, p)$, получаем, что $B^+(p, \varepsilon) =$

$= f_1^{-1}(0, \varepsilon)$ и $B^-(p, \varepsilon) = f_2^{-1}(0, \varepsilon)$. Отсюда вытекает, что если функция расстояния для $(M, g)$ непрерывна, то внутренние шары $B^+(p, \varepsilon)$ и $B^-(p, \varepsilon)$ открыты в топологии многообразия $M$.

**Предложение 3.31.** *Пусть $(M, g)$ — различающее пространство-время с непрерывной функцией расстояния. Тогда набор $\{B^+(p, \varepsilon_1) \cap B^-(q, \varepsilon_2): p, q \in M, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0\}$ образует базис исходной топологии многообразия.*

*Доказательство.* Соображения, изложенные выше, показывают, что множества вида $B^+(p, \varepsilon_1) \cap B^-(q, \varepsilon_2)$ открыты в топологии многообразия. Поэтому достаточно показать, что для произвольной точки $r \in M$ и произвольной ее окрестности $U(r)$, открытой в топологии многообразия, существуют точки $p, q \in M$ и числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, для которых выполняется соотношение $r \in B^+(p, \varepsilon_1) \cap B^-(q, \varepsilon_2) \subset U(r)$.

Теорема 3.24 обеспечивает причинную непрерывность $(M, g)$, а, следовательно, также и сильную причинность. Поэтому можно выбрать выпуклую нормальную окрестность $V \subset U(r)$ точки $r$, такую, что никакая непространственноподобная кривая, покидающая $V$, никогда в нее не возвращается и $d: V \times V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ принимает только конечные значения (см. следствие 3.28). Зафиксируем $p, q \in V$, связав их с $r$ соотношением $p \ll r \ll q$. Тогда $r \in I^+(p) \cap I^-(q) \subset V$ вследствие того, что никакая непространственноподобная кривая из $p$ в $q$ не может покинуть $V$ и вернуться. Полагая $\varepsilon_1 = d(p, r) + 1$ и $\varepsilon_2 = d(r, q) + 1$, получим

$$r \in B^+(p, \varepsilon_1) \cap B^-(q, \varepsilon_2) \subset I^+(p) \cap I^-(q) \subset V \subset U(r).$$

Из этого соотношения получаем требуемое. □

Мы заключим этот раздел описанием вполне геодезических времениподобных многообразий при помощи лоренцевой функции расстояния. Аналогичный результат имеет место и для подмногообразий (не обязательно полных) римановых многообразий (см. Громол, Клингенберг и Мейер (1971, с. 177)).

Пусть $(M, g)$ — произвольное сильно причинное пространство-время. Рассмотрим гладкое подмногообразие $i: N \to M$ и положим $\bar{g} = i^*g$. Напомним, что $(N, \bar{g})$ называется *времениподобным подмногообразием* $(M, g)$, если $\bar{g}|_p: T_pN \times T_pN \to \mathbb{R}$ является лоренцевой метрикой для каждой точки $p \in N$. Как обычно, мы будем отождествлять $N$ и $i(N)$. Пусть $\bar{L}$, $L$ и $\bar{d}$, $d$ — функционалы длины дуги и лоренцевы функции расстояния на $(N, \bar{g})$ и $(M, g)$ соответственно. Тогда, если $\gamma$ — гладкая кривая в $(N, \bar{g})$, то $\bar{L}(\gamma) = L(\gamma)$. Заметим также, что если $q \in I^+(p, N)$, то $p \ll q$

в $(M, g)$, а если $q \in J^+(p, N)$, то $p \leqslant q$ в $(M, g)$. Поэтому из определения $\bar{d}$ и $d$ немедленно следует, что

$$\bar{d}(m, n) \leqslant d(m, n) \text{ для всех } m, n \in N. \tag{3.4}$$

Используем сделанное замечание для доказательства следующего результата.

**Предложение 3.32.** *Пусть $(N, \bar{g})$ — вполне геодезическое времениподобное подмногообразие сильно причинного пространства-времени $(M, g)$. Тогда для любой точки $p \in N$ можно указать в $N$ ее окрестность $V$, такую, что $d \mid (V \times V) = \bar{d} \mid (V \times V)$.*

*Доказательство.* Пусть $W$ — выпуклая окрестность точки $p$ в $(M, g)$, каждую пару точек которой можно соединить единственной геодезической в $(M, g)$, лежащей в $W$, а если эти точки $m, n \in W$ связаны отношением $m \leqslant n$, то эта геодезическая будет максимальной в $(M, g)$. Тогда можно выбрать меньшую окрестность $V_0$ точки $p$ в $M$, лежащую в $W$, $V_0 \subset W$, и такую, что если $V = V_0 \cap N$, то $V$ содержится в выпуклой нормальной окрестности $U$ точки $p$ в $N$, причем $U \subset W$.

Предположим сначала, что $m, n \in V$ и $n \in J^+(m, N)$. Ввиду того что $V \subset U$, найдется непространственноподобная геодезическая $\gamma$ в $(N, \bar{g})$, соединяющая в $U$ $m$ и $n$. Так как подмногообразие $N$ вполне геодезическое, то $\gamma$ является непространственноподобной геодезической в $(M, g)$. Вследствие того что $\gamma$ содержится в $U \subset W$, она максимальна в $(M, g)$. Поэтому $\bar{d}(m, n) \geqslant \bar{L}(\gamma) = L(\gamma) = d(m, n)$. Из соотношения (3.4) получаем равенство $\bar{d}(m, n) = d(m, n)$, как и требовалось.

Остается рассмотреть случай, когда $m, n \in V$ и $n \notin J^+(m, N)$. По определению получаем, что $\bar{d}(m, n) = 0$. Предположим, что $d(m, n) > 0$. Тогда найдется времениподобная геодезическая $\gamma_1$ многообразия $(M, g)$, связывающая $m$ и $n$ в $W$. С другой стороны, из того, что $m, n \in U$, вытекает существование геодезической $\gamma_2$ многообразия $(N, \bar{g})$, соединяющей $m$ и $n$ в $U$ и являющейся пространственноподобной вследствие условия $n \notin J^+(m, N)$. Так как $(N, \bar{g})$ вполне геодезическое, то $\gamma_2$ является также пространственноподобной геодезической $(M, g)$, связывающей $m$ и $n$ в $U \subset W$. Таким образом, у нас есть две различные геодезические $\gamma_1$ и $\gamma_2$ из $m$ в $n$ в $W$, что противоречит условию. Отсюда следует, что $d(m, n) = 0 = \bar{d}(m, n)$, как и требовалось. □

Докажем теперь обращение предложения 3.32.

**Предложение 3.33.** *Пусть $(N, \bar{g})$ — времениподобное подмногообразие сильно причинного пространства-времени $(M, g)$. Предположим, что для любой точки $p \in N$ в $N$ существует ее окре-*

*стность* $V$, *такая, что* $\mathrm{d} \mid (V \times V) = \bar{\mathrm{d}} \mid (V \times V)$. *Тогда* $(N, \bar{\mathrm{g}})$ *является вполне геодезическим в* $(M, \mathrm{g})$.

*Доказательство.* Достаточно зафиксировать точку $p \in N$ и показать, что вторая фундаментальная форма $S_n$ в точке $p$ обращается в нуль (см. определение 2.35). Так как любой касательный вектор из $T_pN$ можно представить в виде суммы непространственноподобных касательных векторов, то достаточно показать, что $S_n(v, w) = 0$ для всех непространственноподобных касательных векторов из $T_pN$. А так как $-S_n(-v, w) = S_n(v, w)$, то можно ограничиться рассмотрением только направленных в будущее касательных векторов из $T_pN$.

Пусть $v \in T_pN$ — направленный в будущее непространственноподобный касательный вектор. Обозначим через $\gamma$ единственную геодезическую в $(N, \bar{\mathrm{g}})$, у которой $\gamma'(0) = v$. Пусть далее $V$ — окрестность точки $p$ в $N$, на которой функции $\mathrm{d}$ и $\bar{\mathrm{d}}$ совпадают. Выберем $t > 0$ так, что если $m = \gamma(t)$, то $m \in V$ и $\bar{\mathrm{d}}(p, m) = \bar{L}(\gamma \mid [0, t]) < \infty$. Тогда получим

$$\mathrm{d}(p, m) \geqslant L(\gamma \mid [0, t]) = \bar{L}(\gamma \mid [0, t]) = \bar{\mathrm{d}}(p, m).$$

Но так как $m \in V$, то $\mathrm{d}(p, m) = \bar{\mathrm{d}}(p, m)$ и, значит, $L(\gamma \mid [0, t]) = \mathrm{d}(p, m)$. Отсюда по теореме 3.13 получаем, что $\gamma \mid [0, t]$ — геодезическая в $(M, \mathrm{g})$. Таким образом, мы показали, что если $v \in T_pN$ — произвольный направленный в будущее касательный вектор, то геодезическая в $(M, \mathrm{g})$ с начальным направлением $v$ является также геодезической и в $(N, \bar{\mathrm{g}})$ вблизи $p$. Следовательно, $S_n(v, v) = 0$ для всех направленных в будущее непространственноподобных касательных векторов. Так как сумма двух непараллельных направленных в будущее непространственноподобных векторов является направленной в будущее и времениподобной, то, переходя к билинейной форме $S_n(v, w)$, полярной $S_n(v, v)$, получим, что $S_n(v, w) = 0$ для всех направленных в будущее непространственноподобных касательных векторов $v, w \in T_pN$, как и требовалось. □

Объединяя предложения 3.32 и 3.33, получаем следующую характеристику вполне геодезических времениподобных подмногообразий сильно причинных пространств в терминах лоренцевой функции расстояния.

**Теорема 3.34.** *Пусть* $(M, \mathrm{g})$ — *сильно причинное пространство-время размерности* $\geqslant 2$. *Предположим, что* $(N, i^*\mathrm{g})$ — *гладкое времениподобное подмногообразие* $(M, \mathrm{g})$, *т. е.* $\bar{\mathrm{g}} = i^*\mathrm{g}$ — *лоренцева метрика на* $N$. *Тогда* $(N, \bar{\mathrm{g}})$ *является вполне геодезическим в том и только том случае, когда у любой точки* $p \in N$ *есть окрестность* $V$ *в* $N$, *такая, что лоренцевы функции расстояния* $\bar{\mathrm{d}}$ *на* $(N, \bar{\mathrm{g}})$ *и* $\mathrm{d}$ *на* $(M, \mathrm{g})$ *равны на* $V \times V$.

Глава 4

# ПРИМЕРЫ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В этой главе мы приведем большое количество примеров пространственно-временных многообразий. Некоторые из них интересны как с физической, так и с математической точки зрения. В частности, пространство-время Минковского, пространства Шварцшильда, пространства Керра и пространства Робертсона — Уокера имеют важные физические интерпретации.

Пространство-время Минковского описывает одновременно и геометрию специальной теории относительности, и геометрию, индуцированную на каждом фиксированном касательном пространстве произвольного лоренцева многообразия. Тем самым геометрия Минковского играет для лоренцевых многообразий такую же роль, как евклидова геометрия для римановых многообразий. Иногда пространство-время Минковского называют *плоским пространством-временем*. Однако обычно плоским называют любое лоренцево многообразие, тензор кривизны которого тождественно равен нулю.

Пространства Шварцшильда представляют собой сферически-симметричные пространственно-временные многообразия, пустые вне невращающихся сферически-симметричных тел. Вследствие того что солнца и планеты предполагаются медленно вращающимися и приближенно сферически-симметричными, пространства Шварцшильда можно использовать при моделировании гравитационных полей вне этих тел. Эти же пространства можно использовать также и при моделировании гравитационных полей вне мертвых (т. е. невращающихся) черных дыр. Обычные координаты для шварцшильдовского решения вне массивного тела — $(t, r, \theta, \varphi)$, где $t$ играет роль времени, а $r$ — радиуса (см. Сакс и Ву (1977a, гл. 7)). Эта метрика имеет специальный, тесно связанный с ней радиус $r = 2m$. Точки, радиус которых равен $r = 2m$, соответствуют поверхности черной дыры. Сразу же приходит в голову мысль, что при $r = 2m$ метрика имеет особенность. Однако теперь хорошо известно, что обычная метрика Шварцшильда с $r > 2m$ может быть аналитически продолжена на точки, для которых $0 < r < 2m$. В действительности существует максимальное аналитическое расширение пространства-времени Шварцшильда (см.

Крускал (1960)), которое содержит другую вселенную, лежащую по «ту сторону» черной дыры.

Гравитационные поля вне вращающихся черных дыр, несомненно, соответствуют пространствам Керра (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 180, 361)). Эти пространственно-временные многообразия представляют собой стационарные осесимметричные метрики вне вращающихся объектов. Пространства Керра и Шварцшильда являются асимптотически плоскими и соответствуют мирам, которые пусты, за исключением одного массивного тела. Поэтому, хотя эти метрики можно рассматривать как допустимые модели вблизи заданного единственного массивного тела, их нельзя использовать в качестве крупномасштабных моделей для вселенной со многими массивными телами.

Обычные космологические модели «большого взрыва» строятся на пространствах Робертсона — Уокера. Пространственно-временные многообразия такого типа расслаиваются на специальное множество пространственноподобных гиперповерхностей так, что каждая гиперповерхность соответствует одному моменту времени. Группа изометрий $I(M)$ пространства-времени Робертсона — Уокера $(M, g)$ на этих гиперповерхностях постоянного времени действует транзитивно. Поэтому вселенные Робертсона — Уокера пространственно однородны. Более того, они пространственно изотропны в том смысле, что для каждой точки $p \in M$ подгруппа группы изометрий $I(M)$, сохраняющая $p$, транзитивна на направлениях из $p$, касательных к проходящей через $p$ гиперповерхности постоянного времени. При рассмотрении пространств Робертсона — Уокера мы будем использовать лоренцевы искривленные произведения $M_0 \times_f H$, описанные в разд. 2.6. Космологические допущения на вселенные Робертсона — Уокера означают, что $(H, h)$ — изотропное риманово многообразие. Следовательно, классификация двухточечных однородных римановых многообразий дает и классификацию всех пространств Робертсона — Уокера. Мы также покажем, как можно приспособить результаты разд. 2.6 для построения групп Ли с биинвариантными глобально гиперболическими лоренцевыми метриками.

## 4.1. Пространство-время Минковского

Пространство-время Минковского — это многообразие $M = \mathbb{R}^n$ вместе с метрикой

$$ds^2 = -dx_1^2 + \sum_{i=2}^{n} dx_i^2.$$

Это пространство-время ориентировано во времени векторным полем $\partial/\partial x_1$. Оно является также глобально гиперболическим

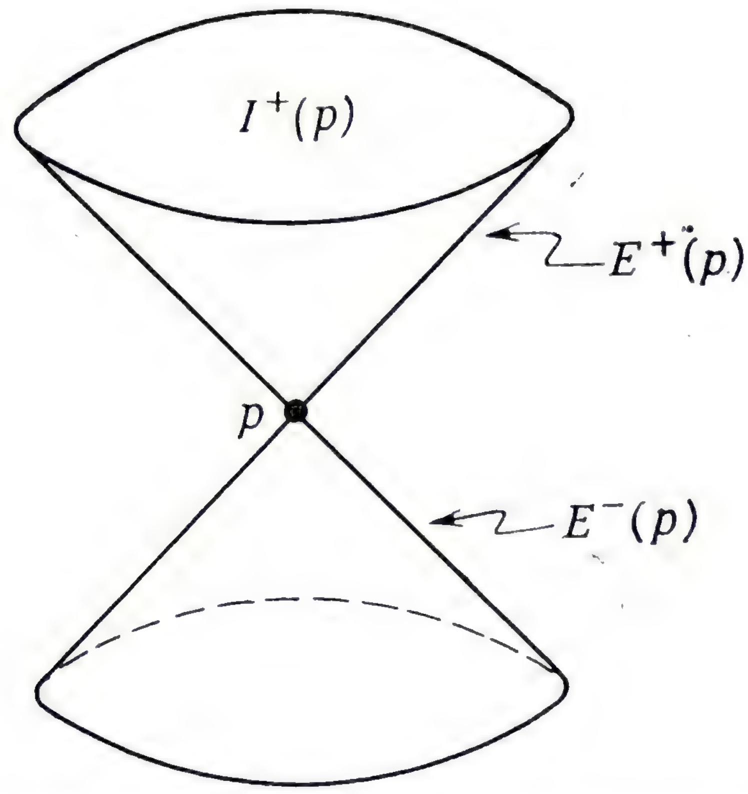



Рис. 4.1. Пусть $(M, g)$ — пространство-время Минковского. Изотропный конус в точке $p$ имеет полость будущего и полость прошлого. Полость будущего (соответственно прошлого) является также контуром будущего $E^+(p)$ (соответственно прошлого $E^-(p)$) точки $p$. Хронологическое будущее $I^+(p)$ — открытое выпуклое множество с границей $E^+(p)$. В более общих пространствах $I^+(p)$ может не быть выпуклым, но оно обязательно открыто.

и в силу этого удовлетворяет всем условиям причинности, рассмотренным в разд. 2.2.

Геодезические пространства-времени Минковского в точности совпадают с прямыми линиями евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, а аффинная параметризация этих геодезических в пространстве Минковского пропорциональна обычной евклидовой параметризации в $\mathbb{R}^n$ длиной дуги. Изотропные геодезические, проходящие в пространстве Минковского через заданную точку $p$, образуют конус вращения с вершиной $p$. В частности, направленные в будущее изотропные геодезические, исходящие из $p$, образуют одну полость изотропного конуса. Эта полость является в $\mathbb{R}^n$ границей открытого выпуклого множества, которое представляет собой не что иное, как хронологическое будущее $I^+(p)$ точки $p$. В пространстве Минковского причинное будущее $J^+(p)$ точки $p$ совпадает с замыканием $I^+(p)$. Контур будущего $E^+(p) = J^+(p) \setminus I^+(p)$ — это полость изотропного конуса в точке $p$, соответствующая будущему (рис. 4.1).

Пространство-время Минковского является лоренцевым произведением (т. е. искривленным произведением в смысле определения 2.38 с $f = 1$). Если на $\mathbb{R}$ задана отрицательно определенная метрика $-dt^2$, а на $\mathbb{R}^{n-1}$ задана обычная евклидова метрика $g_0$, то $(\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}, -dt^2 \oplus g_0)$ есть $n$-мерное пространство-время Минковского.

Рассмотрим в пространстве-времени Минковского две точки $p = (p_1, \ldots, p_n)$ и $q = (q_1, \ldots, q_n)$. Хронологическое отношение $p \ll q$ выполняется, если $p_1 < q_1$ и $(p_1 - q_1)^2 > (p_2 - q_2)^2 + \ldots$

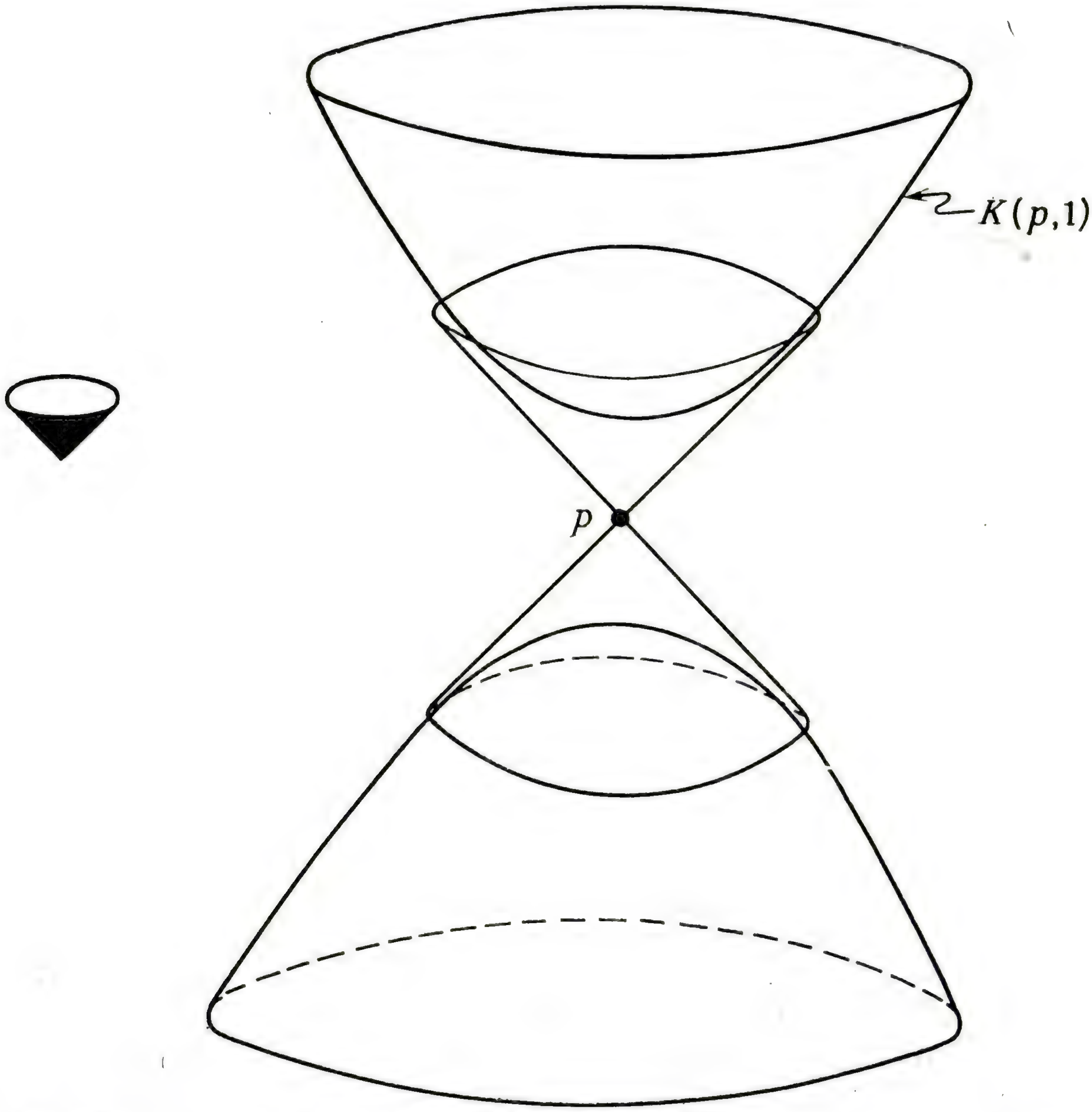



Рис. 4.2. Единичная сфера $K(p, 1)$, соответствующая точке $p$, представляет собой половину двуполостного гиперболоида. Она *некомпактна*, и точка $p$ *не* лежит в выпуклом открытом множестве, границей которого $K(p, 1)$ является.

$\ldots + (p_n - q_n)^2$ в $\mathbb{R}$. Если $p \ll q$, то расстояние между точками $p$ и $q$ задается формулой

$$\mathrm{d}(p, q) = \left[(p_1 - q_1)^2 - \sum_{i=2}^{n} (p_i - q_i)^2\right]^{1/2}.$$

«Единичная сфера» в пространстве-времени Минковского с центром в точке $p$ определяется формулой $K(p, 1) = \{q \in M\colon \mathrm{d}(p, q) = 1\}$. Однако в действительности это множество представляет собой одну из полостей двухполостного гиперболоида (рис. 4.2).

Если из пространства-времени Минковского удалить одну точку, то оно уже не будет причинно простым, а значит, и глобально гиперболическим (рис. 4.3).

Все пространство-время Минковского можно конформно отобразить на малое открытое множество, содержащее начальную точку. Это показано на рис. 4.4 (см. Пенроуз (1972, с. 98), Хокинг и Эллис (1977, с. 139)).

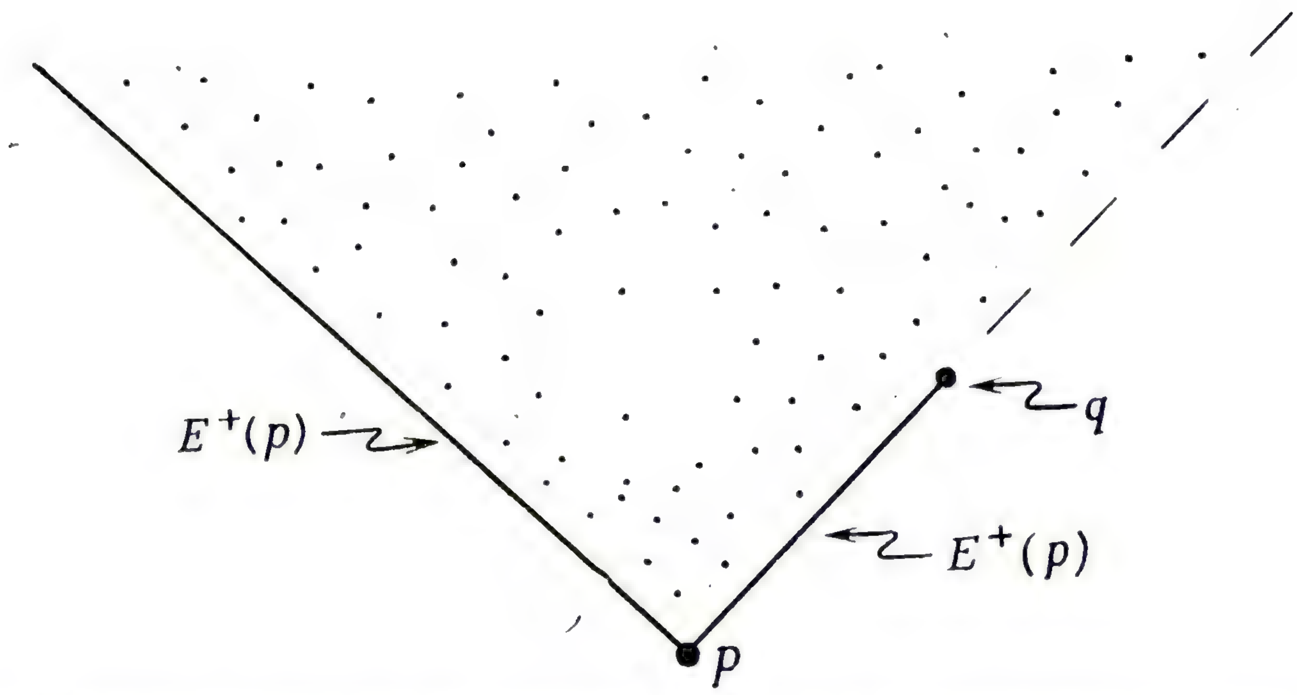



Рис. 4.3. Показано двумерное пространство-время Минковского с одной выброшенной точкой $q$. Контур будущего точки $p$ — это L-образная фигура, состоящая из полуоткрытого прямолинейного луча и полуоткрытого прямолинейного отрезка. Причинное будущее $J^+(p)$ является объединением $I^+(p)$ и $E^+(p)$. Заметим, что $J^+(p)$ *не* совпадает с замыканием $I^+(p)$ и вообще не является замкнутым.

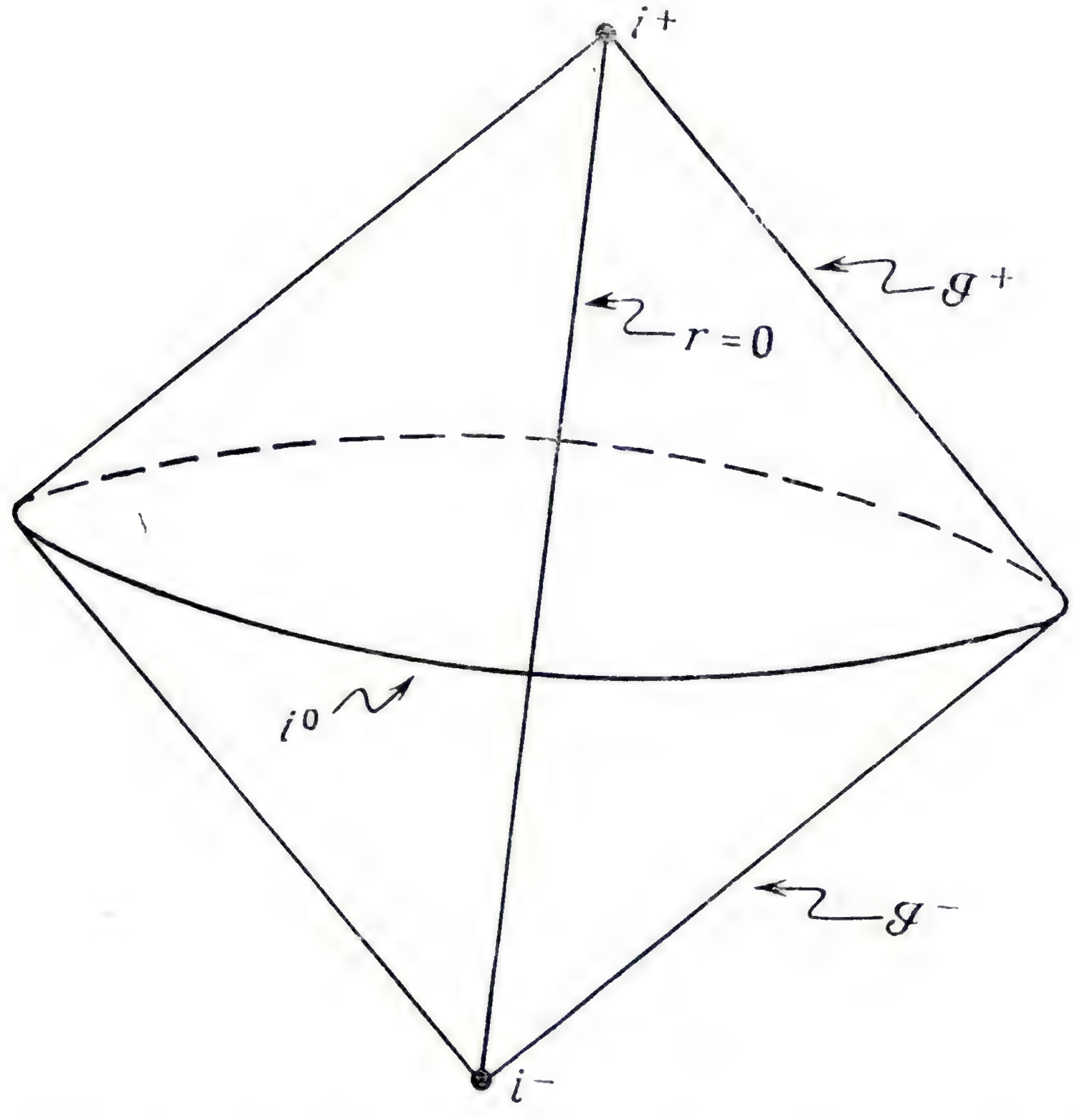



Рис. 4.4. Пространство-время Минковского конформно открытому множеству, заключенному в двух указанных изотропных конусах. Вершины $i^+$ и $i^-$ соответствуют времениподобной бесконечности. Все направленные в будущее времениподобные геодезические идут из $i^-$ в $i^+$. Множества $\mathscr{I}^+$ и $\mathscr{I}^-$ представляют изотропную бесконечность в будущем и в прошлом. Топологически $\mathscr{I}^+$ и $\mathscr{I}^-$ представляют собой $\mathbb{R} \times S^{n-2}$. Пересечение двух изотропных конусов — множество, которое отождествляется с единственной точкой $i^0$. Точка $i^0$ называется *пространственноподобной бесконечностью*.

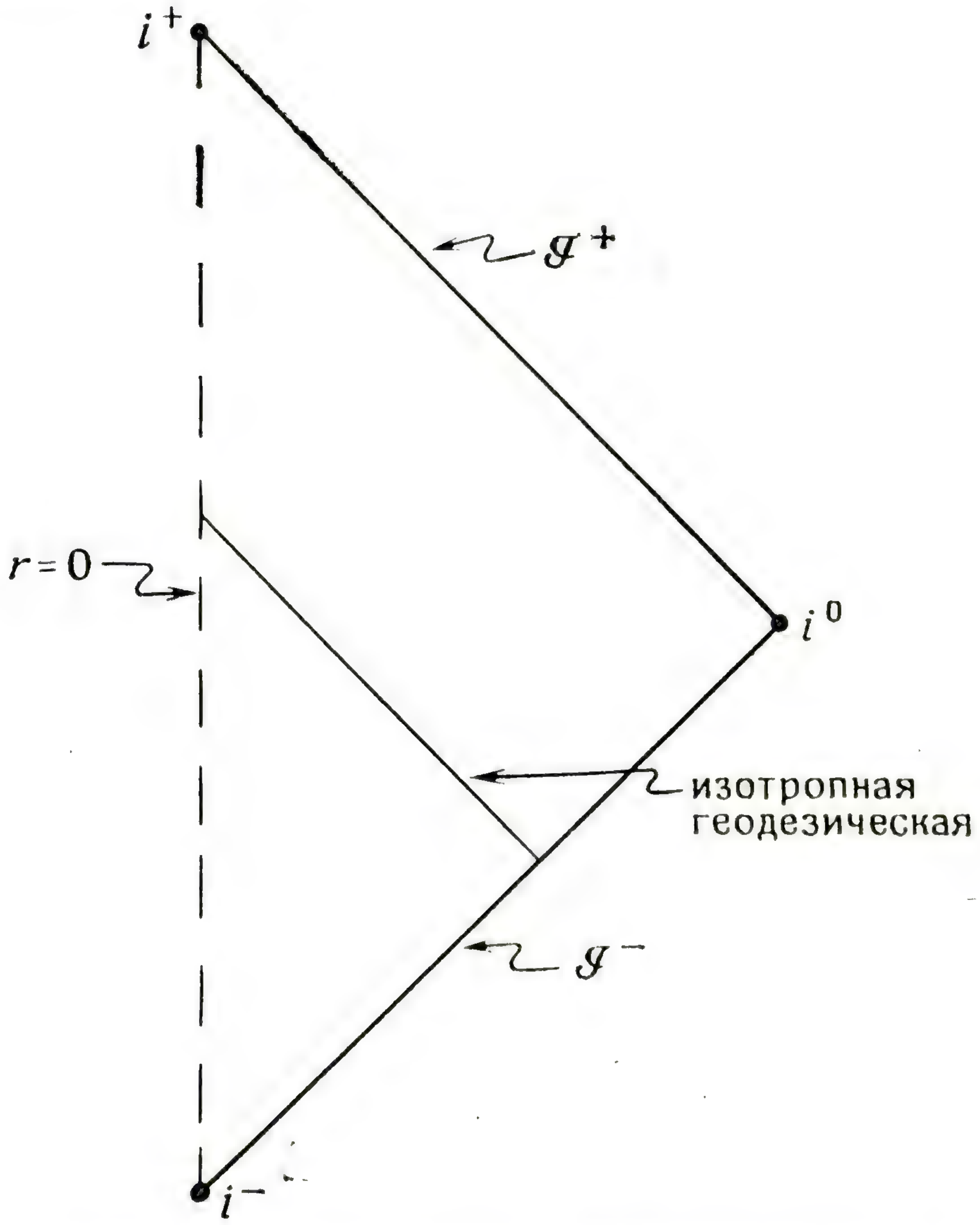



Рис. 4.5. Показана диаграмма Пенроуза для пространства-времени Минковского.

Пространство-время Минковского и многие другие пространственно-временные многообразия можно представлять *диаграммами Пенроуза*. Укажем соглашения, используемые в диаграммах Пенроуза.

Диаграмма Пенроуза является двумерным представлением сферически-симметричного пространства-времени. Радиальные изотропные геодезические представляются изотропными геодезическими, проходящими под углами $\pm 45°$. Штриховая линия представляет полюс ($r = 0$) полярной системы координат. Точки, соответствующие гладким граничным точкам (см. разд. 11.5), которые не являются сингулярностями, изображаются простыми линиями. Двойные линии представляют неустранимые сингулярности (рис. 4.5; см., например, также рис. 3.2 пространства-времени Райстнера — Нордстрема с $e^2 = m^2$).

## 4.2. Пространства Шварцшильда и Керра

В этом разделе мы опишем четырехмерные решения Шварцшильда и Керра уравнений Эйнштейна. Пусть в $\mathbb{R}^4$ введены координаты $(t, r, \theta, \varphi)$, где $(r, \theta, \varphi)$ — обычные сферические координаты в $\mathbb{R}^3$. Для заданной положительной постоянной $m$ внешнее пространство-время Шварцшильда определяется на подмноже-

стве $r > 2m$ пространства $\mathbb{R}^4$, топологически эквивалентном $\mathbb{R}^2 \times S^2$. Шварцшильдовская метрика в области $r > 2m$ задается в координатах $(t, r, \theta, \varphi)$ следующей формулой:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Каждый элемент группы вращения SO (3) пространства $\mathbb{R}^3$ индуцирует движение шварцшильдовского решения. Именно для $\psi \in SO(3)$ движение $\bar{\psi}$ пространства-времени Шварцшильда определяется формулой $\bar{\psi}(t, r, \theta, \varphi) = (t, \psi(r, \theta, \varphi))$. Поэтому в фиксированный момент времени $t$ внешнее пространство-время Шварцшильда сферически-симметрично. Метрика этого пространства-времени инвариантна также относительно переноса времени $t \to t + a$. Координатное векторное поле $\partial/\partial t$ является времениподобным векторным полем Киллинга (которое есть градиент), и потому метрика называется статической. Это пространство-время является риччи-плоским (т. е. $\mathrm{Ric} = 0$). Используя уравнения Эйнштейна (см. добавление В), получаем, что тензор энергии-импульса для внешнего пространства-времени Шварцшильда тождественно равен нулю. Таким образом, это пространство-время пусто.

Внешнее пространство-время Шварцшильда можно рассматривать как лоренцево искривленное произведение (см. разд. 2.6). Пусть на $M = \{(t, r) \in \mathbb{R}^2 : r > 2m\}$ задана лоренцева метрика

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2,$$

а на $H = S^2$ — обычная риманова метрика $h$ постоянной секционной кривизны 1, индуцированная вложением $S^2 \to \mathbb{R}^3$. Определим функцию $f\colon M \to \mathbb{R}$ по правилу $f(t, r) = r^2$. Тогда $(M \times_f H, \bar{g})$, где $\bar{g} = g \oplus fh$, представляет собой внешнее пространство-время Шварцшильда.

Внешнее решение Шварцшильда физически представляет гравитационное поле вне невращающегося сферически-симметричного массивного объекта. Сравнение с ньютоновской теорией (см. Эйнштейн (1916, с. 819), Патриа (1974, с. 217)) показывает, что $m$ можно отождествить с гравитационной массой массивного тела. Внутри тела решение не имеет силы.

Указанная выше форма внешней шварцшильдовской метрики производит впечатление имеющей особенность при $r = 2m$. Однако это не истинная сингулярность. Внешнее решение Шварцшильда можно аналитически продолжить через поверхность $r = 2m$.

Крускал (1960) исследовал максимальное аналитическое расширение пространства-времени Шварцшильда. Опуская $\theta$ и $\varphi$, можно дать следующее двумерное представление этого максимального расширения (рис. 4.6).

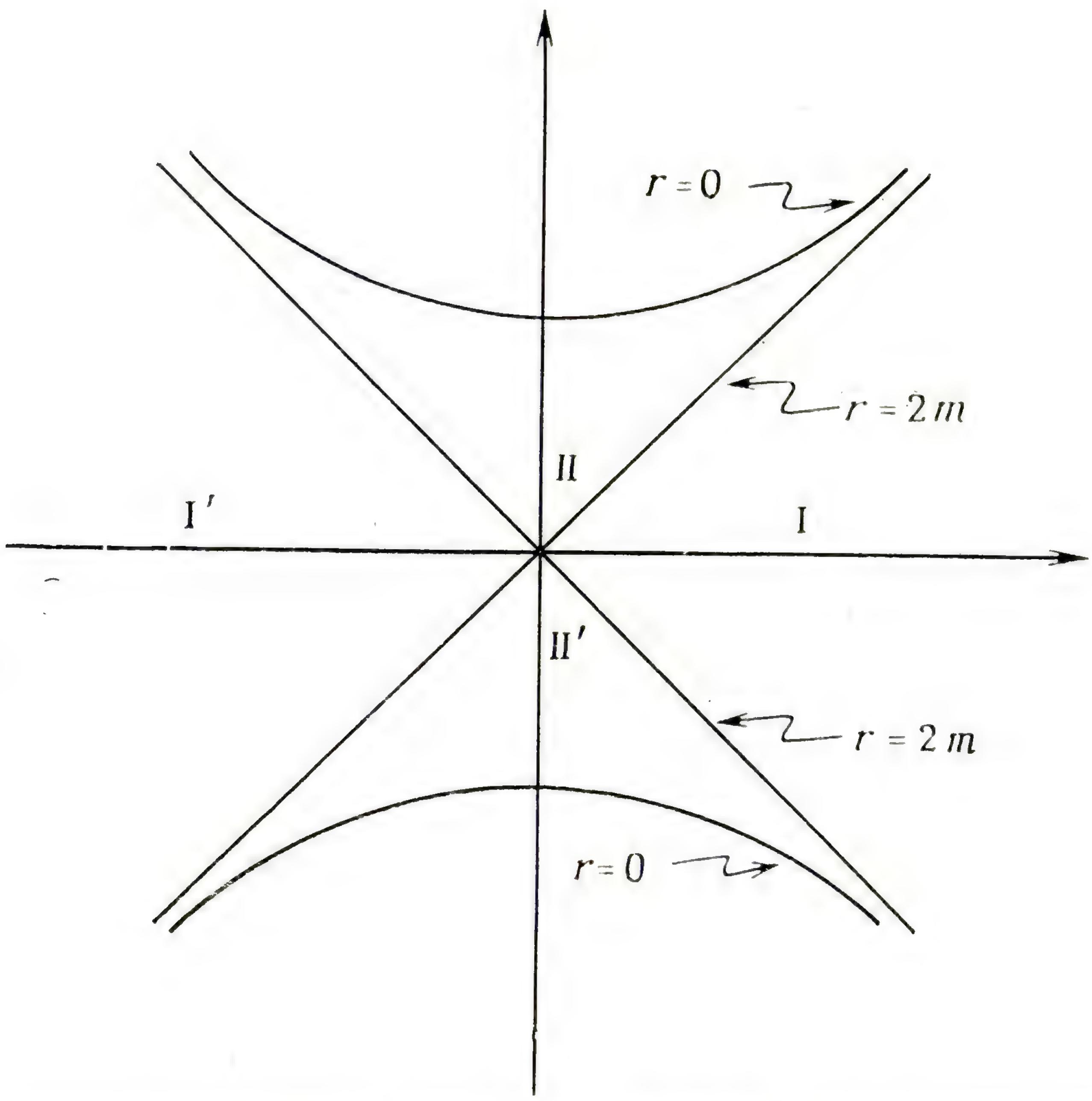



Рис. 4.6. Показана диаграмма Крускала для максимального аналитического расширения внешнего пространства-времени Шварцшильда. Расширенное пространство-время представляет собой связную невыпуклую область $I \cup II \cup I' \cup II'$, ограниченную гиперболой, соответствующей $r = 0$. Точки этой гиперболы являются истинными сингулярностями пространства-времени. Прямые, проходящие под углами $\pm 45°$ к горизонтальной оси, делят это пространство-время на четыре области. Область $I$ соответствует внешнему решению Шварцшильда. Область $II$ — «внутренность» невращающейся черной дыры. Область $I'$ изометрична области $I$ и соответствует другой вселенной по «ту сторону» черной дыры. Не существует кривой, которая была бы непространственноподобной и шла из области $I$ в область $I'$.

Гравитационное поле вне вращающейся черной дыры не отвечает решению Шварцшильда. Общепризнанным решением уравнений Эйнштейна для вращающихся черных дыр является решение Керра. В координатах Бойера и Линдквиста $(t, r, \theta, \varphi)$ метрики Керра задаются следующим образом (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 180)):

$$ds^2 = \rho^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\right) + (r^2 + a^2)\sin^2\theta\, d\varphi^2 -$$

$$- dt^2 + \frac{2mr}{\rho^2}(a \sin^2\theta\, d\varphi - dt)^2,$$

где $\rho^2 = r^2 + a^2$ и $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$. Постоянная $m$ представляет собой массу, а постоянная $ma$ — угловой момент черной

дыры (см. Бойер и Прайс (1965), Бойер и Линдквист (1967)). Тотимацу и Сато (1973) привели серию точных решений, которые включают как частный случай решения Керра.

## 4.3. Пространства постоянной кривизны

Известно, что два лоренцевых многообразия одной размерности, имеющие постоянную секционную кривизну $k$, локально изометричны (см. Вольф (1982, с. 88)). Поэтому любое лоренцево многообразие постоянной нулевой секционной кривизны локально изометрично пространству-времени Минковского. В этом разделе будут рассмотрены модельные лоренцевы пространства постоянной ненулевой секционной кривизны.

Обозначим через $\mathbb{R}_s^n$ стандартное псевдоевклидово пространство с сигнатурой $(-, \ldots, -, +, \ldots, +)$, где $s$ отрицательных и $n - s$ положительных собственных значений. Отсюда следует, что псевдоевклидова метрика на $\mathbb{R}_s^n$ задается по правилу

$$ds^2 = -\sum_{i=1}^{s} dx_i^2 + \sum_{i=s+1}^{n} dx_i^2.$$

В частности, $\mathbb{R}_1^n$ есть $n$-мерное пространство-время Минковского. Для $r > 0$ мы определим также (см. Вольф (1982, разд. 2.4))

$$S_1^n = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1}\colon -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = r^2\}$$

и

$$H_1^n = \{x \in \mathbb{R}_2^{n+1}\colon -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = -r^2\}.$$

Топологически определенные выше множества эквивалентны соответственно $S_1^n \cong \mathbb{R}^1 \times S^{n-1}$, $H_1^n \cong S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ (см. Вольф (1982, с. 87)). Псевдоевклидова метрика на $\mathbb{R}_1^{n+1}$ (соответственно на $\mathbb{R}_2^{n+1}$) индуцирует на $S_1^n$ (соответственно на $H_1^n$) лоренцеву метрику постоянной секционной кривизны $k = +r^{-2}$ (соответственно $k = -r^{-2}$). Пространство-время $S_1^n$ является лоренцевым аналогом обычного риманова сферического пространства радиуса $r$ и имеет положительную кривизну $r^{-2}$. Универсальное накрывающее многообразие $\tilde{H}_1^n$ многообразия $H_1^n$ топологически эквивалентно $\mathbb{R}^n$ и поэтому может рассматриваться как лоренцевый аналог обычного риманова гиперболического пространства отрицательной кривизны $-r^{-2}$.

**Определение 4.1.** Пусть $S_1^n$ и $H_1^n$ определены, как указано выше. Тогда $S_1^n$ называется *пространством-временем де Ситтера* (*1-го рода*), а универсальная накрывающая $\tilde{H}_1^n$ многообразия $H_1^n$

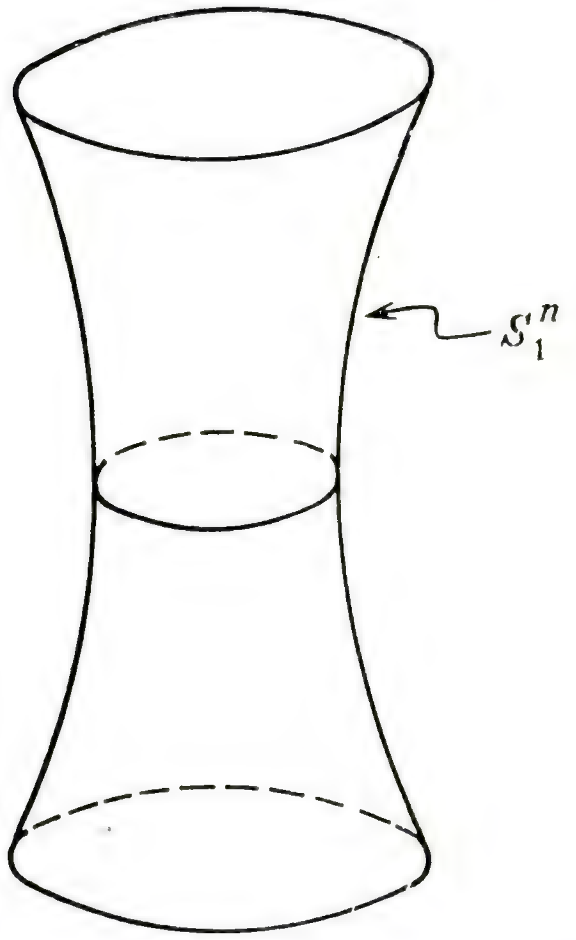



Рис. 4.7. $n$-мерное пространство-время де Ситтера с положительной секционной кривизной $r^{-2}$ является подмножеством пространства-времени Минковского $\mathbb{R}_1^{n+1}$:

$$-x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = r^2.$$

Геодезические $S_1^n$ лежат на пересечении $S_1^n$ с плоскостями, проходящими через начало координат $\mathbb{R}_1^{n+1}$.

называется (*универсальным*) *пространством-временем де Ситтера* (*2-го рода*).

**Замечание 4.2.**

(а) $S_1^n$ односвязно для $n > 2$, а $\pi_1(S_1^2) = \mathbb{Z}$.

(б) $S_1^n$ глобально гиперболично и геодезически полно.

(в) $H_1^n$ нехронологично вследствие того, что $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, 0, \ldots, 0\}$ является замкнутой времениподобной кривой. Накрывающее пространство $\tilde{H}_1^n$, хотя и является сильно причинным, также не глобально гиперболично.

Пространство де Ситтера, представленное на рис. 4.7, можно покрыть координатами $(t, \chi, \theta, \varphi)$, где $-\infty < t < \infty$, $0 \leqslant \chi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Здесь $t$ — координата на $\mathbb{R}$, а $(\chi, \theta, \varphi)$ — координаты на $S^3$ (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 140—151)). В этих координатах метрика пространства-времени де Ситтера постоянной положительной секционной кривизны $r^{-2}$ задается следующим образом:

$$ds^2 = -dt^2 + r^2 \operatorname{ch}^2 \frac{t}{r} \left[d\chi^2 + \sin^2\chi \, (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)\right].$$

Эту формулу можно представить как метрику лоренцева искривленного произведения (см. разд. 2.6). Пусть $f\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ задается по правилу $f(t) = r^2 \operatorname{ch}^2 \frac{t}{r}$, а $S^3$ наделено обычной полной римановой метрикой постоянной секционной кривизны 1. Тогда пространство-время де Ситтера, описанное в локальных координатах, как указано выше, является искривленным произведением $(\mathbb{R} \times S^3, -dt^2 \oplus f\mathrm{h})$.

Универсальное пространство-время де Ситтера 2-го рода кривизны $k = -1$ допускает введение координат $(t', r, \theta, \varphi)$, в которых его метрика имеет вид

$$ds^2 = -\operatorname{ch}^2 r\,(dt')^2 + dr^2 + \operatorname{sh}^2 r\,(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

(см. Хокинг и Эллис (1977, с. 148, 155)). Рассматривая $-(dt')^2$ как отрицательно определенную метрику на $\mathbb{R}$, а $dr^2 + \operatorname{sh}^2 r\,(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ как полную риманову метрику $\mathrm{h}$ постоянной отрицательной секционной кривизны $-1$ на трехмерном гиперболическом пространстве $H = \mathbb{R}^3$, можно представить это пространство-время в виде искривленного произведения $(\mathbb{R} \times_f H, -fdt^2 \oplus \mathrm{h})$, где искривляющая функция определена на римановом сомножителе $H$ (см. замечание 2.40).

## 4.4. Пространства Робертсона — Уокера

В этом разделе мы рассмотрим пространства Робертсона — Уокера с точки зрения лоренцевых искривленных произведений. Эти пространства включают в себя такие космологические модели общей теории относительности, как статическую вселенную Эйнштейна и большой взрыв. Чтобы привести точное определение пространства-времени Робертсона — Уокера, необходимо сначала напомнить некоторые понятия из теории двухточечных однородных римановых многообразий и изотропных римановых многообразий.

Пусть $(H, \mathrm{h})$ — риманово многообразие. Обозначим через $I(H)$ группу изометрий многообразия $(H, \mathrm{h})$, а через $\mathrm{d}_0\colon H \times H \to \mathbb{R}$ его риманову функцию расстояния.

**Определение 4.3.** Риманово многообразие $(H, \mathrm{h})$ называется *однородным*, если группа $I(H)$ действует на $H$ транзитивно, т. е. для любых двух точек $p, q \in H$ существует изометрия $\varphi \in I(H)$, переводящая $p$ в $q$: $q = \varphi(p)$. Далее, $(H, \mathrm{h})$ называется *двухточечным однородным*, если для любых точек $p_1, q_1, p_2, q_2 \in H$, связанных соотношением $\mathrm{d}_0(p_1, q_1) = \mathrm{d}_0(p_2, q_2)$, существует изометрия $\varphi \in I(H)$, такая, что $p_2 = \varphi(p_1)$ и $q_2 = \varphi(q_1)$.

Поскольку точки $p_1, q_1, p_2, q_2$ можно выбрать так, что $p_i = q_i$, $i = 1, 2$, то двухточечное однородное риманово многообразие является также и однородным. Впервые двухточечные однородные пространства изучались Буземаном (1942) в более общей ситуации локально компактных метрических пространств. Вонг (1951, 1952) и Титс (1955) дали классификацию двухточечных однородных римановых многообразий.

Заметим, что в определении 4.3 не требуется, чтобы риманово многообразие $(H, \mathrm{h})$ было полным. Тем не менее однородные римановы многообразия всегда полны.

**Лемма 4.4.** *Если* $(H, \mathrm{h})$ — *однородное риманово многообразие, то* $(H, \mathrm{h})$ *полное.*

*Доказательство.* Согласно теореме Хопфа — Ринова, достаточно показать, что многообразие $(H, \mathrm{h})$ является геодезически полным. Предположим, что $c$: $[a, 1) \to H$ — нормальная геодезическая, непродолжаемая в $t = 1$. Взяв в $H$ произвольную точку $p$, можно найти постоянную $\alpha > 0$, такую, что любая нормальная геодезическая, исходящая из точки $p$, имеет длину $\geqslant \alpha$. Положим $\delta = \min(\alpha/2, (1 - a)/2) > 0$. Из того, что изометрии сохраняют геодезические, и из однородности $(H, \mathrm{h})$ вытекает, что любая нормальная геодезическая, исходящая из точки $c(1 - \delta)$, может быть продолжена до геодезической длины $\geqslant 2\delta$. В частности, $c$ можно продолжить до геодезической $c$: $[a, 1 + \delta) \to H$, что противоречит непродолжаемости $c$ в $t = 1$. $\square$

**Замечание 4.5.** Важно отметить, что утверждение леммы 4.4 для лоренцевых однородных многообразий в общем случае неверно (см. Вольф (1982, с. 118), Марсден (1973)).

Напомним теперь понятие изотропного риманова многообразия. Для заданной точки $p \in (H, \mathrm{h})$ *изотропная группа* $I_p(H)$ многообразия $(H, \mathrm{h})$ в точке $p$ определяется как замкнутая подгруппа $I_p(H) = \{\varphi \in I(H), \varphi(p) = p\}$ группы $I(H)$, состоящая из всех изометрий многообразия $(H, \mathrm{h})$, сохраняющих точку $p$. Дифференциал $\varphi_{*p}$ произвольной изометрии $\varphi \in I_pH$ отображает $T_pH$ на $T_pH$ вследствие того, что $\varphi(p) = p$. Так как $\mathrm{h}(\varphi_* v, \varphi_* v) = \mathrm{h}(v, v)$ для любого $v \in T_pH$, то дифференциал $\varphi_{*p}$ отображает единичную сферу $S_pH = \{v \in T_pH\colon \mathrm{h}(v, v) = 1\}$ в $T_pH$ также на себя.

**Определение 4.6.** Риманово многообразие $(H, \mathrm{h})$ называется *изотропным в точке* $p$, если $I_p(H)$ действует транзитивно на единичной сфере $S_pH$ касательного пространства $T_pH$, т. е. для любых $v, w \in S_pH$ существует изометрия $\varphi \in I_p(H)$, для которой $\varphi_* v = w$. Риманово многообразие $(H, \mathrm{h})$ называется *изотропным*, если оно изотропно в каждой точке.

Покажем теперь, что класс изотропных римановых многообразий совпадает с классом двухточечных однородных римановых многообразий (см. Вольф (1982, с. 340)).

**Предложение 4.7.** *Риманово многообразие* $(H, \mathrm{h})$ *изотропно тогда и только тогда, когда оно двухточечно однородно.*

*Доказательство.* Напомним, что через $\mathrm{d}_0$ обозначена риманова функция расстояния многообразия $(H, \mathrm{h})$. Предположим сначала, что $(H, \mathrm{h})$ изотропно. Тогда для каждой точки $p \in H$ и любой непродолжаемой геодезической $c$: $(a, b) \to H$, $c(0) = p$, найдется изометрия $\varphi \in I_p(H)$, для которой $\varphi_* c'(0) = -c'(0)$. Отсюда

в силу единственности геодезической $\varphi(c(t)) = c(-t)$ для всех $t \in (a, b)$. Это означает, что длина $c \mid (a, 0]$ равна длине $c \mid [0, b)$. Так как в качестве $p$ можно выбрать любую точку геодезической $c$, то $a = -\infty$ и $b = \infty$. Поэтому $(H, \mathrm{h})$ геодезически полно. Из теоремы Хопфа — Ринова следует, что для любых двух точек $p_1, p_2 \in H$ найдется геодезический сегмент $c_0$ минимальной длины $\mathrm{d}_0(p_1, p_2)$, соединяющий $p_1$ и $p_2$. Пусть $p$ — средняя точка сегмента $c_0$. Так как $(H, \mathrm{h})$ изотропно, то найдется изометрия $\varphi \in \in I_p(H)$, которая обращает $c_0$. Отсюда следует, что $\varphi(p_1) = p_2$. Значит, $(H, \mathrm{h})$ однородно. Остается показать, что если точки $p_1, q_1, p_2, q_2 \in H$, связанные условием $\mathrm{d}_0(p_1, q_1) = \mathrm{d}_0(p_2, q_2) > 0$, заданы, то можно найти изометрию $\varphi \in I(H)$, для которой $\varphi(p_1) = p_2$ и $\varphi(q_1) = q_2$. Выберем минимальные нормальные геодезические $c_1$ из $p_1$ в $q_1$ и $c_2$ из $p_2$ в $q_2$. В силу однородности $(H, \mathrm{h})$ существует изометрия $\psi \in I(H)$, переводящая $p_1$ в $p_2$, $\psi(p_1) = p_2$. Далее, так как $(H, \mathrm{h})$ изотропно, то можно найти $\eta \in I_{p_2}(H)$, для которой $\eta_*((\psi \circ c_1)')(0) = c_2'(0)$. Отсюда следует, что $\varphi = \eta \circ \psi$ — требуемая изометрия.

Предположим теперь, что $(H, \mathrm{h})$ — двухточечное однородное многообразие. Зафиксируем точку $p \in H$ и рассмотрим выпуклую нормальную окрестность $U$ с базой в точке $p$. Выберем $\alpha > 0$ так, чтобы $\exp_p(v) \in U$ для всех $v \in T_pH$, подчиняющихся условию $\mathrm{h}(v, v) \leqslant 0$. Пусть теперь $v, w \in T_pH$ — произвольная пара ненулевых касательных векторов, у которых $\mathrm{h}(v, v) = \mathrm{h}(w, w) < \alpha/2$. Положим $q_1 = \exp_p v$ и $q_2 = \exp_p w$. Тогда $q_1, q_2 \in U$ и $\mathrm{d}(p, q_1) = \sqrt{\mathrm{h}(v, v)} = \sqrt{\mathrm{h}(w, w)} = \mathrm{d}(p, q_2)$. Поскольку $(H, \mathrm{h})$ двухточечно однородно, найдется изометрия $\varphi \in I(H)$, для которой $\varphi(p) = p$ и $\varphi(q_1) = q_2$. Следовательно, $\varphi_* v = w$. Из линейности $\eta_{*p}\colon T_pH \to T_pH$ (для любого $\eta \in I_p(H)$) вытекает, что $I_p(H)$ действует на $S_pH$ транзитивно. Поэтому $(H, \mathrm{h})$ изотропно в точке $p$. Так как те же самые рассуждения проходят для любой точки из $H$, то многообразие $(H, \mathrm{h})$ изотропно, как и требовалось. □

**Следствие 4.8.** *Всякое изотропное риманово многообразие однородно и полно.*

**Замечание 4.9.** (а) Двухточечные однородные римановы многообразия хорошо известны (см. Вольф (1982, с. 340—348)). В частности, нечетномерные двухточечные однородные (следовательно, изотропные) римановы многообразия — это в точности нечетномерные евклидовы, гиперболические, сферические и эллиптические пространства (см. Вонг (1951, с. 473)).

(б) Астрономические наблюдения указывают, что пространственная вселенная приближенно сферически-симметрична вокруг земли. Это подсказывает мысль о том, что вселенную следовало бы

моделировать трехмерным изотропным римановым многообразием. Тогда возникающие здесь возможности ограничиваются евклидовым, гиперболическим, сферическим и эллиптическим пространствами. С другой стороны, если предполагать только локальную изотропию, то возможностей становится существенно больше (см. Мизнер, Торн и Уилер (1977)).

(в) Любое трехмерное изотропное риманово многообразие $(H, \mathrm{h})$ имеет постоянную секционную кривизну и $\dim I(H) = 6$ (см. Уокер (1944)).

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы, используя лоренцевы искривленные произведения и изотропные римановы многообразия, определить пространства Робертсона — Уокера.

**Определение 4.10.** *Пространство-время Робертсона — Уокера* $(M, \mathrm{g})$ — это любое лоренцево многообразие, допускающее запись в виде лоренцева искривленного произведения $(M_0 \times_f H, \mathrm{g})$, где $M_0 = (a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, — интервал с заданной на нем отрицательно определенной метрикой $-dt^2$, $(H, \mathrm{h})$ — изотропное риманово многообразие, а $f\colon M_0 \to (0, \infty)$ — искривляющая функция.

В обозначениях разд. 2.6 имеем $\mathrm{g} = -dt^2 \oplus f\mathrm{h}$; $M_0 \times_f H$ топологически эквивалентно произведению $M_0 \times H$. Обозначая через $d\sigma^2$ риманову метрику $\mathrm{h}$ многообразия $H$ и полагая $S(t) = \sqrt{f(t)}$, можно переписать лоренцеву метрику $\mathrm{g}$ для $M_0 \times_f H$ в более привычном виде:

$$ds^2 = -dt^2 + S^2(t)\, d\sigma^2.$$

Отображение $\pi\colon M_0 \times_f H \to \mathbb{R}$, задаваемое правилом $\pi(t, x) = t$, является гладкой временно́й функцией на $M_0 \times_f H$, так что лоренцево многообразие $M_0 \times_f H$ из определения 4.10 действительно является (устойчиво причинным) пространством-временем. Кроме того, каждая поверхность уровня $\pi^{-1}(c)$ отображения $\pi\colon M_0 \times_f H \to M_0 \in \mathbb{R}$ — это изотропное риманово многообразие, гомотетичное $(H, \mathrm{h})$. Далее, группу изометрий $I(H)$ многообразия $(H, \mathrm{h})$ можно отождествить с подгруппой $\tilde{I}(H)$ группы изометрий $I(M_0 \times_f H)$ следующим образом. Полагая $\varphi \in I(H)$, определим $\bar{\varphi} \in \tilde{I}(H)$ посредством соотношения $\bar{\varphi}(r, b) = (r, \varphi(b))$, где $(r, b) \in M_0 \times H$ произвольна. В соответствии с этим определением ограничение $\tilde{I}(H)$ на поверхности уровня $\pi^{-1}(c)$ отображения $\pi$ действует транзитивно на каждой поверхности уровня.

Вследствие того что все изотропные римановы многообразия являются полными, теорема 2.53 позволяет утверждать, что все пространства Робертсона — Уокера глобально гиперболичны. Из теоремы 2.56 известно также, что всякая поверхность уровня

$\pi^{-1}(c) = \{c\} \times H$ является поверхностью Коши многообразия $M_0 \times_f H$.

Следующим по простоте пространством-временем Робертсона — Уокера после пространства Минковского является статическая вселенная Эйнштейна.

**Пример 4.11** (статическая вселенная Эйнштейна). Пусть на $M_0 = \mathbb{R}$ задана отрицательно определенная метрика $-dt^2$, а на $H = S^{n-1}$ — стандартная сферическая риманова метрика. Если $f\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ — тривиальная искривляющая функция, $f = 1$, то лоренцево многообразие $M = M_0 \times_f H = M_0 \times H$ представляет собой $n$-мерную статическую вселенную Эйнштейна. В двумерном случае, $n = 2$, $M$ является цилиндром $\mathbb{R} \times S^1$ с плоской метрикой $-dt^2 + d\theta^2$. Если $n \geqslant 3$, то эта метрика для $M = \mathbb{R} \times S^{n-1}$ уже не плоская вследствие того, что $S^{n-1}$ имеет постоянную секционную кривизну, равную 1.

В оставшейся части этого раздела мы ограничим наше внимание четырехмерными пространствами Робертсона — Уокера. Согласно замечанию 4.9, это искривленные произведения $M_0 \times_f H$, где $(H, \mathrm{h})$ — евклидово, гиперболическое, сферическое или эллиптическое пространство размерности 3. В первых двух случаях $H$ гомеоморфно $\mathbb{R}^3$, в третьем случае $H = S^3$, и в последнем $H$ является вещественным проективным пространством $\mathbb{R}P^3$. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

**Следствие 4.12.** *Все четырехмерные пространства Робертсона — Уокера топологически эквивалентны либо $\mathbb{R}^4$, либо $\mathbb{R} \times S^3$, либо $\mathbb{R} \times \mathbb{R}P^3$.*

Согласно замечанию 4.9, секционная кривизна $k$ многообразия $(H, \mathrm{h})$ постоянна. Если $k$ отлична от нуля, то перенормировкой метрику на $M$ можно привести к виду $ds^2 = -dt^2 + S^2(t)\, d\sigma^2$, так что $k$ равна либо 1, либо $-1$. Метрики такого вида обычно и изучаются в общей теории относительности.

В физике космологические модели, построенные при помощи четырехмерных пространств Робертсона — Уокера, предполагаются заполненными идеальной жидкостью. Тогда для того, чтобы найти вид указанной выше искривляющей функции $S^2(t)$, используются уравнения Эйнштейна (см. добавление В). Среди тех моделей, которые дает эта техника, есть и космологические модели большого взрыва (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 153—157)). Эти модели зависят от плотности энергии $\mu$ и давления $p$ идеальной жидкости, равно как и от космологической постоянной $\Lambda$ в уравнениях Эйнштейна. В космологических моделях большого взрыва все непродолжаемые непространственноподобные геодезические неполны в прошлом. Устойчивость этой неполноты при возмущениях метрики будет рассмотрена в разд. 6.3. Астрономические

наблюдения скоплений галактик показывают, что далекие скопления галактик удаляются от нас. Это расширение вселенной предполагает существование в прошлом «большого взрыва», а также и то, что вселенная является скорее искривленным произведением с нетривиальной искривляющей функцией, а не просто лоренцевым произведением. Наблюдения излучения черных дыр подтверждает эти мысли (см. Хокинг и Эллис (1977, гл. 10)).

## 4.5. Биинвариантные лоренцевы метрики на группах Ли

Цель этого раздела состоит в том, чтобы показать, как можно использовать теоремы 2.54 и 2.55 разд. 2.6 для построения большого класса групп Ли, допускающих глобально гиперболические биинвариантные лоренцевы метрики.

Сначала коротко изложим некоторые основные факты из элементарной теории групп Ли. Подробности можно найти либо у Милнора (1965, гл. 4; доступное изложение), либо у Хелгасона (1964, гл. 2; изложение, требующее от читателя предварительной подготовки). Группа Ли — это группа $G$, которая, кроме того, является аналитическим многообразием, так что отображение $G \times G \to G$, задаваемое по правилу $(g, h) \to gh^{-1}$, аналитично. Это умножение индуцирует левые и правые отображения сдвига $L_g$ и $R_g$ для каждого $g \in G$: $L_g(h) = gh$ и $R_g(h) = hg$. Риманова или лоренцева метрика $\langle , \rangle$ на $G$ называется *левоинвариантной* (соответственно *правоинвариантной*), если $\langle L_{g*}v, L_{g*}w\rangle = \langle v, w\rangle$ (соответственно $\langle R_{g*}v, R_{g*}w\rangle = \langle v, w\rangle$) для всех $g \in G$, $v, w \in TG$. Метрики, являющиеся одновременно и лево- и правоинвариантными, называются *биинвариантными*. На всякой компактной группе Ли можно задать биинвариантную метрику при помощи процедуры осреднения, использующей меру Хаара (см. Милнор (1965, с. 122)). Фактически меру Хаара можно применять для построения биинвариантной римановой метрики на $G$ по любой левоинвариантной римановой метрике для этой группы. Произвольная группа Ли может быть наделена левоинвариантной римановой (или лоренцевой) метрикой путем задания положительно определенного скалярного произведения (соответственно произведения с сигнатурой $n-2$) $\langle , \rangle_e$ на касательном пространстве $T_eG$ к $G$ в единичном элементе $e \in G$ и последующего определения отображения $\langle , \rangle|_g \colon T_gG \times T_gG \to \mathbb{R}$ по правилу

$$\langle v, w\rangle|_g = \langle L_{g^{-1}_*}v, L_{g^{-1}_*}w\rangle|_e. \tag{4.1}$$

Таким образом, любая компактная группа Ли снабжается большим набором биинвариантных римановых метрик.

С другой стороны, хотя правило (4.1) и оснащает произвольную группу Ли левоинвариантной лоренцевой метрикой, стандарт-

ная процедура осреднения при помощи меры Хаара, используемая для римановых метрик, не сохраняет сигнатуру $(-, +, \ldots, +)$, и поэтому ее нельзя использовать для превращения левоинвариантных лоренцевых метрик в биинвариантные лоренцевы метрики.

Однако вскоре мы увидим, что для некомпактных групп Ли, имеющих вид $\mathbb{R} \times G$, где $G$ — произвольная группа Ли, допускающая биинвариантную риманову метрику, можно построить большой класс биинвариантных лоренцевых метрик.

Прежде чем предъявлять соответствующую конструкцию, необходимо кратко остановиться на понятии произведения групп Ли. Пусть $G$ и $H$ — группы Ли. Произведение многообразий $G \times H$ превращается в группу Ли, если умножение определить на нем по формуле

$$(g_1, h_1) \times (g_2, h_2) = (g_1 g_2,\ h_1 h_2). \tag{4.2}$$

Непосредственно из соотношения (4.2) следует, что если $\sigma = (g, h) \in G \times H$, то отображения сдвига $L_\sigma$, $R_\sigma$: $G \times H \to G \times H$ задаются по правилам $L_\sigma = (L_g, L_h)$ и $R_\sigma = (R_g, R_h)$, т. е. $L_\sigma(g_1, h_1) = (L_g g_1, L_h h_1)$ и т. п. Напомним, что $T_\sigma(G \times H) \cong T_g G \times T_h H$. Прямыми вычислениями можно убедиться в том, что для любого $\sigma \in G \times H$ и любого касательного вектора $\xi = (v, w) \in T_\sigma(G \times H) \cong T_g G \times T_h H$ справедливы следующие формулы:

$$L_{\sigma_*}\xi = (L_{g_*}v,\ L_{h_*}w) \tag{4.3}$$

и

$$R_{\sigma_*}\xi = (R_{g_*}v,\ R_{h_*}w). \tag{4.4}$$

Если $\langle , \rangle_1$ — лоренцева метрика на $G$, а $\langle , \rangle_2$ — риманова метрика на $H$, то $\langle\langle , \rangle\rangle = \langle , \rangle_1 \oplus \langle , \rangle_2$ — лоренцева метрика на произведении $G \times H$. Для касательных векторов $\xi_1 = (v_1, w_1)$ и $\xi_2 = (v_2, w_2)$ из пространства $T_\sigma(G \times H)$, вспоминая определение 2.38, это можно записать следующим образом:

$$\langle\langle \xi_1, \xi_2 \rangle\rangle = \langle v_1, v_2 \rangle_1 + \langle w_1, w_2 \rangle_2.$$

Из формул (4.3) и (4.4) немедленно вытекает, что если $\langle , \rangle_1$ — биинвариантная лоренцева метрика на $G$, а $\langle , \rangle_2$ — биинвариантная риманова метрика на $H$, то $\langle\langle , \rangle\rangle$ — биинвариантная метрика произведения $G \times H$. Подведем итог.

**Предложение 4.13.** *Пусть $(G, \langle , \rangle_1)$ — группа Ли, наделенная биинвариантной лоренцевой метрикой и $(H, \langle , \rangle_2)$ — группа Ли, наделенная биинвариантной римановой метрикой. Тогда $\langle\langle , \rangle\rangle = \langle , \rangle_1 \otimes \langle , \rangle_2$ — биинвариантная лоренцева метрика для произведения групп Ли $G \times H$. Следовательно, $(G \times H, \langle\langle , \rangle\rangle)$ является*

*лоренцевым симметрическим пространством и, в частности, геодезически полно.*

*Доказательство.* Необходимо доказать только последнее утверждение, применяя для этого стандартные приемы из теории групп Ли. Напомним, что мы должны показать, что для каждого $\sigma \in G \times H$ существует изометрия $I_\sigma$: $G \times H \to G \times H$, которая оставляет $\sigma$ на месте и переворачивает геодезические, проходящие через $\sigma$, т. е. нужно показать, что если $\gamma$ — геодезическая на $G \times H$ и $\gamma(0) = \sigma$, то $I_\sigma(\gamma(t)) = \gamma(-t)$ для всех $t$. Это равносильно тому, что отображение $I_{\sigma_*}$: $T_\sigma(G \times H) \to T_\sigma(G \times H)$ действует по правилу $I_{\sigma_*}(\xi) = -\xi$, а также, что $I_\sigma^2 = \mathrm{id}$.

Мы будем следовать доказательству, предложенному Милнором (1966, с. 119, 122). Обозначим через $e$ единичный элемент $G \times H$ и определим отображение $I_e$: $G \times H \to G \times H$ посредством соотношения $I_e(\sigma) = \sigma^{-1}$. Тогда $I_{e_*}$: $T_e(G \times H) \to T_e(G \times H)$ задается формулой $I_{e_*}(v) = -v$. Поэтому $I_{e_*}$: $T_e(G \times H) \to$ $\to T_e(G \times H)$ является изометрией пространства $T_e(G \times H)$. Чтобы убедиться в том, что $I_{e_*}$ — изометрия любого другого касательного пространства $T_\sigma(G \times H) \to T_{\sigma^{-1}}(G \times H)$, и, значит, в том, что $I_e$: $G \times H \to G \times H$ — изометрия, заметим просто, что

$$I_e = R_{\sigma^{-1}} I_e L_{\sigma^{-1}}.$$

Так как $\langle\langle , \rangle\rangle$ биинвариантна, то все левые и все правые сдвиги являются изометриями. Тогда из формулы

$$I_{e_*}\big|_\sigma = R_{\sigma_*^{-1}}\big|_e I_{e_*}\big|_e L_{\sigma_*^{-1}}\big|_\sigma$$

и того факта, что $I_{e_*}|_e$ — изометрия $T_e(G \times H)$, получаем, что $I_{e_*}$: $T_\sigma(G \times H) \to T_{\sigma^{-1}}(G \times H)$ также является изометрией. Поэтому отображение $I_e$: $G \times H \to G \times H$ является требуемой геодезической симметрией в $e$.

Геодезическую симметрию $I_\sigma$ для любого $\sigma \in G \times H$ определим посредством формулы $I_\sigma = R_\sigma I_e R_{\sigma^{-1}}$. Так как $R_\sigma$ и $R_{\sigma^{-1}}$ — изометрии вследствие биинвариантности $\langle\langle , \rangle\rangle$ и, как мы только что показали, $I_e$ — также изометрия, то $I_\sigma$: $G \times H \to G \times H$ является изометрией, и ясно, что $I_\sigma(\sigma) = \sigma$ в силу соотношения $I_\sigma(h) =$ $= \sigma h^{-1} \sigma$. Окончательно для любого $\xi \in T_\sigma(G \times H)$ получаем

$$I_{\sigma_*}\xi = R_{\sigma_*}(I_{e_*}(R_{\sigma_*^{-1}}\xi)) = R_{\sigma_*}(-R_{\sigma_*^{-1}}\xi) =$$
$$= -R_{\sigma_*}R_{\sigma_*^{-1}}\xi = -(R_\sigma R_{\sigma^{-1}})_*\xi = -\xi$$

ввиду того, что $R_{\sigma_*^{-1}}\xi \in T_e(G \times H)$. Таким образом, $I_\sigma$ переворачивает геодезические в $\sigma$, как и требовалось. Следовательно, мы доказали, что $G \times H$ — симметрическое пространство.

То, что любое симметрическое пространство геодезически полно, можно показать следующим образом. Пусть $\gamma$ геодезическая

из $M$ и $p = \gamma(0)$. Предположим, что определена $q = \gamma(A)$. Тогда при условии, что определены $\gamma(t)$ и $\gamma(t + 2A)$, можно получить формулу (см. Милнор (1966, с. 119))

$$I_q I_p(\gamma(t)) = \gamma(t + 2A).$$

Поэтому, если геодезическая $\gamma$ первоначально определена на отрезке $[0, \lambda]$, $\gamma\colon [0, \lambda] \to G \times H$, то ее можно продолжить до геодезической $\tilde{\gamma}\colon [0, 2\lambda] \to G \times H$ путем выбора $q = \gamma(\lambda/2)$, положив $\tilde{\gamma}(t) = I_q I_p(\gamma(t - \lambda))$ для $t \in [\lambda, 2\lambda]$. Ясно, что $\gamma$ таким способом можно продолжить на $(-\infty, \infty)$. Тем самым $(G \times H, \langle\langle , \rangle\rangle)$ является геодезически полным. $\square$

Предложение 4.13 имеет несомненный недостаток, состоящий в том, что в нем предполагается существование групп Ли $(G, \langle , \rangle_1)$, наделенных биинвариантными лоренцевыми метриками. Сейчас будет показано, что такие группы Ли можно строить из произведений вида $(\mathbb{R} \times G, -dt^2 \oplus \langle , \rangle)$, где $(G, \langle , \rangle)$ является группой Ли, оснащенной римановой биинвариантной метрикой.

Структура группы Ли на $(\mathbb{R}, -dt^2)$, которой мы будем пользоваться, индуцируется обычным сложением вещественных чисел. Соответственно этому будем пользоваться для обозначения «умножения» в группе Ли следующей записью: $(a, b) \longrightarrow a + b$, несмотря на используемое выше обозначение для групповой операции. Здесь $\mathbb{R}$ представляет собой аналитическое многообразие, определяемое картой $t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t(r) = r$. Обозначим через $\partial/\partial t$ соответствующее координатное векторное поле на $\mathbb{R}$. Левые и правые сдвиги $L_a$, $R_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задаются формулами $L_a(r) = a + r$ и $R_a(r) = r + a$. Легко проверить, что если $v = \lambda\partial/\partial t|_r \in T_r\mathbb{R}$, то $L_{a*}v$, $R_{a*}v \in T_{a+r}(\mathbb{R})$ задаются по правилу $L_{a*}v = R_{a*}v = \lambda\partial/\partial t|_{a+r}$. Следовательно, $-dt^2(L_{a*}v, L_{a*}v) = -dt^2(R_{a*}v, R_{a*}v) = -\lambda^2 dt^2 = -dt^2(v, v)$, так что $-dt^2$ и лево-, и правоинвариантна.

Пусть $(G, \langle , \rangle)$ — группа Ли с биинвариантной римановой метрикой. Согласно доказанному в предложении 4.13, $G$ является полным симметрическим пространством. Используя формулы (4.3) и (4.4), легко убедиться и в том, что метрика $\langle\langle , \rangle\rangle = -dt^2 \oplus \langle , \rangle$ является биинвариантной лоренцевой метрикой на $\mathbb{R} \times G$. (Здесь скалярное произведение векторов $\xi_1 = (\lambda_1\partial/\partial t|_r, v_1)$ и $\xi_2 = (\lambda_2\partial/\partial t|_r, v_2)$, где $v_1, v_2 \in T_gG$, вычисляется по формуле $\langle\langle \xi_1, \xi_2 \rangle\rangle = -\lambda_1\lambda_2 + g(v_1, v_2)$). Произведение $(\mathbb{R} \times G, \langle\langle , \rangle\rangle)$ глобально гиперболично по теореме 2.54 в силу того, что $(G, \langle , \rangle)$ — полное риманово многообразие. Таким образом, мы получили следующее утверждение.

**Теорема 4.14.** *Пусть на $(\mathbb{R}, -dt^2)$ задана обычная структура аддитивной группы и $(G, \langle , \rangle)$ — произвольная группа Ли с биинвариантной римановой метрикой. Тогда метрика произведения*

$\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle = -dt^2 \oplus \langle\ ,\ \rangle$ *является биинвариантной лоренцевой метрикой для произведения групп Ли* $\mathbb{R} \times G$. *Поэтому* $(\mathbb{R} \times G, \langle\langle\ ,\ \rangle\rangle)$ — *геодезически полное глобально гиперболическое пространство-время.*

По группам Ли, однородным и симметричным пространствам, оснащенным биинвариантными индефинитными метриками, было проведено много исследований, инициированных работой Картана, прежде чем современная теория причинности стала играть столь важную роль в общей теории относительности. Поэтому большая часть этих результатов была получена не для лоренцевых метрик, а для общих псевдоримановых метрик произвольной сигнатуры. Вместо того чтобы делать попытку дать сколь-либо подробный список ссылок, мы обращаем читателя к библиографии в книге Вольфа (1982). Большинство этих исследований связано с проблемой классификации всех геодезически полных псевдоримановых многообразий постоянной кривизны («проблема пространственных форм»). Две недавние работы по псевдоримановой теории групп Ли написаны Кулкарни (1978) и Номидзу (1979). Работа Номидзу посвящена специально лоренцевым метрикам: в ней рассматриваются вопросы существования левоинвариантных лоренцевых метрик постоянной кривизны на некотором классе некоммутативных групп Ли.

Глава 5

# ПОЛНОТА И РАСШИРЕНИЯ

В гл. 1 мы упоминали о том, что теорема Хопфа—Ринова гарантирует эквивалентность геодезической и метрической полноты для произвольных римановых многообразий. Кроме того, любое из этих условий обеспечивает существование минимальных геодезических, т. е. для любых двух точек $p, q \in M$ существует геодезическая из $p$ в $q$, длина дуги которой равна метрическому расстоянию между этими точками. Если $M$ компактно, то из теоремы Хопфа—Ринова следует также, что все римановы метрики на $M$ полны. Что касается некомпактного случая, то, как установили Номидзу и Одзеки (1961), каждое некомпактное гладкое многообразие допускает полную риманову метрику. Обобщая их доказательство, Морроу (1970) показал, что полные римановы метрики на $M$ образуют всюду плотное множество в компактно-открытой топологии в пространстве всех римановых метрик на $M$ (см. Фиган и Миллман (1978)).

В первых трех разделах этой главы мы сопоставим (и противопоставим) эти результаты со свойствами геодезической и метрической полноты для произвольных лоренцевых многообразий. В разд. 5.1 разбирается стандартный пример, показывающий, что геодезическая полнота, вообще говоря, не гарантирует существования максимальных геодезических сегментов, соединяющих причинно связанные точки. Напомним, однако, что класс глобально гиперболических пространств этим полезным свойством обладает. В разд. 5.2 мы рассмотрим такие формы полноты, как непространственноподобная геодезическая полнота, полнота ограниченного ускорения (о. у.) и $b$-полнота, которые изучаются в теории сингулярностей общей теории относительности (см. Кларке и Шмидт (1977), Эллис и Шмидт (1977)). Мы также докажем следствие из теоремы 8 Бима (1976а, с. 184), устанавливающее существование непространственноподобно полных метрик для всех различающих пространств. В разд. 5.3 мы исследуем связь между лоренцевой метрической полнотой и конечной компактностью.

В оставшихся четырех разделах этой главы мы рассмотрим расширения и локальные расширения пространства-времени.

Вследствие того что расширение тесно связано с геодезической полнотой, оно играет важную роль в теории сингулярностей общей теории относительности (см. Кларке (1973, 1975, 1976), Хокинг и Эллис (1977), Эллис и Шмидт (1977)). В частности, обычно стремятся избегать исследований пространств, являющихся собственными подмножествами бóльших лоренцевых многообразий, из-за того что такие собственные подмножества геодезически неполны.

Пространство-время $(M', g')$ называется *расширением* пространства-времени $(M, g)$, если $(M, g)$ можно изометрично вложить в собственное открытое подмножество $(M', g')$. Пространство-время, не имеющее расширений, называется либо *нерасширяемым* (см. Хокинг и Эллис (1977)), либо *максимальным* (см. Сакс и Ву (1977б, с. 29)).

Локальное расширение — это расширение подмножества исходного пространства-времени определенного вида. В общем случае локальная нерасширяемость (т. е. отсутствие локальных расширений) влечет глобальную нерасширяемость. В силу того что вопросы расширения естественно связаны с границей пространства-времени, в разд. 5.4 мы коротко опишем свойства $b$-границы Шмидта и причинной границы Герока—Кронхеймера—Пенроуза. В разд. 5.5 будут определены и изучены два вида локальных расширений. Будет показано, что если лоренцево многообразие не допускает локальных расширений любого из этих двух видов, то оно нерасширяемо. Мы также построим локальное расширение пространства-времени Минковского, показывающее, что, хотя $b$-полнота и вынуждает пространство-время быть (глобально) нерасширяемым, тем не менее она не препятствует его локальным расширениям.

В разд. 5.6 локальные расширения связываются с сингулярностями кривизны. Например, если $(M, g)$ — аналитическое пространство-время, каждая времениподобная геодезическая $\gamma$: $[0, a) \to M$ которого, непродолжаемая через $t = a$, либо полна (в том смысле, что $a = \infty$), либо соответствует сингулярности кривизны, то $(M, g)$ не имеет аналитических локальных $b$-граничных расширений.

## 5.1. Существование максимальных геодезических сегментов

Цель этого раздела двояка. Во-первых, мы напомним, что для произвольных лоренцевых многообразий геодезическая полнота не обеспечивает существования максимальных геодезических сегментов, соединяющих причинно связанные пары точек. Во-вторых, мы обсудим важный и полезный факт, что в глобально

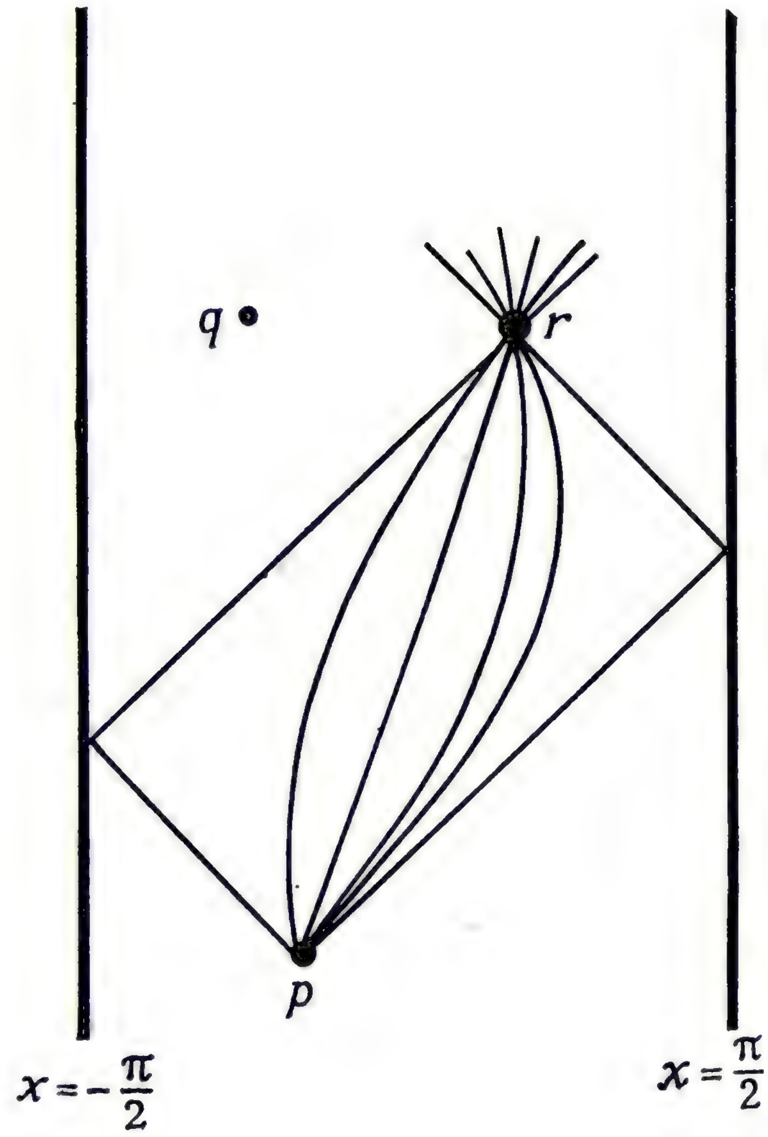



Рис. 5.1. Показано универсальное накрытие двумерного пространства-времени де Ситтера второго рода

$$M = \{(x, t)\colon -\pi/2 < x < \pi/2\},$$

метрика которого задается формулой $ds^2 = \sec^2 x\,(-dt^2 + dx^2)$. Точки $p$ и $q$ хронологически связаны в $M$. Однако максимальной времениподобной геодезической в $M$ из $p$ в $q$ не существует вследствие того, что все направленные в будущее времениподобные геодезические, исходящие из $p$, фокусируются в $r$.

гиперболических пространствах геодезические, на которых расстояние реализуется, существуют.

Универсальное накрывающее многообразие $(M, g)$ двумерного пространства де Ситтера 2-го рода может служить примером того, что геодезическая полнота пространства-времени не обеспечивает существования времениподобной геодезической $\gamma$, которая соединяла бы две произвольные точки $p$, $q \in M$, связанные отношением $p \ll q$, и имела длину $L(\gamma) = d(p, q)$ (рис. 5.1). Напомним, что если $\gamma$ — произвольная направленная в будущее времениподобная кривая из $p$ в $q$, длина которой $L(\gamma) = d(p, q)$, то $\gamma$ можно перепараметризовать во времениподобную геодезическую (см. теорему 3.13). Поэтому тот же самый пример показывает, что существуют геодезически полные пространства, содержащие такие точки $p$ и $q$, что $p \ll q$, но $L(\gamma) < d(p, q)$ для всех $\gamma \in \Omega_{p,q}$. Пространство-время $(M, g)$ можно представить в виде полосы $M = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2\colon -\pi/2 < x < \pi/2\}$ в $\mathbb{R}^2$ с лоренцевой метрикой $ds^2 = \sec^2 x\,(-dt^2 + dx^2)$ (см. Пенроуз (1972, с. 7)). Точки $p$ и $q$ на рис. 5.1 связаны отношением $p \ll q$. Однако все направленные в будущее времениподобные геодезические, исходящие из $p$, вновь фокусируются в будущем во времениподобно сопряженной точке $r$. Поэтому времениподобных геодезических в $M$, идущих из $p$ в $q$, нет. Вследствие этого среди кривых, соединяющих $p$ и $q$, не существует ни максимальной времениподобной геодезической, ни максимальной времениподобной кривой.

Рассмотрим теперь, какие условия нужно наложить на пространство-время для того, чтобы любую пару точек $p$, $q \in M$, где $q \in J^+(p)$, можно было соединить геодезической, реализующей расстояние. Если $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ и имеет лоренцеву метрику $ds^2 = dx^2 - dy^2$, то $p = (0, -1)$ и $q = (0, 1)$ — точки в $M$, расстояние между которыми $\mathrm{d}(p, q) = 2 > 0$, но которые нельзя соединить максимальной временниподобной геодезической. (Нужная геодезическая должна бы быть кривой $\gamma(t) = (0, t)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, проходящей через выброшенную точку (0, 0).) Правда, с другой стороны, это пространство-время является хронологическим, сильно причинным и устойчиво причинным. Поэтому имеет смысл ограничиться рассмотрением только класса глобально гиперболических пространств. Тем более что для этих пространств Авез (1963) и Зейферт (1967) показали, что любые точки $p$, $q \in M$, связанные отношением $p \leqslant q$, можно соединить геодезической, которая имеет наибольшую длину среди всех направленных в будущее непространственноподобных кривых, идущих из $p$ в $q$ (см. теорему 2.14). На языке определения 3.10 это можно сформулировать следующим образом.

**Теорема 5.1.** *Пусть $(M, g)$ — глобально гиперболическое пространство-время. Тогда для любых точек $p$, $q \in M$, связанных условием $q \in J^+(p)$, существует максимальный геодезический сегмент $\gamma \in \Omega_{p,q}$, т. е. направленная в будущее непространственноподобная геодезическая $\gamma$, соединяющая $p$ с $q$ и такая, что $L(\gamma) = \mathrm{d}(p, q)$.*

Мы дадим набросок доказательства этого результата, предложенного Зейфертом (1967, теорема 1) (см. также Пенроуз (1972, гл. 6)). Вследствие того что $(M, g)$ глобально гиперболично, можно показать, что для любой пары точек $p$, $q \in M$, связанных отношением $p \leqslant q$, пространство непространственноподобных путей $\Omega_{p,q}$ компактно. С другой стороны, в силу строгой причинности $(M, g)$ функционал длины дуги $L\colon \Omega_{p,q} \to \mathbb{R}$ полунепрерывен сверху в $C^0$-топологии (см. разд. 2.3). Поэтому найдется кривая $\gamma_0 \in \Omega_{p,q}$, длина которой $L(\gamma_0) = \sup\{L(\gamma)\colon \gamma \in \Omega_{p,q}\}$. Методами вариационного исчисления нетрудно показать, что если $\gamma_0$ не является перепараметризованной гладкой геодезической, то можно построить кривую $\sigma \in \Omega_{p,q}$ большей длины $L(\sigma) > L(\gamma)$, что противоречит максимальности $\gamma_0$. В свою очередь, если $L(\gamma_0) = \sup\{L(\gamma)\colon \gamma \in \Omega_{p,q}\}$, то $L(\gamma_0) = \mathrm{d}(p, q)$ по определению лоренцева расстояния. Тем самым теорема 3.13 позволяет утверждать, что $\gamma_0$ с точностью до перепараметризации является гладкой геодезической.

В случае когда $p \ll q$, максимальную кривую $\gamma_0$ можно построить также, используя результаты разд. 2.3. Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}$ — глобально гиперболическая временна̀я функция для $(M, g)$.

Выберем $t_0$ так, чтобы $f(p) < t_0 < f(q)$. Тогда пересечение $K = J^+(p) \cap J^-(q) \cap f^{-1}(t_0)$ компактно и любая непространственноподобная кривая из $p$ в $q$ пересекает $K$. По определению лоренцева расстояния найдется кривая $\gamma_n \in \Omega_{p,q}$, для которой

$$\mathrm{d}(p, q) \geqslant L(\gamma_n) \geqslant \mathrm{d}(p, q) - \frac{1}{n},$$

где $n$ — произвольное натуральное число. Пусть $r_n \in \gamma_n \cap K$. Вследствие того что $K$ компактно, подпоследовательность $r_{n(j)}$ сходится к $r \in K$. Согласно следствию 2.19, существует непространственноподобная кривая $\gamma_0$, проходящая через $r$, соединяющая $p$ с $q$ и предельная для последовательности $\{\gamma_{n(j)}\}$. Так как $(M, g)$ сильно причинно, то из предложения 2.12 вытекает, что некоторая подпоследовательность последовательности $\{\gamma_{n(j)}\}$ сходится к $\gamma_0$ в $C^0$-топологии. Используя замечание 2.22 и условие (1), получим, что $L(\gamma_0) \geqslant \mathrm{d}(p, q)$. Отсюда по определению расстояния $L(\gamma_0) = \mathrm{d}(p, q)$ и $\gamma_0$ можно (по теореме 3.13) перепараметризовать в гладкую геодезическую. Если $p \leqslant q$ и $\mathrm{d}(p, q) = 0$, то, согласно следствию 3.14, как мы уже знаем, найдется максимальный изотропный геодезический сегмент из $p$ в $q$.

В связи с теоремой 5.1 следует отметить, что глобальная гиперболичность не является обязательным условием для существования максимальных геодезических сегментов, соединяющих все пары причинно связанных точек. Пусть $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < 10,\ 0 < y < 10\}$ оснащено лоренцевой метрикой, которую оно получает как открытое подмножество пространства-времени Минковского. Вследствие того что геодезические на $M$ являются евклидовыми прямолинейными отрезками, видно, что для любой пары причинно связанных точек существует соединяющая их максимальная геодезическая. С другой стороны, если $p = (1, 1)$ и $q = (1, 9)$, то $J^+(p) \cap J^-(q)$ некомпактно. Поэтому это пространство-время не может быть глобально гиперболическим, хотя оно и сильно причинно.

## 5.2. Геодезическая полнота

В теореме 3.9 мы показали, что лоренцеву функцию расстояния можно использовать в сильно причинном пространстве-времени при построении подбазиса исходной топологии многообразия. В то же время множества $\{q \in M: \mathrm{d}(p, q) < R\}$ не могут образовывать базиса исходной топологии многообразия. Поэтому в общей теории относительности геодезическая полнота пространства-времени обычно рассматривается чаще, чем метрическая полнота.

Пусть $(M, g)$ — произвольное лоренцево многообразие.

**Определение 5.2.** Геодезическая $c$ с аффинным параметром $t$ на многообразии $(M, g)$ называется *полной*, если эту геодезическую можно продолжить так, чтобы она была определена для всех значений параметра $t$, $-\infty < t < \infty$. Непродолжаемая ни в прошлое, ни в будущее геодезическая называется *неполной*, если ее нельзя продолжить до произвольно больших положительных и отрицательных значений аффинного параметра. *Неполные в будущем* или *неполные в прошлом* геодезические можно определить аналогично.

Аффинный параметр кривой $c$ возникает в том случае, если существует такая параметризация кривой $c$, относительно которой $c(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению геодезических $\nabla_{c'}c'(t) = 0$ для всех $t$ (см. Кобаяси и Номидзу (1981, с. 135)). Необходимость использования понятия аффинного параметра возникает вследствие того, что изотропные геодезические, длины которых равны нулю, не могут быть параметризованы длиной дуги. Если $s$ и $t$ — два аффинных параметра для $c$, то из дифференциального уравнения геодезических вытекает существование постоянных $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, таких, что $s = at + b$ для всех значений $t$ из области задания $c$. Отсюда следует, что полнота и неполнота, введенные в определении 5.2, не зависят от выбора аффинного параметра. В частности, если $c$ — непродолжаемая времениподобная геодезическая, параметризованная длиной дуги (т. е. $g(c'(t), c'(t)) = -1$ для всех $t$ из области определения $c$), то $c$ неполна, если $L(c) < \infty$. Может случиться, что $c$ неполна даже в том случае, если $L(c) = \infty$. Это происходит, например, тогда, когда область определения $c$ имеет вид $(a, \infty)$, где $a > -\infty$.

Некоторые точные решения уравнений Эйнштейна в общей теории относительности, как, например, расширенное решение Шварцшильда, содержат непространственноподобные геодезические, которые становятся неполными при входе в черную дыру. И хотя существование неполных непродолжаемых непространственноподобных геодезических вовсе не обязывает пространство-время содержать черную дыру, тем не менее эти примеры подсказывают идею возможного использования наличия непространственноподобной геодезической неполноты в качестве теста первого порядка для выделения «сингулярных пространств» (см. Хокинг и Эллис (1977, гл. 8), Кларке и Шмидт (1977), Эллис и Шмидт (1977)). Поэтому нижеследующее определение в общей теории относительности является общепринятым. Напомним, что геодезическая называется непродолжаемой, если она непродолжаема ни в прошлое, ни в будущее.

**Определение 5.3.** Пространство-время $(M, g)$ называется *времениподобно* (соответственно *изотропно*, *непространственнопо-*

*добно, пространственноподобно) геодезически полным*, если все времениподобные (соответственно изотропные, непространственноподобные, пространственноподобные) непродолжаемые геодезические полны. Пространство-время называется *геодезически полным*, если все непродолжаемые геодезические являются полными. Совершенно аналогично пространство-время $(M, g)$ называется *времениподобно* (соответственно *изотропно, непространственноподобно, пространственноподобно*) *геодезически неполным*, если некоторые времениподобные (соответственно изотропные, непространственноподобные, пространственноподобные) геодезические неполны. Непространственноподобно неполное пространство-время называется *геодезически сингулярным пространством-временем*.

Ранее высказывались предположения о том, что времениподобная геодезическая полнота может повлечь за собой изотропную геодезическую полноту и т. п. Однако Кундт (1963) привел пример пространства-времени, которое времениподобно и изотропно геодезически полно, но не является пространственноподобно геодезически полным. Затем Герок (1968б, с. 531) построил пример пространства-времени, конформного пространству-времени Минковского и потому глобально гиперболического, которое времениподобно неполно, но является полным и изотропно, и пространственноподобно. Герок заметил также, что модификации примеров Кундта и его собственных дают примеры пространственно-временны́х многообразий, которые: 1) неполны в любых двух смыслах, но непременно полны в третьем; 2) пространственноподобно неполны, но полны времениподобно и изотропно; 3) времениподобно неполны, но полны и пространственноподобно, и изотропно. Затем Бим (1976в) построил пример глобально гиперболического пространства-времени, которое изотропно неполно, но является и времениподобно, и пространственноподобно полным. Эти результаты можно объединить следующим образом.

**Теорема 5.4.** *Времениподобная геодезическая полнота, изотропная геодезическая полнота и пространственноподобная геодезическая полнота логически не эквивалентны.*

Чтобы пояснить конструкции, используемые при доказательстве теоремы 5.4, мы опишем принадлежащий Героку пример пространства-времени, которое является и изотропно, и пространственноподобно полным, а времениподобно неполно. Пусть $(\mathbb{R}^2, g_0)$ — двумерное пространство Минковского с глобальными координатами $(x, t)$ и обычной лоренцевой метрикой $g_0 = ds^2 = dx^2 - dt^2$. Конформно преобразуем метрику $g_0$ к новой метрике $g = \varphi g_0$, где $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to (0, \infty)$ — гладкая функция со следующими свойствами (см. рис. 5.2):

(1) $\varphi(x, t) = 1$, если $x \leqslant -1$ или $x \geqslant 1$;

(2) $\varphi(x, t) = \varphi(-x, t)$ для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^2$;

(3) на оси $t$ $\varphi(0, t)$ при $t \to \infty$ стремится к нулю, как $t^{-4}$.

Вследствие того что метрика $g$ конформна метрике $g_0$, пространство-время $(\mathbb{R}^2, g)$ является глобально гиперболическим, а изотропные геодезические имеют в качестве образов прямые линии, образующие с осью $x$ углы в 45°. По свойству (2) отражение $F(x, t) = F(-x, t)$ является изометрией пространства $(\mathbb{R}^2, g)$. Вследствие того что множество неподвижных точек этой изометрии является вполне геодезическим, ось $t$ можно параметризовать так, чтобы она стала времениподобной геодезической. Согласно условию (3), эта геодезическая является неполной при $t \to \infty$. Поэтому многообразие $(\mathbb{R}^2, g)$ времениподобно неполно. Однако всякая изотропная, или пространственноподобная геодезическая, которая входит в полосу $-1 \leqslant x \leqslant 1$, в конце концов покидает ее, а затем остается вне этой полосы. Таким образом, условие (1) означает, что $(\mathbb{R}^2, g)$ изотропно и пространственноподобно полно.

Рассмотрим теперь обратную задачу — построение геодезически полных лоренцевых метрик для паракомпактных гладких многообразий. Чтобы сохранить причинную структуру исходного пространства-времени, ограничим наше внимание главным образом не произвольными деформациями метрики, а лишь ее глобально конформными преобразованиями.

Для риманова случая Номидзу и Одзеки (1961) показали, что произвольную риманову метрику можно сделать полной при помощи конформного преобразования. С другой стороны, существуют пространственно-временные многообразия, обладающие тем свойством, что никаким глобально конформным множителем их невозможно превратить в непространственноподобно геодезически полные. Пример двумерного пространства-времени с таким свойством был построен Мизнером (1967). В его примере есть непродолжаемые изотропные геодезические, которые неполны в будущем и захвачены в будущем компактным множеством (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 191—193)). Любое конформное преобразование рассматриваемого пространства будет оставлять эти изотропные геодезические точечно неизменными и неполными в будущем. Тем самым аналог результата Номидзу и Одзеки для произвольного пространства-времени получить нельзя.

Тем не менее для пространственно-временных многообразий, удовлетворяющих некоторым условиям причинности, было доказано существование непространственноподобно полных лоренцевых метрик. Зейферт (1971, с. 258) показал, что если $(M, g)$ устойчиво причинно, то $M$ конформно пространству-времени, у которого все направленные в будущее (или все направленные в прошлое) непространственноподобные геодезические полны. Кларке (1971) показано также, что путем конформного преобра-

зования метрики сильно причинное пространство-время можно сделать изотропно геодезически полным. Бим (1976а) изучал пространственно-временные многообразия, обладающие следующим свойством: никакая непродолжаемая в будущее непространственноподобная кривая не может быть захваченной в будущее произвольно взятым компактным подмножеством $K$ из $M$. (Напомним, что непространственноподобная кривая $\gamma$ называется захваченной в будущем множеством $K$, если существует $t_0 \in \mathbb{R}$, такое, что $\gamma(t) \in K$ для всех $t \geqslant t_0$.) Если $(M, g)$ — причинное пространство-время, удовлетворяющее этому условию, то найдется конформный множитель $\Omega$: $M \to (0, \infty)$, для которого многообразие $(M, \Omega g)$ изотропно и времениподобно геодезически полно (см. Бим (1976а, с. 184, теорема 8)). Это условие захвата выполнено, если $(M, g)$ устойчиво причинно, сильно причинно или является различающим. Тем самым мы можем сформулировать следующий результат.

**Теорема 5.5.** *Если пространство-время* $(M, g)$ *является различающим, сильно причинным, устойчиво причинным или глобально гиперболическим, то существует гладкий конформный множитель* $\Omega : M \to (0, \infty)$, *для которого пространство-время* $(M, \Omega g)$ *времениподобно и изотропно геодезически полно.*

Вопрос о том, можно ли усилить теорему 5.5, включив в нее пространственноподобную геодезическую полноту, остается пока открытым (см. следствие 2.33 для пространственно-временных многообразий, гомеоморфных $\mathbb{R}^2$).

Допустим, что несингулярным пространством-временем названо геодезически полное пространство-время. Тогда «никакие области из пространственно-временно́го многообразия» несингулярного пространства-времени «не выброшены» (Герок (1968б, свойство 1)). Но там же Герок (1968б, свойство 2) выдвигает второе условие, которому должно удовлетворять несингулярное пространство-время, а именно «наблюдатели, которые следуют по «допустимым» (в некотором смысле) мировым линиям, должны иметь бесконечное полное собственное время». Здесь «мировая линия» — это времениподобная кривая в $(M, g)$. Далее Герок (1968б, сс. 534—540) строит геодезически полное пространство-время, содержащее гладкую времениподобную кривую ограниченного ускорения, но имеющую конечную длину. Тем самым этот пример не удовлетворяет второму условию Герока, хотя все *времениподобные* геодезические вследствие геодезической полноты имеют бесконечную длину.

В соответствии с вышесказанным в общей теории относительности кроме геодезически неполных пространств изучаются также другие типы сингулярных пространственно-временны́х многообразий. В оставшейся части этого раздела мы рассмотрим два из

этих дополнительных типов полноты — о.у. полноту («полноту ограниченного ускорения») и $b$-полноту («полноту расслоения»).

Понятие о.у. полноты возникает из рассмотренного выше примера Герока. Прежде чем сформулировать определение 5.6, напомним, что любую $C^2$-гладкую времениподобную кривую можно перепараметризовать в $C^2$ — гладкую времениподобную кривую $\gamma: J \to M$ так, что $g(\gamma'(t), \gamma'(t) = -1$ для всех $t \in J$.

**Определение 5.6.** Будем говорить, что $C^2$ — гладкая времениподобная кривая $\gamma: J \to M$, у которой $g(\gamma'(t), \gamma'(t)) = -1$ для всех $t \in J$ имеет *ограниченное ускорение*, если существует постоянная $B > 0$, такая, что $|g(\nabla_{\gamma'}\gamma'(t), \nabla_{\gamma'}\gamma'(t))| \leqslant B$ для всех $t \in J$.

Здесь через $\nabla$ обозначается единственная на $M$ связность без кручения, определяемая метрикой $g$ (см. разд. 2.1). В частности, если $\gamma$ — геодезическая, то она имеет ограниченное ускорение (всегда равное нулю). Требование $C^2$-гладкости на $\gamma$ обеспечивает возможность вычисления $\nabla_{\gamma'}\gamma'$.

Перейдем теперь к определению о.у. полноты.

**Определение 5.7.** Пространство-время $(M, g)$ называется *о.у. полным*, если все направленные в будущее (соответственно в прошлое) непродолжаемые в будущее (соответственно в прошлое) $C^2$-гладкие времениподобные кривые с единичным вектором скорости и ограниченным ускорением имеют бесконечную длину. Если же найдется направленная в будущее (или в прошлое) непродолжаемая в будущее (или в прошлое) $C^2$-гладкая времениподобная кривая с единичным вектором скорости и ограниченным ускорением, но с конечной длиной, то $(M, g)$ называется *о.у. неполным*.

Пример Герока (1968б, с. 534—540) показывает, что из геодезической полноты о.у. полнота не следует. Позже Бим (1976в, с. 509) привел пример того, что даже для глобально гиперболического пространства-времени геодезическая полнота не влечет за собой о.у. полноты. Вместе с тем ясно, что из о.у. полноты времениподобная геодезическая полнота вытекает с очевидностью. С другой стороны, модифицируя пример Герока, приведенный на рис. 5.2, путем изменения знака метрического тензора, можно показать, что из о.у. полноты пространственноподобная геодезическая полнота не следует.

Более сильная форма полноты, *b-полнота*, обеспечивает геодезическую полноту и, следовательно, преодолевает этот последний недостаток о.у. полноты. Для лоренцевых многообразий $b$-полнота впервые изучалась Шмидтом (1971). Интуитивно $b$-полнота определяется следующим образом (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 289)). Сначала обобщается понятие аффинного параметра с геодезических на все $C^1$-гладкие кривые. Затем опреде-

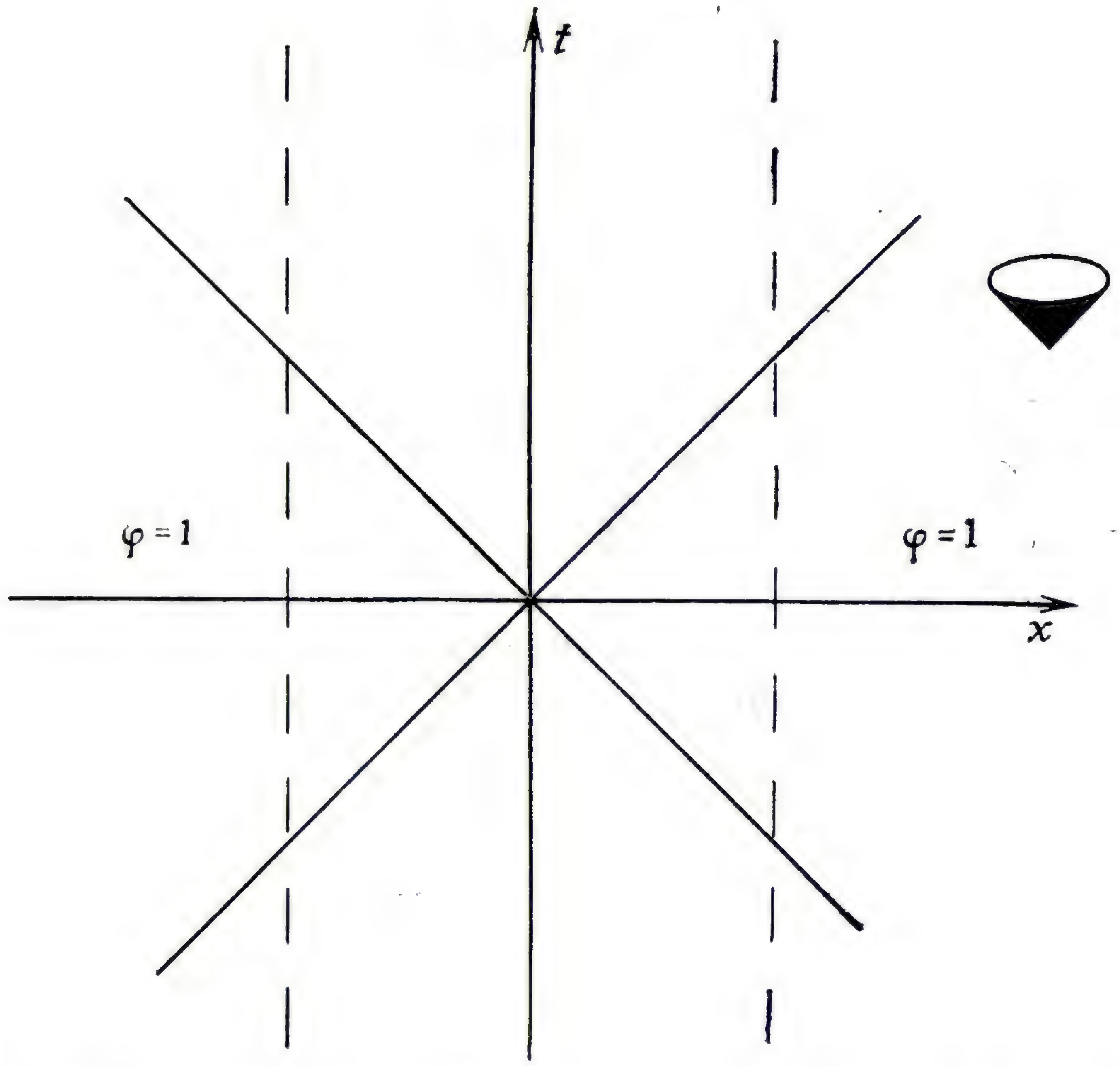



Рис. 5.2. Показан принадлежащий Героку пример пространства-времени, которое глобально конформно двумерному пространству Минковского, изотропно и пространственноподобно геодезически полно, а времениподобно геодезически неполно. В этом примере положительную полуось $t$ можно параметризовать так, чтобы она стала неполной времениподобной геодезической (за счет выбора функции $\varphi(x, t)$: при $t \to \infty$ $\varphi(0, t) \to 0$ как $t^{-4}$)

ляется понятие $b$-полноты: назовем пространство-время $b$-полным, если каждая $C^1$-гладкая кривая конечной длины относительно этого параметра имеет концевую точку.

Перейдем теперь к более подробному рассмотрению $b$-полноты. Прежде всего необходимо ввести понятие *обобщенного аффинного параметра* для произвольной $C^1$-гладкой кривой $\gamma\colon J \to M$. Напомним, что гладкое векторное поле $V$ вдоль $\gamma$ представляет собой гладкое отображение $V\colon J \to TM$, такое, что $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ для всех $t \in J$. Гладкое векторное поле $V$ называется параллельным вдоль $\gamma$, если $V$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\nabla_{\gamma'} V(t) = 0$ для всех $t \in J$ (см. добавление А).

Обобщенный аффинный параметр $\mu = \mu(\gamma, E_1, \ldots, E_n)$ для кривой $\gamma\colon J \to M$ можно построить следующим образом. Выбрав $t_0 \in J$ произвольно, рассмотрим какой-нибудь базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ касательного пространства $T_{\gamma(t_0)} M$. Пусть $E_i$ — однозначно определенное векторное поле, параллельное вдоль $\gamma$ и такое, что $E_i(t_0) = e_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда набор $\{E_1(t), \ldots, E_n(t)\}$ образует базис

пространства $T_{\gamma(t)} M$ для любого $t \in J$. Поэтому возможно разложение $\gamma'(t) = \sum_{i=1}^{n} V^i(t) E_i(t)$, где $V^i \colon J \to \mathbb{R}$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Обобщенный аффинный параметр $\mu = \mu(\gamma, E_1, \ldots, E_n)$ задается следующей формулой:

$$\mu(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [V^i(s)]^2}\, ds, \quad t \in J.$$

Предположение о $C^1$-гладкости кривой $\gamma$ необходимо для того, чтобы получить векторные поля $\{E_1, \ldots, E_n\}$ путем параллельного переноса. Можно убедиться непосредственно, что $\gamma$ имеет конечную длину дуги относительно обобщенного аффинного параметра $\mu = \mu(\gamma, E_1, \ldots, E_n)$ в том и только том случае, когда $\gamma$ имеет конечную длину дуги относительно любого другого обобщенного аффинного параметра $\mu = \mu(\gamma, \overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_n)$, который вычислен относительно базиса $\{\overline{E}_i\}_{i=1}^{n}$ на $TM|_\gamma$, также полученного параллельным переносом вдоль $\gamma$ (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 288)). Отсюда следует, что понятие конечной длины дуги по отношению к обобщенному аффинному параметру не зависит от выбора этого параметра. Поэтому корректно следующее определение.

**Определение 5.8.** Пространство-время $(M, g)$ называется *$b$-полным*, если каждая $C^1$-гладкая кривая конечной длины, измеренной посредством обобщенного аффинного параметра, имеет в $M$ концевую точку.

Пусть $\gamma \colon J \to M$ — произвольная гладкая геодезическая. Взяв в предложенной выше конструкции $E_1(t) = \gamma'(t)$, при любом выборе $E_2, \ldots, E_n$ имеем $\mu(\gamma, E_1\ E_2, \ldots, E_n)(t) = t$. Следовательно, $b$-полнота влечет за собой геодезическую полноту. Кроме того, из $b$-полноты вытекает о.у. полнота. Пример Герока (см. рис. 5.2) с измененным знаком метрического тензора показывает, что существуют глобально гиперболические лоренцевы многообразия, которые являются о.у. полными, а $b$-неполны. Поэтому из о.у. полноты $b$-полнота не следует.

## 5.3. Метрическая полнота

Теорема Хопфа—Ринова для римановых многообразий $(N, g_0)$ утверждает, что следующие высказывания равносильны:

(1) Многообразие $N$ с римановой функцией расстояния $d_0 \colon N \times N \to [0, \infty)$ является полным метрическим пространством, т. е. все последовательности Коши сходятся.

(2) $(N, g_0)$ конечно компактно, т. е. все $d_0$-ограниченные множества имеют компактное замыкание.

(3) $(N, g_0)$ геодезически полно.

Множество $K$ в римановом многообразии $(N, g_0)$ называется $d_0$-ограниченным, если $\sup \{d_0(p, q): p, q \in K\} < \infty$. Из неравенства треугольника вытекает, что последнее эквивалентно следующему условию: множество $K$ содержится внутри замкнутого шара конечного радиуса.

В разд. 5.2 мы рассмотрели геодезическую полноту лоренцевых многообразий. В этом разделе мы будем рассматривать лоренцевы аналоги сформулированных выше условий (1) и (2). Непосредственно из определения лоренцева расстояния (т. е. $d(p, q) = 0$, если $q \notin J^+(p)$ видно, что следует ограничиться рассмотрением только времениподобных последовательностей Коши.

Буземан (1967) изучал общие хаусдорфовы пространства, на которых вводилась частичная упорядоченность; причем свойства этой частичной упорядоченности весьма похожи на свойства хронологической частичной упорядоченности $p \ll q$ пространства-времени. Буземан предполагал также, что рассматриваемые им пространства (он называл их *времениподобными пространствами*) оснащены функцией, которая ведет себя в точности так же, как лоренцева функция расстояния хронологического пространства-времени, ограниченная на множество $\{(p, q) \in M \times M: p \leqslant q\}$. Он заметил, что для этого класса недифференцируемых пространств можно определить длину непрерывных кривых, и, более того, функционал длины оказывается полунепрерывным сверху в топологии равномерной сходимости (см. Буземан (1967, с. 10)). При изучении этого класса пространств целью Буземана было развитие геометрической теории для индефинитных метрик, аналогичной теории метрических $G$-пространств (см. Буземан (1962)). В частности, он изучал конечную компактность и метрическую полноту времениподобных пространств в духе условий (1) и (2) теоремы Хопфа—Ринова.

Бим (1976б) заметил, что буземановские определения конечной компактности и метрической полноты для времениподобных $G$-пространств можно приспособить и к причинным лоренцевым многообразиям. Начнем с определения понятия времениподобной полноты Коши для причинного пространства-времени.

**Определение 5.9.** Причинное пространство-время $(M, g)$ называется *времениподобно Коши-полным*, если всякая последовательность $\{x_n\}$ точек, подчиненных условиям $x_n \ll x_{n+m}$ для $n, m = 1, 2, \ldots$ и $d(x_n, x_{n+m}) \leqslant B_n$ (или же $x_{n+m} \ll x_n$ и $d(x_{n+m}, x_n) \leqslant B_n$) для всех $m \geqslant 0$, где $B_n \to 0$ при $n \to \infty$, сходится.

Для римановых многообразий конечную компактность можно определить, например, требованием, что все замкнутые метрические шары компактны. С другой стороны, как мы заметили

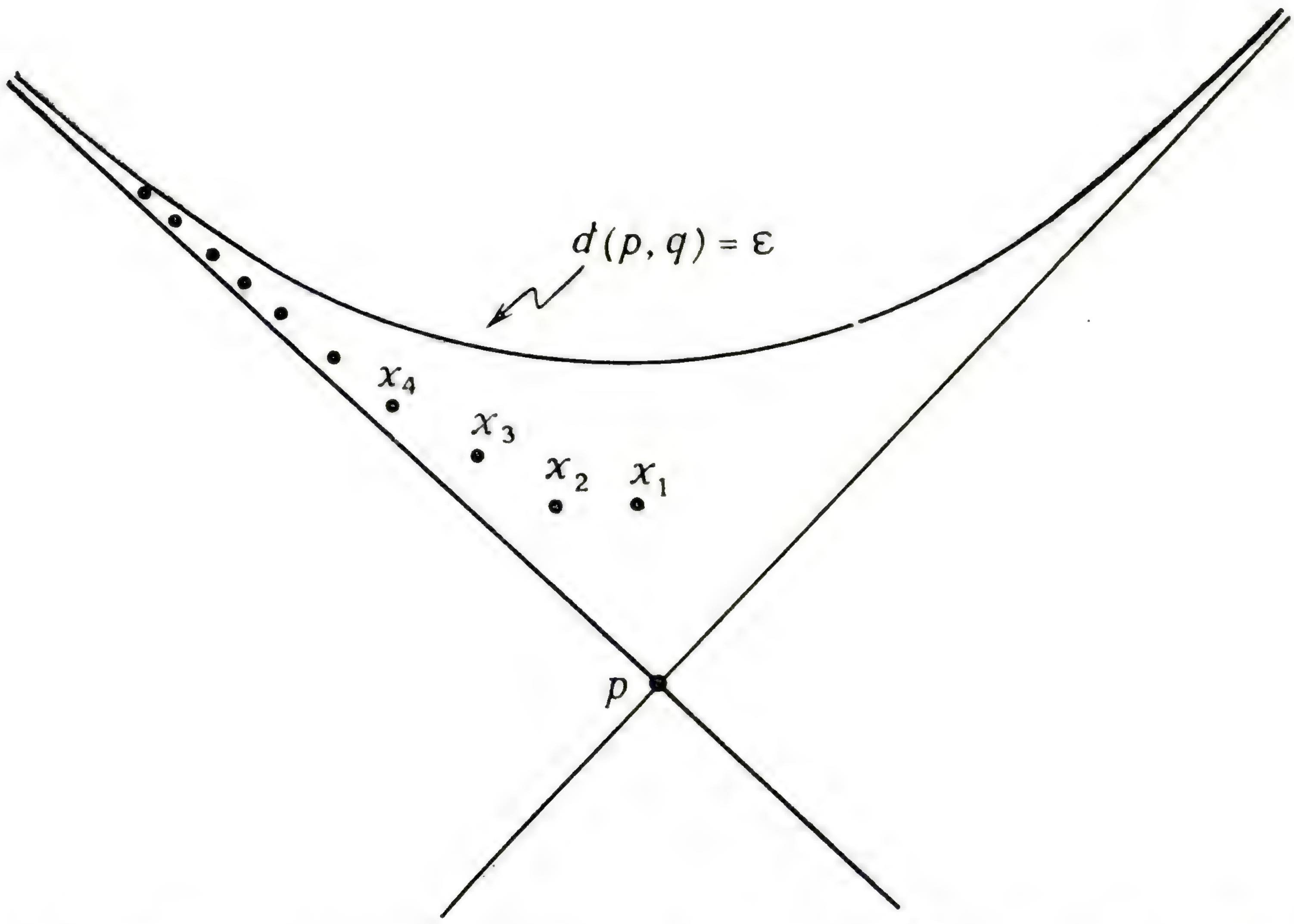



Рис. 5.3. Последовательность $\{x_n\}$ в пространстве Минковского $(\mathbb{R}^2, ds^2 = dx^2 - dy^2)$ обладает следующими свойствами: $x_n \gg p$ для всех $n$, $d(p, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$, но точек накопления $\{x_n\}$ не имеет, как и показано на рисунке.

выше (см. рис. 3.4), подмножества $\{q \in J^+(p)\colon d(p, q) \leqslant \varepsilon\}$ произвольного пространства-времени некомпактны. Поэтому риманово определение должно быть видоизменено. Одна из возможностей состоит в следующем (см. Буземан (1967, с. 22)).

**Определение 5.10.** Причинное пространство-время $(M, g)$ называется *конечно компактным*, если для любой фиксированной постоянной $B > 0$ и всякой последовательности точек $\{x_n\}$, удовлетворяющих для всех $n$ либо условиям $p \ll q \leqslant x_n$ и $d(p, x_n) \leqslant B$, либо условиям $x_n \leqslant q \ll p$ и $d(x_n, p) \leqslant B$, в $M$ существует точка накопления для $\{x_n\}$.

Нетрудно заметить, что без требования $x_n \leqslant q \ll p$ (или $p \ll q \leqslant x_n$) для некоторого $q \in M$ в определении 5.10 пространство-время Минковского не может быть конечно компактным (см. рис. 5.3).

Для глобально гиперболических пространств можно привести описание конечной компактности, в большей степени напоминающее условие (2), сформулированное выше для римановых многообразий.

**Лемма 5.11.** *Пусть пространство-время $(M, g)$ глобально гиперболично. Тогда $(M, g)$ является конечно компактным в том и только том случае, когда для любой постоянной $B > 0$ множество $\{x \in M\colon\ p \ll q \leqslant x,\ d(p, x) \leqslant B\}$ компактно для всех*

*$p, q \in M$, связанных отношением $q \in I^+(p)$, а множество $\{x \in M: x \leqslant q \ll p,\ \mathrm{d}(x, p) \leqslant B\}$ компактно для всех $p, q \in M$, связанных отношением $p \in I^+(q)$.*

*Доказательство.* Утверждение легко следует из того, что множества $J^+(q)$ замкнуты и лоренцева функция расстояния вследствие глобальной гиперболичности $(M, g)$ непрерывна. □

Пространство-время Минковского одновременно и временеподобно коши-полно, и конечно компактно. Более того, можно показать, что эти понятия равносильны для всех глобально гиперболических пространственно-временных многообразий (см. Бим (1976б, с. 343—344)).

**Теорема 5.12.** *Пусть $(M, g)$ — глобально гиперболическое пространство-время. Тогда $(M, g)$ является конечно компактным в том и только том случае, когда оно временеподобно коши-полно. Если же $(M, g)$ глобально гиперболично и непространственноподобно геодезически полно, то $(M, g)$ конечно компактно и временеподобно коши-полно.*

**Замечание 5.13.** Даже для класса глобально гиперболических пространственно-временных многообразий конечная компактность, или, что равносильно, временеподобная коши-полнота, не означает наличия временеподобной геодезической полноты. В самом деле, приведенный на рис. 5.2 пример Герока представляет собой временеподобно геодезически неполное глобально гиперболическое пространство-время, которое конечно компактно.

## 5.4. Идеальные границы

В этом разделе мы приведем краткое описание свойств $b$-границы и причинной границы пространства-времени. Дополнительные сведения и детали можно найти у Хокинга и Эллиса (1977, разд. 6.8 и 8.3) или у Додсона (1978).

Будем обозначать *$b$-границу* пространства-времени $(M, g)$ через $\partial_b M$. Эта граница строится следующим образом: сначала на расслоении линейных структур $L(M)$ над $M$ определяется некоторая положительно определенная метрика, затем строится замыкание Коши $L(M)$ и далее построенные идеальные точки $L(M)$ используются для получения идеальных точек многообразия $M$. Особенно полезной $b$-граница оказывается при выяснении ответа на вопрос: выброшены или нет конкретные точки из исследуемого пространства-времени. Несколько жаль, что $b$-граница часто состоит из одной-единственной точки (см. Боссхард (1976), Джонсон (1977)). Эта граница неинвариантна относительно конформных преобразований и, кроме того, не столь тесно связана с причинной структурой $(M, g)$. Сравнительно недавнее обсуждение достоинств

и недостатков $b$-границы и геодезической неполноты можно найти в обзорной статье Типлера, Кларке и Эллиса (1980).

Напомним, что кривая $\gamma$: $[0, a) \to M$ называется *$b$-неполной*, если у нее есть конечный обобщенный аффинный параметр (см. разд. 5.2). Всякая кривая $\gamma$: $[0, a) \to M$, которая одновременно является и $b$-неполной, и непродолжаемой в $t = a$, определяет точку границы $\partial_b M$, соответствующую $\gamma(a)$. В пространстве-времени Минковского значения обобщенного аффинного параметра вдоль кривой можно сделать такими, чтобы они соответствовали евклидовой длине дуги. Поэтому пространство-время Минковского имеет пустую $b$-границу, и каждая $b$-неполная кривая в пространстве времени Минковского имеет в этом пространстве-времени концевую точку.

*Причинную границу* пространства-времени $(M, g)$ будем обозначать через $\partial_c M$. Эта граница строится при помощи причинной структуры пространства-времени. Поэтому она инвариантна относительно конформных преобразований. Нас будет интересовать использование этой границы только для сильно причинных пространственно-временных многообразий.

Причинная граница образуется при помощи неразложимых в прошлом (соответственно в будущем) множеств, которые не соответствуют прошлому (соответственно будущему) никакой точки из $M$. *Множество прошлого* (соответственно *будущего*) есть такое подмножество $A$ многообразия $M$, для которого $I^-(A) \subset A$ (соответственно $I^+(A) \subset A$). Открытые множества прошлого (соответственно будущего) описываются равенствами $I^-(A) = A$ (соответственно $I^+(A) = A$). *Неразложимым множеством прошлого* (сокращенно НП) называется всякое открытое множество прошлого, которое нельзя представить в виде объединения двух собственных подмножеств, каждое из которых было бы открытым множеством прошлого. Аналогично определяется *неразложимое множество будущего* (сокращенно НБ).

*Граничным неразложимым множеством прошлого* (ГНП) называется подмножество $A$ многообразия $M$, такое, что

(1) $A$ — неразложимое множество прошлого;

(2) $A$ не является хронологическим прошлым никакой точки $p \in M$.

Аналогично определяется *граничное неразложимое множество будущего* (ГНБ). Причинная граница $\partial_c M$ образуется при помощи множеств ГНП и ГНБ путем некоторых отождествлений, которые будут описаны ниже (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 241—245)). Эти отождествления позволяют продолжить топологию $M$ на $M^* = M \cup \partial_c M$ таким образом, что причинное замыкание многообразия $M$ будет хаусдорфовым.

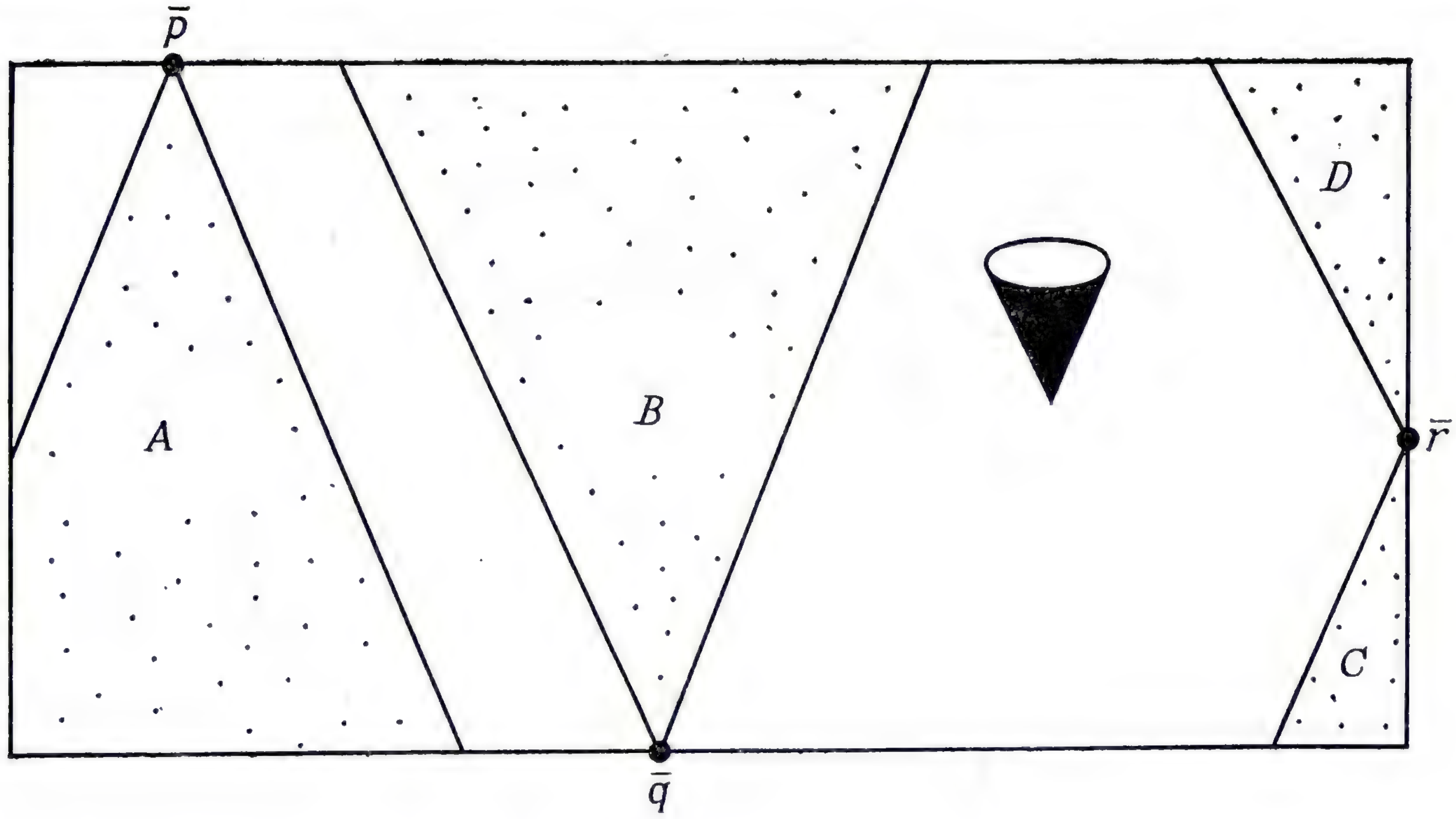



Рис. 5.4. Идеальная точка $\bar{p}$ из $\partial_c M$ представляется граничным неразложимым множеством прошлого (ГНП) $A$, а идеальная точка $\bar{q}$ — граничным неразложимым множеством будущего (ГНБ) $B$. Точка $\bar{r}$ представляется одновременно и множеством $C$, которое является ГНП, и множеством $D$, которое является ГНБ.

Назначение ГНП и ГНБ состоит в том, чтобы представлять идеальные точки причинной границы многообразия $(M, g)$, как показано на рис. 5.4.

Покажем теперь, что ГНП можно представить как хронологическое прошлое непродолжаемой в будущее времениподобной кривой. Этот результат принадлежит Героку, Кронхеймеру и Пенроузу (1972, с. 551).

**Предложение 5.14.** *Подмножество $W$ сильно причинного пространства-времени $(M, g)$ является ГНП в том и только том случае, когда существует направленная в будущее и непродолжаемая в будущее времениподобная кривая $\gamma$, для которой $W = I^-(\gamma)$.*

*Доказательство.* Предположим сначала, что существует непродолжаемая в будущее времениподобная кривая $\gamma$, для которой $W = I^-(\gamma)$. Из сильной причинности многообразия $(M, g)$ вытекает, что если $W$ есть НП, то $W$ есть ГНП. Чтобы показать, что $W$ является НП, предположим, что $W = U_1 \cup U_2$ для непустых открытых множеств прошлого $U_1$ и $U_2$, ни одно из которых не лежит в другом. Возьмем точки $r_1 \in U_1 \setminus U_2$ и $r_2 \in U_2 \setminus U_1$. Тогда в силу равенства $I^-(\gamma) = U_1 \cup U_2$ должны существовать точки $r_i' \in \gamma$, такие, что $r_i \in I^-(r_i')$ для $i = 1, 2$. Однако независимо от того, какое из множеств $U_i$ содержит наиболее отнесенную в будущее точку $r_1'$ или $r_2'$, оно должно содержать все

четыре точки $r_1$, $r_2$, $r'_1$ и $r'_2$. Это противоречит определению либо точки $r_1$, либо точки $r_2$.

Обратно, допустим, что $W$ является ГНП. Если $p$ — произвольная точка $W$, то $W = [W \cap I^+(p)] \cup [W \setminus I^+(p)]$ и, значит, $W = I^-(W \cap I^+(p)) \cup I^-(W \setminus I^+(p))$ в силу того, что $W$ — множество прошлого. Так как $W$ — НП, то либо $W = I^-(W \cap I^+(p))$, либо $W = I^-(W \setminus I^+(p))$. Следовательно, если $p \notin I^-(W \cap I^+(p))$, то $W = I^-(W \setminus I^+(p))$. Таким образом, для любой пары точек $p$ и $q$ из $W$, $p \neq q$, в этом множестве должна найтись некоторая точка $r$, которая будет лежать в хронологическом будущем обеих точек $p$ и $q$. Рассуждая по индукции, получаем, что для любого конечного подмножества из $W$ в $W$ можно указать некоторую точку, которая расположена в хронологическом будущем каждой точки этого подмножества. Выберем теперь последовательность точек $p_n$, образующую счетное всюду плотное подмножество $W$. Вторую последовательность $q_n$ определим индуктивно. Пусть точка $q_0 \in W$ находится в хронологическом будущем точки $p_0$. Если $q_i$ определены для всех $i = 1, \ldots, k-1$, то точку $q_k$ в $W$ выбираем так, чтобы она располагалась в хронологическом будущем и точки $p_k$, и точек $q_i$, $i = 1, \ldots, k-1$.

Наконец, пусть $\gamma$ — произвольная направленная в будущее времениподобная кривая, которая начинается в $q_0$ и последовательно соединяет точки $q_i$. Ясно, что каждая точка $p_n$ лежит в $I^-(\gamma)$ и что $I^-(\gamma) \subset W$. Из того, что $W$ открыто, а последовательность $\{p_n\}$ расположена в $W$ всюду плотно, вытекает, что $W = I^-(\gamma)$, как и требовалось. □

В пространственно-временных многообразиях, которые не являются сильно причинными, могут существовать направленные в будущее и непродолжаемые в будущее времениподобные кривые $\gamma$, такие, что $I^-(\gamma)$ является хронологическим прошлым некоторой точки (т. е. $I^-(\gamma)$ *не* ГНП). Рассмотрим, например, цилиндр $\mathbb{R}^1 \times S^1$ с плоской метрикой $ds^2 = dtd\theta$ и обычной ориентацией во времени, для которой будущее соответствует возрастанию $t$. Нижняя половина цилиндра $W = \{(t, \theta)\colon t < 0\}$ является НП, которое можно представить как $I^-(\gamma)$ для направленной в будущее и непродолжаемой в будущее времениподобной кривой $\gamma$. Однако $W$ не является ГНП вследствие того, что $W$ можно представить как хронологическое прошлое любой точки окружности $t = 0$. Ограничивая наше внимание сильно причинными пространствами, мы избежим примеров такой природы. Для сильно причинных пространств НП, не являющиеся ГНП, находятся во взаимно однозначном соответствии с точками из $M$. Аналогичное утверждение справедливо и для НБ, не являющихся ГНБ.

Обозначим через $\hat{M}$ (соответственно $\check{M}$) объединение всех НП (соответственно НБ). Пусть далее $M^{\#} = \hat{M} \cup \check{M}/\sim$, где для каждой точки $p \in \check{M}$ элементы $I^-(p)$ из $\hat{M}$ и $I^+(p)$ из $\check{M}$ отождествляются. Отображение $I^+$: $M \to M^{\#}$, задаваемое правилом $p \to I^+(p)$, отождествляет $M$ с подмножеством $M^{\#}$. Используя это отождествление, мы можем утверждать, что множество $M^{\#}$ соответствует точкам $M$ вместе со всеми ГНП и ГНБ.

Чтобы задать на $M^{\#}$ топологию, определим сначала для произвольного НБ $A \in \check{M}$ два множества $A^{\mathrm{int}}$ и $A^{\mathrm{ext}}$:

$$A^{\mathrm{int}} = \{V \in \hat{M}\colon V \cap A \neq \varnothing\}$$

и

$$A^{\mathrm{ext}} = \{V \in \hat{M}\colon V = I^-(W) \text{ влечет } I^+(W) \not\subset A\}.$$

Аналогично для произвольного НП $B \in \hat{M}$ определяются множества $B^{\mathrm{int}}$ и $B^{\mathrm{ext}}$. Подбазис топологии на $M^{\#}$ задается всевозможными множествами вида $A^{\mathrm{int}}$, $A^{\mathrm{ext}}$, $B^{\mathrm{int}}$ и $B^{\mathrm{ext}}$. Множества $A^{\mathrm{int}}$ и $B^{\mathrm{int}}$ являются аналогами множеств $I^+(p)$ и $I^-(p)$ соответственно, а множества $A^{\mathrm{ext}}$ и $B^{\mathrm{ext}}$ — аналогами множеств $M \setminus \overline{I^+(p)}$ и $M \setminus \overline{I^-(p)}$ соответственно.

Множество $M^* = M \cup \partial_c M$ получается из $M^{\#}$, наделенного построенной выше топологией, путем отождествления наименьшего числа точек в $M^{\#}$, необходимых для получения хаусдорфова пространства. Другими словами, $M^*$ есть факторпространство $M^{\#}/R_h$, где $R_h$ — пересечение всех отношений эквивалентности $R$ на $M^{\#}$, для которых $M^{\#}/R$ хаусдорфово. Топологическое пространство $M^*$ содержит подмножество, которое можно отождествить с $M$ при помощи отображения $I^+$: $M \to M^{\#}$, описанного выше. При этом отождествлении исходная топология многообразия $M$ согласуется с относительной топологией, индуцированной на $I^+(M)$ как подмножестве $M^*$. Выбрасывая подмножество $I^+(M)$ из пространства $M^*$, получим причинную границу $\partial_c M$. Эта граница состоит из ГНП и ГНБ, где отождествления проведены так, как указано выше. Наконец, отождествляя $M$ с подмножеством $I^+(M)$ пространства $M^*$, получаем требуемое разложение $M^* = M \cup \partial_c M$.

## 5.5. Локальные расширения

В этом разделе определяются расширяемость и нерасширяемость лоренцевых многообразий. Кроме того, здесь рассматриваются два типа локальных расширений. Большинство результатов этого раздела справедливо как для пространственно-вре-

менных многообразий, так и для тех лоренцевых многообразий, которые неориентируемы во времени.

**Определение 5.15.** *Расширением* лоренцева многообразия $(M, g)$ называется лоренцево многообразие $(M', g')$ вместе с изометрией $f: M \to M'$, отображающей $M$ на собственное открытое подмножество из $M'$. Аналитическое расширение $(M, g)$ — это такое расширение $f: (M, g) \to (M', g')$, что оба лоренцевы многообразия аналитичны и отображение $f: M \to M'$ аналитично. Если $(M, g)$ не имеет расширений, то оно называется *нерасширяемым*.

Предположим, что лоренцево многообразие $(M, g)$ имеет расширение $f: (M, g) \to (M', g')$. Из того, что $M'$ связно, а $f(M)$ открыто в $M'$, вытекает, что $\mathrm{Bd}(f(M)) = \overline{f(M)} \setminus f(M) \neq \varnothing$, где $\overline{f(M)}$ — замыкание $f(M)$ в $M'$. Так как $\mathrm{Bd}(f(M)) \neq \varnothing$, а изометрия $f: M \to M'$ переводит геодезические из $M$ в геодезические из $M'$, лежащие в $f(M)$, то, как легко видеть, $(M, g)$ не может быть ни времениподобно, ни изотропно, ни пространственноподобно геодезически полным. Вспоминая, что и $b$-полнота и о.у. полнота влекут за собой геодезическую полноту (см. разд. 5.2), получаем следующий критерий того, что лоренцево многообразие нерасширяемо.

**Предложение 5.16.** *Лоренцево многообразие* $(M, g)$ *нерасширяемо, если оно является полным, хотя бы в одной из следующих форм:*

(1) *$b$-полным;*

(2) *полным о.у.;*

(3) *времениподобно геодезически полным;*

(4) *изотропно геодезически полным;*

(5) *пространственноподобно геодезически полным.*

Определим теперь два вида локальных расширений (см. Кларке (1973, с. 207), Бим (1980), Хокинг и Эллис (1977, с. 71)).

**Определение 5.17.** Пусть $(M, g)$ — лоренцево многообразие.

(1) Предположим, что $\gamma: [0, a) \to M$ есть $b$-неполная кривая, непродолжаемая в $t = a$ в $M$. *Локальным $b$-граничным расширением кривой* $\gamma$ называется открытая окрестность $U \subset M$ кривой $\gamma$ и расширение $(U', g')$ многообразия $(U, g|U)$, такое, что образ $\gamma$ в $U'$ является непрерывно продолжаемым за $t = a$.

(2) *Локальным расширением* многообразия $(M, g)$ называется связное открытое подмножество $U$ из $M$, имеющее в $M$ некомпактное замыкание, и расширение $(U', g')$ пары $(U, g|U)$, такое, что образ $U$ имеет компактное замыкание в $U'$.

**Замечание 5.18.** Это определение локального расширения отличается от соответствующего определения локального расшире-

ния у Хокинга и Эллиса (1977, с. 71) тем, что в определении 5.17 (1) требуется, чтобы $U$ было связным (у Хокинга и Эллиса этого не требуется) (рис. 5.5 и 5.6).

Теперь мы исследуем взаимосвязь между этими двумя видами локальных расширений. Произвольное пространство-время может содержать $b$-неполную кривую $\gamma$: $[0, a) \to M$, которая непродолжаема в $t = a$, хотя $\gamma\ [0, a)$ и имеет компактное замыкание в $M$. Однако Шмидт показал, что такие пространства содержат компактно захваченные непродолжаемые изотропные геодезические (см. Шмидт (1973), Хокинг и Эллис (1977, с. 312)). С другой стороны, если $(M, g)$ не содержит захваченных непространственноподобных кривых и кривая $\gamma$ имеет в $(M, g)$ локальное $b$-граничное расширение, то, как мы сейчас покажем, то же самое расширение дает и локальное расширение.

**Лемма 5.19.** *Если пространство-время $(M, g)$ не содержит захваченных непространственноподобных кривых и в $(M, g)$ существует локальное b-граничное расширение кривой $\gamma$, то $(M, g)$ имеет локальное расширение.*

*Доказательство.* Пусть $f$: $(U, g|U) \to (U', g')$ — локальное $b$-граничное расширение кривой $\gamma$. Тогда $f \circ \gamma$: $[0, a) \to U'$ продолжаема и $f \circ \gamma\,(t)$ сходится к некоторой точке $\bar{p} \in U'$ при $t \to a$. Пусть $W'$ — открытая окрестность точки $\bar{p}$ с компактным замыканием в $U'$. Выберем $t_0 \in [0, a)$ так, чтобы $f \circ \gamma\,(t) \in W'$ для всех $t_0 \leqslant t < a$. Пусть $V$ — компонента множества $V_1 = f^{-1}(W')$ в $U$, которая содержит некомпактное множество $\gamma\,|\,[t_0, a)$. Ввиду того что $U$ открыто в $M$, множество $V$ является связным открытым множеством, имеющим в $M$ некомпактное замыкание. Его образ $f(V)$ в силу включения $f(V) \subset W'$ имеет в $U'$ компактное замыкание. Тем самым $f\,|\,V$: $(V, g\,|\,V) \to (U', g')$ — локальное расширение $(M, g)$. $\square$

Покажем теперь, что каждый из этих двух видов локальной нерасширяемости влечет за собой нерасширяемость глобальную.

**Предложение 5.20.** *Если лоренцево многообразие $(M, g)$ не имеет локального расширения хотя бы одного из указанных в определении 5.17 видов, то $(M, g)$ нерасширяемо.*

*Доказательство.* Предположим, что $(M, g)$ имеет расширение $F$: $(M, g) \to (M', g')$. Пусть $\bar{p} \in \mathrm{Bd}\,(F(M))$. Возьмем геодезическую $\sigma$: $[0, 1] \to (M', g')$ так, чтобы $\sigma(0) \in F(M)$ и $\sigma(1) = \bar{p}$. Вследствие того что $F(M)$ открыто в $M'$ и $\bar{p} \notin F(M)$, найдется некоторое $t_0 \in (0, 1)$, такое, что $\sigma(t) \in F(M)$ для всех $t$, $0 \leqslant t < t_0$, но $\sigma(t_0) \notin F(M)$. Тогда кривая $\gamma = F^{-1} \circ \sigma\,|\,[0, t_0)$: $[0, t_0) \to M$ $b$-неполна, непродолжаема в $t = t_0$ в $M$ и имеет в $M$ некомпактное замыкание. Полагая $U = M$, $U' = M'$ и $f =$

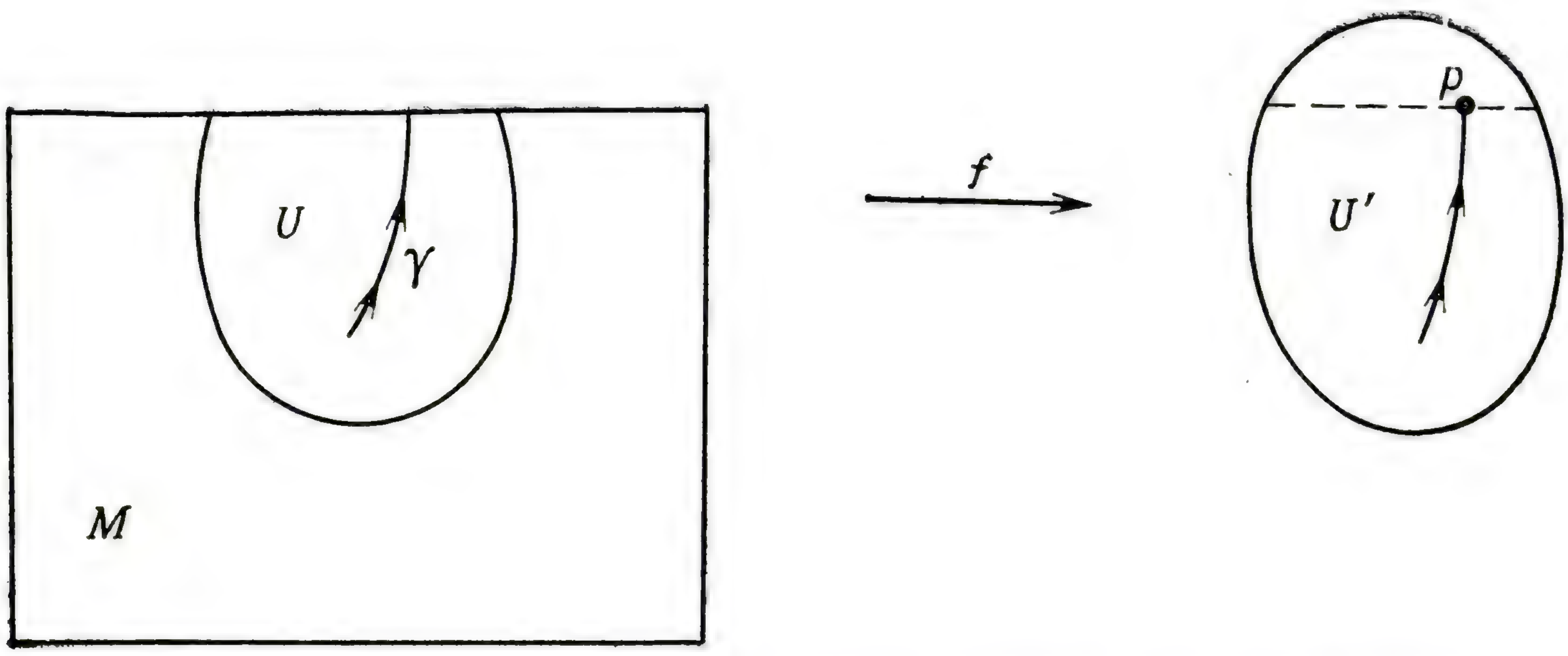



Рис. 5.5. Пусть $\gamma$: $[0, a) \to M$ есть $b$-неполная кривая, непродолжаемая в $t = a$ в пространстве-времени $(M, g)$. Допустим, что существует изометрия $f$: $(U, g|U) \to (U', g')$, которая переводит $\gamma$ в кривую $f \circ \gamma$, имеющую концевую точку $p$ в $U'$. Тогда $f \circ \gamma$ может быть непрерывно продолжена за $t = a$. Таким образом, в $(M, g)$ существует локальное $b$-граничное расширение кривой $\gamma$.

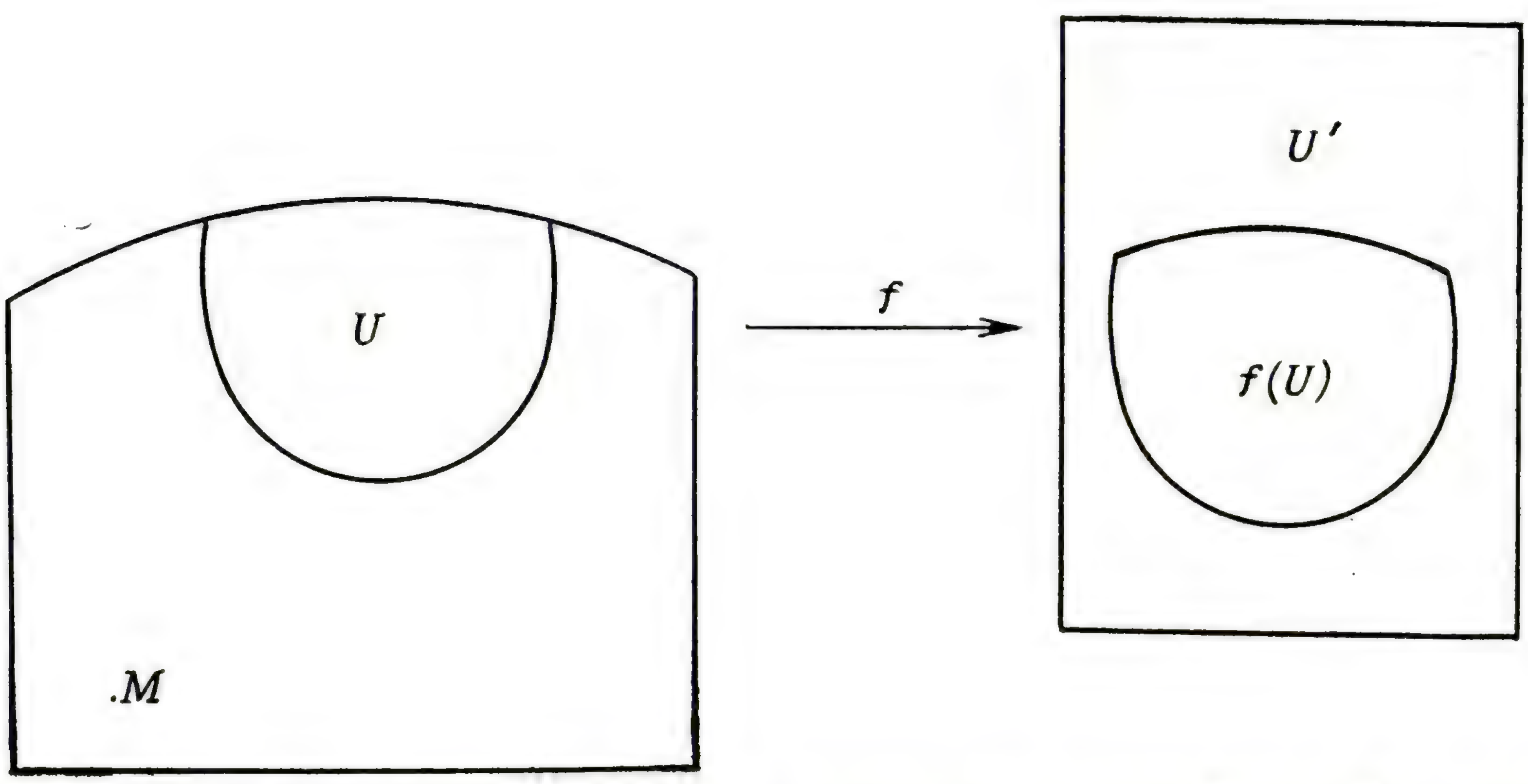



Рис. 5.6. Пусть $U$ — связное открытое подмножество многообразия $M$, имеющее в $M$ некомпактное замыкание. Локальное расширение — это изометрия $f$: $(U, g|U) \to (U', g')$, такая, что $f(U)$ имеет в $U'$ компактное замыкание. Пример пространства-времени Минковского показывает, что даже вещественное аналитическое $b$-полное пространство-время может допускать аналитические локальные расширения (см. пример 5.21). Таким образом, пространство-время может допускать локальные расширения, но не иметь локальных $b$-граничных расширений.

$= F$ (см. определение 5.17 (1)), получаем, что в $(M, g)$ существует локальное $b$-граничное расширение кривой $\gamma$. Выбирая в качестве $W'$ любое открытое множество, содержащее $\bar{p}$ и имеющее в $M'$ компактное замыкание, полагая $U' = M'$ и выбирая в качестве $U$ компоненту множества $F^{-1}(W)$, содержащую $\gamma$, получим локальное расширение $F|U$: $(U, g|U) \to (M', g')$. □

Следующий пример показывает, что пространство-время Минковского имеет локальные расширения. Ввиду того что пространство-время Минковского $b$-полно, этот пример показывает, что, хотя $b$-полнота и является препятствием к глобальным расширениям, она не создает помех расширениям локальным (см. предложение 5.16). Необычность этого примера состоит в том, что он не соответствует локальному расширению $M$ ни через точку $b$-границы $\partial_b M$, ни через точку причинной границы $\partial_c M$. Он представляет собой локальное расширение множества к $i^0$ (см. рис. 4.4).

**Пример 5.21.** Пусть $(M = \mathbb{R}^n, g)$ есть $n$-мерное пространство-время Минковского, а $M' = \mathbb{R} \times T^{n-1}$, где $T^{n-1} = \{(\theta_2, \ldots, \theta_n): 0 \leqslant \theta_i \leqslant 1\}$ — $(n-1)$-мерный тор (здесь используются стандартные отождествления). Лоренцеву метрику $g'$ для $M'$ можно определить следующим образом: $g' = (ds')^2 = -dt^2 + d\theta_2^2 + \ldots + d\theta_n^2$. Тогда $(M, g)$ представляет собой лоренцево универсальное накрывающее пространство многообразия $(M', g')$ с накрывающим отображением $f: (M, g) \to (M', g')$, задаваемым по правилу

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, x_2 \,(\mathrm{mod}\ 1), \ldots, x_n \,(\mathrm{mod}\ 1)).$$

Зафиксируем $\beta > 0$ и рассмотрим кривую $\gamma$: $[0, \infty) \to M$, определяемую посредством соотношения $\gamma(s) = (s^{-\beta}, s, 0, \ldots, 0)$. Тогда $f \circ \gamma$: $[1, \infty) \to M'$ представляет собой спираль, асимптотически приближающуюся к окружности $t = \theta_3 = \ldots = \theta_n = 0$ в $M'$. Пусть $U$ — открытая трубчатая окрестность кривой $\gamma$ в $M$ такая, что $U$ содержится в открытом множестве $\{(x_1, \ldots \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n: 0 < x_1 < \alpha\}$, где $\alpha > 1$ фиксировано, а $f|U$: $U \to M'$ является гомеоморфизмом $U$ на ее образ (рис. 5.7). Интуитивно ясно, что для того, чтобы удовлетворить требованию $x_1 > 0$ для $(x_1, \ldots, x_n) \in U$, множество $U$ должно быть выбрано так, чтобы оно становилось тоньше, когда $s \to \infty$. Хотя $U$ и не обладает компактным замыканием в пространстве-времени Минковского, его образ $f(U)$ имеет в $M'$ компактное замыкание вследствие того, что $f(U)$ содержится в компактном множестве $[0, \alpha] \times T^{n-1}$. Таким образом, $f$: $(U, g|U) \to (M', g')$ — аналитическое локальное расширение пространства-времени Минковского. За-

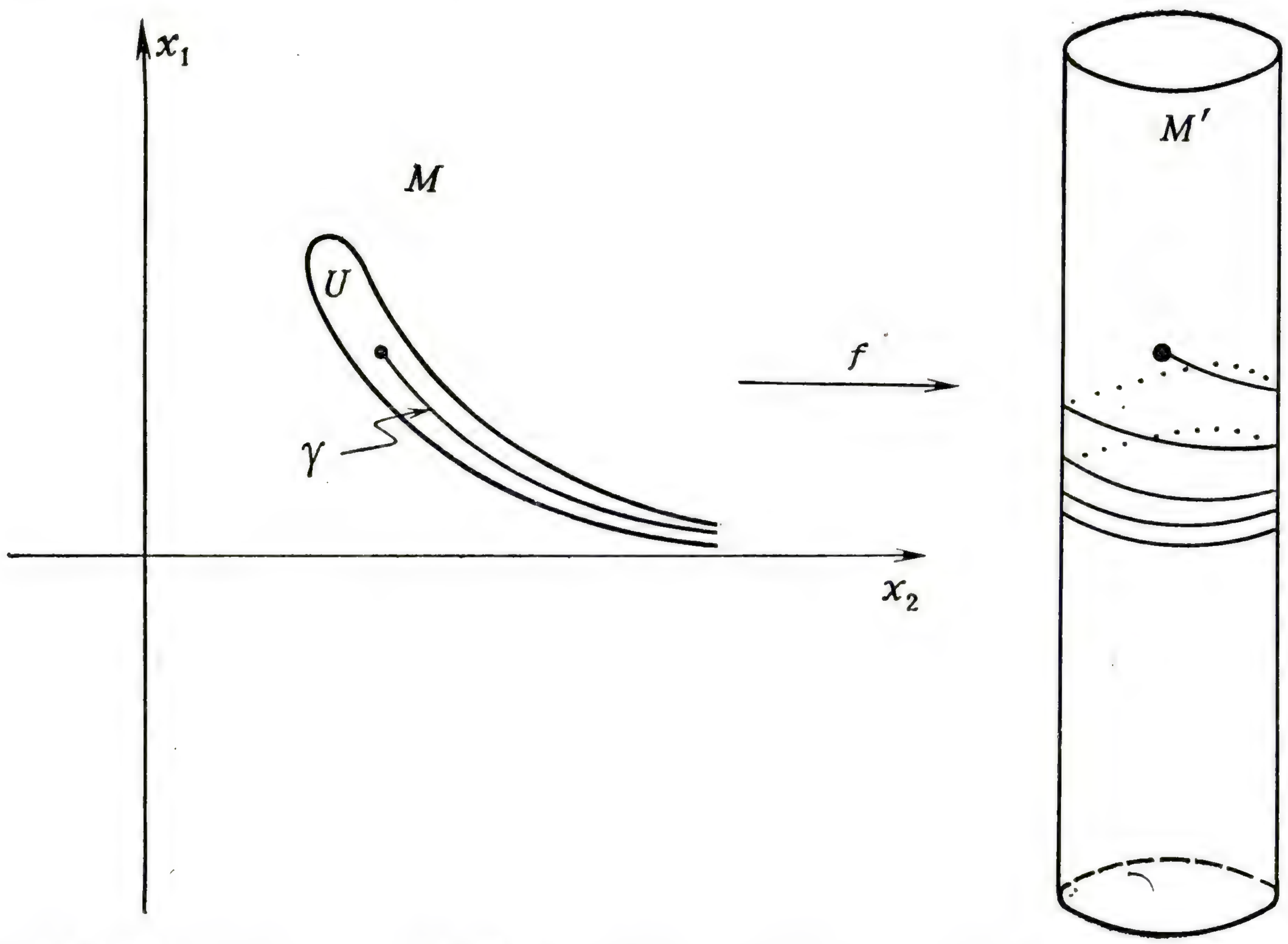



Рис. 5.7. Пространство-время Минковского имеет аналитические локальные расширения. Пусть на $M = \mathbb{R}^n$ задана стандартная метрика Минковского g, и пусть $T^{n-1}$ есть $(n-1)$-мерный тор с обычной положительно определенной плоской метрикой h. Пусть далее на $M' = \mathbb{R} \times T^{n-1}$ задана лоренцева метрика произведения $g' = -dt^2 \oplus h$. Тогда $(M, g)$ является универсальным накрывающим пространством многообразия $(M', g')$ и естественная проекция $f: M \to M'$ локально изометрична. Выберем в качестве $U$ открытое множество в $M$, содержащее

$$\gamma(s) = (s^{-\beta}, s, \ldots, 0), \quad \gamma: [1, \infty) \to M$$

и такое, что отображение $f|U$ взаимно-однозначно и $f(U)$ имеет компактное замыкание в $M'$. Тогда $f|U$: $(U, g|U) \to (M', g')$ — аналитическое локальное расширение пространства Минковского. Но это — расширение *не* через точки $\partial_c M$ и *не* через точки $\partial_b M$.

метим, что если $\gamma_1$: $[0, a) \to U$ — произвольная кривая с некомпактным замыканием в $M$, то $f \circ \gamma_1$ не может быть продолжено в $t = a$ в $M'$.

## 5.6. Сингулярности кривизны

Пусть $\partial M$ — идеальная граница многообразия $M$ (т. е. либо $\partial_b M$, либо $\partial_c M$). Точка $q \in \partial M$ называется *регулярной граничной точкой* многообразия $M$, если существует глобальное расширение $(M', g')$ многообразия $(M, g)$, такое, что $q$ можно естественно отождествить с точкой из $M'$. Тем самым регулярная граничная точка может рассматриваться как устранимая сингулярность $M$.

Пусть $\gamma$: $[0, a) \to M$ — непродолжаемая кривая, такая, что

точка $\gamma(a)$ соответствует идеальной точке $M$. Говорят, что кривая $\gamma$ определяет *сингулярность кривизны* (см. Эллис и Шмидт (1977, с. 916)), если некоторая компонента $R_{abcd}$ *не* является непрерывной на $[0, a]$ при параллельном переносе ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_k$ вдоль $\gamma$. Сингулярность кривизны является препятствием к локальному $b$-граничному расширению кривой $\gamma$, так как если локальное $b$-граничное расширение $\gamma$ существует, то тензор кривизны и все его производные, вычисляемые относительно ортонормированного базиса, параллельно переносимого вдоль $\gamma$, должны быть непрерывны и, следовательно, при $t \to a^-$ должны сходиться к определенным пределам.

*Почти регулярной сингулярностью* называется $b$-граничная точка $q \in \partial_b M$, которая не является ни регулярной граничной точкой, ни сингулярностью кривизны. Кларке (1973, с. 208) доказал, что если $\gamma$: $[0, a) \to M$ — непродолжаемая $b$-неполная кривая, соответствующая почти регулярной сингулярности, то существует ее локальное $b$-граничное расширение. Это утверждение показывает, что сингулярности кривизны представляют собой единственное реальное препятствие для локальных $b$-граничных расширений.

В общем случае может оказаться весьма затруднительным ответить на вопрос: имеет ли данное пространство-время локальные расширения какого-либо вида? Однако для аналитических $b$-граничных расширений аналитических пространственно-временны́х многообразий положение несколько проще (см. теорему 5.23).

Для доказательства теоремы 5.23 полезно убедиться в справедливости следующего утверждения о вещественных аналитических пространственно-временны́х многообразиях и локальных изометриях. Напомним, что локальная изометрия $F$: $M \to M'$ — это такое отображение, для которого у каждой точки $p \in M$ найдется открытая окрестность $U(p)$, на которой $F$ является изометрией. Тем самым локальные изометрии являются локальными, но не обязательно глобальными диффеоморфизмами.

**Предложение 5.22.** *Пусть* $(M_1, g_1)$ и $(M, g)$ — *вещественные аналитические лоренцевы многообразия одинаковой размерности и* $F$: $M \to M_1$ — *вещественное аналитическое отображение. Если* $M$ *содержит открытое множество* $U$, *для которого* $F|U: U \to M_1$ — *изометрия, то* $F$ — *локальная изометрия.*

*Доказательство.* По теореме об обратной функции множество $W = \{m \in M\colon F_* v \neq 0$ для всех $v \neq 0$ в $T_m M\}$ является открытым подмножеством $M$. Вследствие того что $F|U$ — изометрия, $U$ содержится в $W$. Зафиксируем произвольную точку $p \in U$ и обозначим через $V$ линейно связную компоненту $W$, которая ее содержит. Справедливость сформулированного утверждения

будем доказывать следующим образом: сначала покажем, что $F|V$ — локальная изометрия, а затем, что $V = M$.

Пусть $q$ — произвольная точка $V$. Возьмем кривую $\gamma$: $[0, 1] \to V$ так, чтобы $\gamma(0) = p$ и $\gamma(1) = q$. Пользуясь компактностью $\gamma[0, 1]$, покроем его конечной цепочкой координатных карт $(U_1, \varphi_1), \ldots, (U_k, \varphi_k)$, таких, что каждое множество $U_i$ односвязно, $F|U_i$: $U_i \to M_1$ — аналитический диффеоморфизм, $p \in U_1 \subset U \cap V$, $q \in U_k$ и $U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$ для каждого $i$, удовлетворяющего условию $1 \leqslant i \leqslant k - 1$. Так как $U_1 \subset U \cap V$, то на $U_1$ $g = (F|U_1)^* g_1$. Поэтому $g = (F|U_1)^* g_1$ на $U_1 \cap U_2$. Из того, что $U_1 \cap U_2$ — открытое подмножество $U_2$, а $F$ — вещественно аналитический диффеоморфизм $U_2$ на его образ, вытекает, что $g = (F|U_2)^* g_1$ на $U_2$. Рассуждая по индукции, получим, что $g = (F|U_k)^* g_1$ на $U_k$; откуда следует, что $F$ является изометрией в открытой окрестности $U_k$ точки $q$. Тем самым $F|V$: $V \to M_1$ — локальная изометрия.

Остается показать, что $V = M$. Предположим, что $V \neq M$, и выберем в $M \setminus V$ произвольную точку $r$. Пусть $\gamma$: $[0, 1] \to M$ — гладкая кривая, у которой $\gamma(0) = p$ и $\gamma(1) = r$. Существует наименьшее $t_0 \in [0, 1]$, для которого $r = \gamma(t_0) \in M \setminus V$. Тогда ограничение $F$ на окрестность $V$ кривой $\gamma_1 [0, t_0)$ является локальной изометрией. Чтобы получить требуемое противоречие, достаточно показать, что $r \in V$. Из того, что $r \in M \setminus V$, вытекает существование в $T_r M$ касательного вектора $x \neq 0$, для которого $F_* x = 0$. Пусть $X$ — однозначно определенное векторное поле, параллельное вдоль $\gamma$ и такое, что $X(t_0) = x$. Так как в окрестности кривой $\gamma$: $[0, t_0) \to M$ отображение $F$ является локальной изометрией, то поле $F_* \circ X$ параллельно вдоль $F \circ \gamma$: $[0, t_0) \to M_1$. В силу гладкости $F$ имеем $F_* x = F_* X(t_0) = \lim_{t \to t_0^-} F_* X(t)$. Из того, что $F_* \circ X$ — параллельное векторное поле для всех $t$, подчиненных условию $0 \leqslant t < t_0$, получаем, что $\lim_{t \to t_0^-} F_* X(t) \neq 0$. Отсюда следует, что $F_* x \neq 0$. Таким образом, $F$ несингулярно в точке $r$. Отсюда вытекает, что $r \in V$, и требуемое противоречие получено. □

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы обратиться к доказательству теоремы 5.23 о локальных $b$-граничных расширениях вещественно аналитического пространства-времени.

**Теорема 5.23.** *Пусть $(M, g)$ — аналитическое пространство-время без захваченных непространственноподобных кривых, в котором кривая $\gamma$: $[0, a) \to M$ имеет аналитическое локальное $b$-граничное расширение. Тогда существуют времениподобные, изотропные и пространственноподобные геодезические с конечным аффинным параметром, которые являются непродолжаемыми*

*в одном из направлений и не соответствуют сингулярностям кривизны.*

Доказательство теоремы 5.23 опирается на две леммы.

**Лемма 5.24.** *Пусть* $(M, g)$ — *аналитическое пространство-время без захваченных непространственноподобных кривых, в котором* $\gamma$: $[0, a) \to M$ *имеет аналитическое локальное* $b$*-граничное расширение. Тогда* $(M, g)$ *содержит неполную геодезическую.*

*Доказательство.* Пусть $f$: $(U, g|U) \to (U', g')$ — аналитическое расширение $\gamma$. Можно предполагать, что $U$ содержит образ $\gamma$. Кроме того, $f\circ\gamma$ продолжаемо в $U'$. Поэтому $f\circ\gamma(t) \to p \in U'$ при $t \to a^-$. Обозначим через $W'$ окрестность точки $p$, являющуюся выпуклой нормальной окрестностью каждой своей точки. Тогда $\exp_x^{-1}$: $W' \to T_xU'$ — диффеоморфизм для каждой фиксированной точки $x \in W$. Пусть $t_0$ выбрано так, что $f\circ\gamma(t) \in W'$ для всех $t$, $t_0 \leqslant t < a$. Положим $q = \gamma(t_0)$ и $r = f(q)$. Тогда отображение $H = \exp_q \circ f_{*q}^{-1} \circ \exp_r^{-1}$: $W' \to M$ определено вблизи $r$ и аналитично. Это отображение $H$ переводит геодезические, начинающиеся в $r$, в геодезические, исходящие из $q$, и сохраняет длины вдоль этих геодезических. В действительности $H$ совпадает с $f^{-1}$ вблизи $r$. Отображение $H$ не обязательно взаимно однозначно вследствие того, что таковым свойством обладает $\exp_q$. Поскольку область определения $\exp_q$ представляет собой объединение прямолинейных отрезков, начинающихся в начальной точке пространства $T_qM$, то область определения $V'$ отображения $H$ должна быть некоторым подмножеством из $W'$, представляющим собой объединение геодезических сегментов, исходящих из $r$. Отсюда следует, что множество $V'$ не может совпадать со всем $W'$ только в том случае, если $\exp_q$: $T_qM \to M$ определено на собственном подмножестве пространства $T_qM$, не включающем в себя всех точек из образа $f_{*q}^{-1}\cdot\exp_r^{-1}(W')$. Поэтому, если показать, что $V' \neq W'$, то из этого неравенства можно заключить, что найдется некоторая неполная непродолжаемая геодезическая, исходящая из $q$. Но аналитические отображения $H$ и $f^{-1}$ должны совпадать на компоненте множества $f(U) \cap V'$, содержащей точку $r$. Это означает, что $V' \neq W'$. С другой стороны, если $H$ и $f^{-1}$ совпадают на множестве $f(U) \cap W'$, то они совпадают и в окрестности множества $f\circ\gamma\,[t_0, a)$. Это приводит к тому, что $H\circ f\circ\gamma = \gamma$ для всех $t_0 \leqslant t < a$, и означает, что $\gamma$ продолжаема в $M$ через точку $H(p)$. И мы приходим к противоречию. □

В следующей лемме мы будем пользоваться теми же условиями и обозначениями.

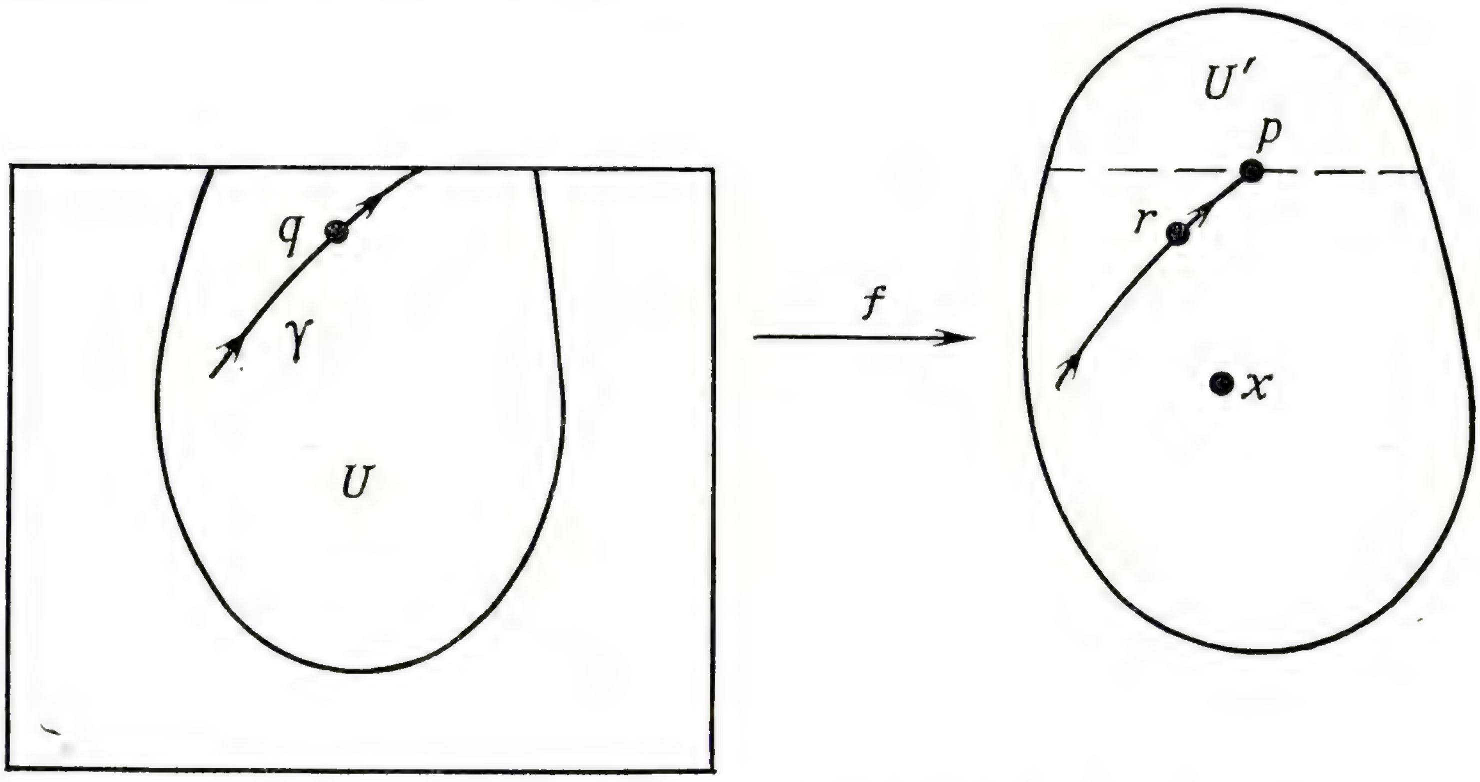



Рис. 5.8. В доказательстве теоремы 5.23 изометрия $f$: $(U, g|U) \to (U', g')$ является аналитическим локальным $b$-граничным расширением $\gamma$. Точка $p \in U'$ — концевая точка $f \circ \gamma$ в $U'$. На этом рисунке $f(q) = r$ и все точки $f \circ \gamma$, расположенные между $r$ и $p$, находятся в хронологическом будущем $x$.

**Лемма 5.25.** *Отображение* $H$: $V' \to M$ *является локальной изометрией.*

*Доказательство.* Пространство-время $(M, g)$, пара $(U', g')$ и отображение $H$ аналитичны. Более того, $H$ совпадает с изометрией $f^{-1}$ вблизи $r$ и определено на линейно связном множестве $V'$. Поэтому из предложения 5.22 вытекает, что $H$ — локальная изометрия. □

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы завершить

*Доказательство теоремы 5.23.* Необходимо рассмотреть три случая, соответствующих неполным времениподобным, изотропным и пространственноподобным геодезическим. Мы ограничимся доказательством только времениподобного случая, сохранив обозначения лемм 5.24 и 5.25. Без потери общности можно предполагать, что существует некоторая точка $x \in W'$, для которой в хронологическом упорядочении на $W'$ имеем $x \ll p$ и $x \ll f \circ \gamma(t)$ для всех $t$, $t_0 \leqslant t < a$ (рис. 5.8).

Пусть $x \notin V'$. Обозначим через $\alpha$ геодезический сегмент в $W'$ из $r$ в $x$. Отображение $H$ переводит $\alpha \cap V'$ в непродолжаемую неполную времениподобную геодезическую, исходящую из $q$, а лемма 5.25 показывает, что эта геодезическая не соответствует сингулярности кривизны.

Пусть $x \in V'$. Положим $y = H(x)$ и рассмотрим $H' = \exp_y \circ H_{*x} \circ \exp_x^{-1}$: $W' \to M$. Отображение $H'$ определено на некотором подмножестве $V''$ из $W'$ и является локальной изометрией по тем же самым причинам, по которым локально изометрично $H$;

кроме того, $H'$ вблизи $r$ совпадает и с $H$, и с $f^{-1}$. Множество $V''$ не может содержать всех точек из множества $f \circ \gamma$, где $t_0 \leqslant t < a$, вследствие того что это вносило бы концевую точку $H'(p)$ кривой $\gamma$ в $M$. Используя отношение $x \ll f \circ \gamma(t)$, справедливое для всех $t$, подчиненных условию $t_0 \leqslant t < a$, мы заключаем, что существует непродолжаемая неполная времениподобная геодезическая, исходящая из $y$ в $M$, которая не соответствует сингулярности кривизны. □

**Замечание 5.26.** Есть примеры $C^\infty$-гладких пространственно-временных многообразий, которые являются одновременно и геодезически полными, и локально $b$-расширяемыми (см. Бим (1976в, с. 506)). Отсюда следует, что аналитичность в условии теоремы 5.23 нельзя заменить предположением о бесконечной дифференцируемости.

**Следствие 5.27.** *Пусть $(M, g)$ — аналитическое пространство-время с незахваченными непространственноподобными кривыми, в котором каждая времениподобная геодезическая $\gamma$: $[0, a) \to M$, непродолжаемая в $t = a$, либо полна (т. е. $a = \infty$) в указанном направлении, либо соответствует сингулярности кривизны. Тогда $(M, g)$ не имеет аналитических локальных $b$-граничных расширений.*

# Глава 6

# УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОСТРАНСТВ РОБЕРТСОНА — УОКЕРА

При доказательстве теорем сингулярности в общей теории относительности очень важны предположения, которые выполняются не только для заданной «основной» лоренцевой метрики $g_0$ на $M$, но и для всех метрик $g$ на $M$, достаточно близких к $g_0$. К этому вынуждают различные обстоятельства: не только то, что погрешности астрономических измерений не позволяют точно определить лоренцеву метрику вселенной, но также и то, что космологические предположения, как, например, пространственная однородность вселенной, выполняются лишь приближенно. Как бы то ни было, если теорема о неполноте идеализированной модели $(M, g_0)$ получена в предположениях, имеющих силу для всех метрик $g$ на $M$ из открытой окрестности метрики $g_0$, то каждое пространство-время $(M, g)$ с метрикой $g$, достоточно близкой к $g_0$, также будет неполным. Отсюда следует, что если модель построена достаточно точно, то выводы, справедливые для модели, также имеют силу и для фактически существующей вселенной.

Напомним, что через $\mathrm{Lor}(M)$ обозначается пространство всех лоренцевых метрик на данном многообразии, а через $\mathrm{Con}(M)$ — факторпространство, образованное путем отождествления всех глобально конформных метрик $g_1 = \Omega g_2$ на $M$, где $\Omega: M \to (0, \infty)$ — гладкая функция. Пусть $\tau$: $\mathrm{Lor}(M) \to \mathrm{Con}(M)$ — естественная проекция, которая каждой лоренцевой метрике $g$ на $M$ ставит в соответствие множество $\tau(g) = \bar{g}$ всех лоренцевых метрик на $M$, глобально конформных $g$. Для данного $\bar{g} \in \mathrm{Con}(M)$ положим $C(M, g) = \tau^{-1}(\bar{g}) \subset \mathrm{Lor}(M)$. В общей теории относительности принято называть условия на кривизну или условия причинности для пространства-времени $(M, g_0)$ *$C^r$-устойчивыми* в $\mathrm{Lor}(M)$ (соответственно в $\mathrm{Con}(M)$), если выполнение этих условий для $(M, g_0)$ влечет за собой их выполнение для всех метрик $g$ в $C^r$-открытой окрестности метрики $g_0$ в $\mathrm{Lor}(M)$ (соответственно в $\mathrm{Con}(M)$).

После того как были получены теоремы сингулярности (см. Хокинг и Эллис (1977, гл. 8)), возник интерес к изучению $C^r$-устойчивости таких условий, как существование замкнутых

ловушечных поверхностей, положительность непространственноподобной кривизны Риччи и геодезическая полнота, играющих ключевую роль в теоремах сингулярности. Герок (1970) доказал устойчивость глобальной гиперболичности в интервальной топологии на Con ($M$). Затем Лернер (1973) провел тщательное изучение устойчивости на Lor ($M$) и на Con ($M$) условий причинности и условий на кривизну, весьма полезных в общей теории относительности. В частности, Лернер заметил, что интервальная топология и фактортопология на Con ($M$) совпадают. Отсюда сразу же вытекает, что результат Герока об устойчивости глобальной гиперболичности выполняется для Con ($M$) в фактортопологии и, значит, автоматически в Lor ($M$). Лернером был поднят также следующий вопрос (1973, с. 35) о моделях большого взрыва Робертсона — Уокера: всякая ли непространственноподобная геодезическая остается неполной при малых $C^r$-гладких возмущениях метрики?

Основная цель гл. 6 состоит в том, чтобы ответить на этот вопрос утвердительно. В разд. 6.1 мы определим $C^r$-топологии и интервальную топологию для Con ($M$). Затем мы рассмотрим свойства устойчивости на Lor ($M$) и на Con ($M$), доказанные Героком (1970) и Лернером (1973). В разд. 6.2, применяя «евклидову норму»

$$\|\xi - \eta\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^{2n} [\tilde{x}_i(\xi) - \tilde{x}_i(\eta)]^2\right\}^{1/2},$$

индуцированную на ($TM|_U$, $\tilde{x}$) координатной картой ($U$, $x$) для $M$, и стандартные оценки из теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$, мы получим оценки поведения геодезических в ($U$, $x$) при $C^1$-гладких возмущениях метрики. В разд. 6.3 мы применим эти оценки к координатным картам, приспособленным к структуре искривленного произведения $M = (a, b) \times_f H$ пространства-времени Робертсона — Уокера (см. определение 4.10), чтобы изучить устойчивость геодезической неполноты в таких пространственно-временны́х многообразиях. Мы покажем также (теорема 6.15), что если $((a, b) \times_f H, g_0)$, $a > -\infty$, — пространство-время Робертсона — Уокера, то найдется $C^0$-окрестность $U(g_0)$ метрики $g_0$ в Lor ($M$), такая, что *все* времениподобные геодезические *каждого* пространства-времени ($M$, g) неполны в прошлом для всех $g \in U(g_0)$. Если предполагать к тому же, что $b < \infty$, то можно получить (теорема 6.16) одновременно и неполноту в будущем, и неполноту в прошлом всех времениподобных геодезических для любых $g \in U(g_0)$. Похожий результат (теорема 6.19) можно доказать и для изотропной геодезической неполноты, привлекая для этого $C^1$-топологию на Lor ($M$). Объединяя эти результаты, получаем $C^1$-

устойчивость непространственноподобной геодезической неполноты в прошлом для пространств Робертсона — Уокера.

В конце разд. 2.6 уже обсуждалась связь между выбором искривляющей функции $f: (a, b) \to (0, \infty)$ и непространственноподобной геодезической неполнотой заданного лоренцева искривленного произведения $(a, b) \times_f H$.

Результаты разд. 6.2 и 6.3 приведены в работе Бима и Эрлиха (1980).

## 6.1. Устойчивые свойства Lor $(M)$ и Con $(M)$

На пространстве Lor $(M)$ лоренцевых метрик на $M$ можно ввести отношение эквивалентности $C$: метрики $g_1, g_2 \in$ Lor $(M)$ эквивалентны, если существует гладкий конформный множитель $\Omega: M \to (0, \infty)$, такой, что $g_1 = \Omega g_2$. Как и в гл. 1, мы будем обозначать через $C(M, g)$ класс эквивалентности метрики $g$ в Lor $(M)$. Фактормножество классов эквивалентности Lor $(M)/C$ будем обозначать через Con $(M)$. Естественное проектирование $\tau$: Lor $(M) \to$ Con $(M)$ задается следующим правилом: $\tau(g) = C(M, g)$.

$C^0$-топология на Lor $(M)$ (см. разд. 2.2) обычным образом индуцирует на Con $(M)$ *фактортопологию*. Именно подмножество $A$ из Con $(M)$ называется открытым в этой топологии, если его прообраз $\tau^{-1}(A)$ открыт в $C^0$-топологии на Lor $(M)$.

На Con $(M)$ можно задать также и *интервальную топологию* (см. Герок (1970, с. 447)). Напомним из наших рассмотрений устойчивой причинности в разд. 2.2, что частичная упорядоченность на Lor $(M)$ определялась следующим образом: $g_1 < g_2$, если из неравенства $g_1(v, v) \leqslant 0$, справедливого для всех $v \neq 0$ из $TM$, вытекает неравенство $g_2(v, v) < 0$. Путем непосредственных вычислений можно убедиться в том, что метрики $g_1, g_2 \in$ Lor $(M)$ удовлетворяют отношению $g_1 < g_2$ тогда и только тогда, когда $g_1' < g_2'$ для всех $g_1' \in C(M, g_1)$ и $g_2' \in C(M, g_2)$. Таким образом, частичная упорядоченность $<$ на Lor $(M)$ индуцирует частичную упорядоченность на Con $(M)$, которую мы также будем обозначать через $<$. Подбазис *интервальной топологии* на Con $(M)$ задается множествами вида

$$\{C(M, g) \in \mathrm{Con}\,(M): C(M, g_1) < C(M, g) < C(M, g_2)\}$$

где $g_1$ и $g_2$ — произвольные лоренцевы метрики для $M$, связанные отношением $g_1 < g_2$. Известно, что фактортопология и интервальная топология на Con $(M)$ совпадают (см. Лернер (1973, с. 23)). Таким образом, интуитивно ясно, что два конформных класса $C(M, g_1)$ и $C(M, g_2)$ близки в какой-нибудь из этих топологий на Con $(M)$ тогда и только тогда, когда во всех точках $M$ световые конусы метрик $g_1$ и $g_2$ близки в $T_pM$.

Всякое свойство, заданное на Lor $(M)$, которое выполняется на $C^r$-открытом подмножестве из Lor $(M)$, называется *$C^r$-устойчивым*. Аналогично заданное на Lor $(M)$ свойство, инвариантное относительно отношения конформности $C$, называется *конформно устойчивым*, если оно выполняется для открытого множества в фактортопологии (или в интервальной топологии) на Con $(M)$. Непрерывность отображения проектирования $\tau$: Lor $(M) \to$ $\to$ Con $(M)$ означает, что любое конформно устойчивое свойство, определенное на Lor $(M)$, будет также и $C^0$-устойчивым на Lor $(M)$. Более того, из того, что $C^r$-топология на Lor $(M)$ строго тоньше, чем $C^s$-топология для $r > s$, вытекает, что любое конформно устойчивое свойство, определенное на Lor $(M)$, будет также и $C^r$-устойчивым для всех $r \geqslant 0$.

**Пример 6.1.** Устойчивая причинность конформно устойчива, а отсюда и $C^r$-устойчива для всех $r \geqslant 0$. В самом деле, метрику $g_0 \in$ Lor $(M)$ можно определить как устойчиво причинную, если свойство причинности является $C^0$-устойчивым в Lor $(M)$ на метрике $g_0$.

Второй пример свойства конформной устойчивости представлен результатом Герока (1970, с. 448).

**Теорема 6.2.** *Глобальная гиперболичность конформно устойчива, а отсюда и $C^r$-устойчива в* Lor $(M)$ *для всех* $r \geqslant 0$.

Можно также показать, что если $S$ — гладкая поверхность Коши для многообразия $(M, g)$, то существует $C^0$-окрестность $U$ метрики $g$ в Lor $(M)$, такая, что если $g_1 \in U$, то $S$ является поверхностью Коши и для $(M, g_1)$ (см. Герок (1970, с. 448)).

Следующие два результата получены Лернером (1973).

**Предложение 6.3.** *Если* $(M, g)$ — *лоренцево многообразие, для которого из неравенства* $g(v, v) \leqslant 0$, *где* $0 \neq v \in TM$, *вытекает, что* $\mathrm{Ric}(g)(v, v) > 0$, *то найдется $C^2$-окрестность* $U(g)$ *метрики* $g$ *в* Lor $(M)$, *такая, что для всех* $g_1 \in U(g)$ *из условия* $g_1(v, v) \leqslant 0$, *где* $0 \neq v \in TM$, *вытекает неравенство* $\mathrm{Ric}(g_1)$ $(v, v) > 0$.

**Предложение 6.4.** *Геодезическая полнота является $C^r$-устойчивой в* Lor $(M)$ *для всех* $r \geqslant 2$.

Согласно предложению 5.16, геодезически полное лоренцево многообразие глобально нерасширяемо. Поэтому из предложений 5.16 и 6.4 вытекает, что если $(M, g)$ геодезически полно, то в Lor $(M)$ найдется такая $C^2$-окрестность $U(g)$ метрики $g$, что многообразие $(M, g_1)$ нерасширяемо для каждой метрики $g_1 \in$ $\in U(g)$. Если же $(M, g)$ — расширяемое лоренцево многообразие и $U(g)$ — произвольная $C^r$-окрестность метрики $g$ в Lor $(M)$,

то найдется метрика $g_1 \in U(g) \setminus \{g\}$, такая, что $(M, g_2)$ расширяемо.

В этой главе многообразие $M$ всегда фиксированно. Отметим, однако, что в общей теории относительности рассматриваются также и однопараметрические семейства $\{(M_\lambda, g_\lambda)\}$ многообразий и лоренцевых метрик (см. Герок (1969)).

## 6.2. $C^1$-топология и системы геодезических

Если $(M, g)$ — произвольное лоренцево многообразие, то метрики в Lor $(M)$, близкие к $g$ в $C^1$-топологии, имеют системы геодезических, которые близки к системе геодезических метрики $g$. Цель этого раздела состоит в том, чтобы дать аналитическую формулировку этого понятия, удобную для наших исследований $C^1$-устойчивости изотропной геодезической неполноты пространств Робертсона—Уокера в разд. 6.3.

Начнем с того, что напомним оценку, хорошо известную из теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см. Бирхгоф и Рота (1969, с. 155)). Евклидову норму точки $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ будем обозначать через $\|x\|_2$: $\|x\|_2 = [\sum_{i=1}^m x_i^2]^{1/2}$.

**Предложение 6.5.** *Пусть $f = (f_1, \ldots, f_m)$ и $h = (h_1, \ldots, h_m)$ — непрерывные функции с общей областью определения $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, причем $f$ удовлетворяет условию Липшица:*

$$\|f(s, x) - f(s, \bar{x})\|_2 \leqslant L \|x - \bar{x}\|_2$$

*для всех $(s, x)$, $(s, \bar{x}) \in D$. Пусть $x(s) = (x_1(s), \ldots, x_m(s))$ и $y(s) = (y_1(s), \ldots, y_m(s))$ — решения дифференциальных уравнений*

$$\frac{dx}{ds} = f(s, x), \qquad \frac{dy}{ds} = h(s, y)$$

*соответственно (здесь $0 \leqslant s \leqslant b$). Тогда если $\|f(s, x) - h(s, x)\|_2 < \varepsilon$ для любых $(s, x) \in D$ и $0 \leqslant s \leqslant b$, то*

$$\|x(s) - y(s)\|_2 \leqslant \|x(0) - y(0)\|_2 e^{Ls} + \frac{\varepsilon}{L}(e^{Ls} - 1)$$

*для всех $s$, подчиненных условию $0 \leqslant s \leqslant b$.*

Пусть $M$ — гладкое многообразие, а $(U, x)$ — произвольная координатная карта на $M$. Ассоциированную карту $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n})$ для $TM|_U$ можно получить следующим образом. Рассмотрим базисные векторные поля $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n$, определяемые на $U$ локальными координатами $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Заданный вектор $v \in T_qM$, где $g \in U$, можно записать в следующем виде: $v = \sum_{i=1}^n a_i (\partial/\partial x_i)|_q$. Тогда $\tilde{x}(v)$ определяется следующей формулой: $\tilde{x}(v) = (x_1(v), \ldots, x_n(v), a_1, \ldots, a_n)$. По-

строенные координатные карты можно использовать для определения евклидовых расстояний на $U$ и $TM\mid_U$. Именно для данных $p,\ q \in U$ и $v,\ w \in TM\mid_U$ положим

$$\|p-q\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n}\left[x_i(p)-x_i(q)\right]^2\right\}^{1/2}$$

и

$$\|v-w\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^{2n}\left[x_i(v)-x_i(w)\right]^2\right\}^{1/2}$$

соответственно. Если $r \geqslant 0$ задано, мы будем пользоваться обозначением $\|g_1-g_2\|_{r,U} < \delta$, где $g_1,\ g_2 \in \mathrm{Lor}(M)$ и $\delta > 0$ — положительная постоянная, если вычисленные в локальных координатах $(U,\ x)$ соответствующие компоненты этих двух метрических тензоров и все их соответствующие частные производные до порядка $r$ включительно $\delta$-близки к каждой точке из $U$.

Символы Кристоффеля второго рода для метрик $g_1,\ g_2 \in \mathrm{Lor}(M)$ обозначим соответственно через $\Gamma^i_{jk}(g_1)$ и $\Gamma^i_{jk}(g_2)$. Тогда уравнения геодезических в координатной карте $(U,\ x)$ для $(M,\ g_a)$, $a=1,\ 2$, задаются следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{ds} &= x_{i+n}\\ \frac{dx_{i+n}}{ds} &= -\Gamma^i_{jk}(g_a)\,x_{j+n}x_{k+n},\end{aligned}\tag{6.1}$$

где $1 \leqslant i,\ j,\ k \leqslant n$ (всюду в этой главе используется соглашение суммируемости Эйнштейна).

Экспоненциальное отображение в точке $q \in (M,\ g_a)$, $a=1,\ 2$, будем обозначать через $\exp_q[g_a]$. Если $v \in TM\mid_U$, то $s \to \exp_q[g_a](sv)$ представляет собой решение системы (6.1) в $U$ с начальными условиями $(q,\ v)$ для $(M,\ g_a)$. Чтобы применить к этим экспоненциальным отображениям предложение 6.5, отождествим $TM\mid_U$ с подмножеством $\mathbb{R}^{2n}$, используя для этого координатную карту $(TM\mid_U,\ \tilde{x})$. Определим $f(s,\ X) = f(X)$ и $h(s,\ X) = h(X)$ посредством соотношений:

$$\begin{aligned}f_i(X) &= h_i(X) = x_{i+n},\\ f_{i+n}(X) &= -\Gamma^i_{jk}(g_1)\,x_{j+n}x_{k+n},\\ h_{i+n}(X) &= -\Gamma^i_{jk}(g_2)\,x_{j+n}x_{k+n},\end{aligned}$$

где $1 \leqslant i,\ j,\ k \leqslant n$ и $X = (x_1,\ \ldots,\ x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$.

**Лемма 6.6.** *Пусть $(U,\ x)$ — локальная координатная карта для $n$-мерного многообразия $M$. Пусть далее $(p,\ v) \in TM\mid_U$*

*и* $c_1(s) = \exp_p[g_1](sv)$ *лежит в* $U$ *для всех* $0 \leqslant s \leqslant b$. *Тогда для любого заданного* $\varepsilon > 0$ *найдется постоянная* $\delta > 0$, *такая, что из неравенств* $\| v - w \|_2 < \delta$ *и* $\| g_1 - g_2 \|_{1, U} < \delta$ *вытекает, что* $c_2 = \exp_q[g_2](sw)$ *лежит в* $U$ *для всех* $s$, *подчиненных условию* $0 \leqslant s \leqslant b$; *более того,*

$$|(x_j \circ c_1)(s) - (x_j \circ c_2)(s)| < \varepsilon$$

*и*

$$|(x_j \circ c_1)'(s) - (x_j \circ c_2)'(s)| < \varepsilon$$

*для всех* $j$ *и* $s$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $0 \leqslant s \leqslant b$.

*Доказательство*. Пусть $f(X)$ и $h(X)$ такие, как указано выше. Тогда $X(s) = (c_1(s), c_1'(s))$ и $Y(s) = (c_2(s), c_2'(s))$ являются решениями дифференциальных уравнений $dX/ds = f(X)$ и $dY/ds = h(Y)$ соответственно. Выберем в $TM|_U$ открытое множество $D_0$ так, чтобы оно содержало образ кривой $X(s)$ и имело компактное замыкание $\overline{D}_0$. Тогда существует постоянная $L$, такая, что $f$ удовлетворяет условию Липшица $\| f(X) - f(\overline{X}) \|_2 \leqslant L \| X - \overline{X} \|_2$ на $D_0$.

Выражение $\| X(0) - Y(0) \|_2$ в оценке предложения 6.5 можно сделать столь малым, сколько требуется, выбирая достаточно малым $\| v - w \|_2$. Далее, так как символы Кристоффеля зависят только от коэффициентов метрического тензора и их первых частных производных, $\| f(X) - h(X) \|_2$ можно сделать на $D_0$ сколь угодно малым, потребовав, чтобы достаточно мало было $\| g_1 - g_2 \|_{1, U}$. Ввиду достаточной малости $\delta > 0$ можно применить предложение 6.5 для того, чтобы обеспечить справедливость включения $c_2(s) \in U$ для всех $0 \leqslant s \leqslant b$, а также чтобы выполнялась оценка $\| X(s) - Y(s) \|_2 < \varepsilon$ для всех $0 \leqslant s \leqslant b$. Следовательно, $| X_i(s) - Y_i(s) | < \varepsilon$ для всех $1 \leqslant i \leqslant 2n$, $0 \leqslant s \leqslant b$. Требуемые неравенства легко следуют из формул (6.1). □

Следующая, несколько более техническая лемма, необходимая в разд. 6.3, непосредственно вытекает из леммы 6.6, если воспользоваться неравенством треугольника и непрерывностью решения $X(s) = (c_1(s), c_1'(s))$ уравнений геодезических.

**Лемма 6.7.** *Пусть* $(U, x)$ — *локальная координатная карта на* $n$-*мерном многообразии* $M$. *Предположим, что* $c_1(v) = \exp_p[g_1](sv)$ *лежит в* $U$ *для всех* $s$, *подчиненных неравенству* $0 \leqslant s \leqslant b$. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *и* $s_1$, $0 < s_1 < b$, *заданы. Тогда существует постоянная* $\delta > 0$, *такая, что если* $\| v - w \|_2 < \delta$, $\| g_1 - g_2 \|_{1, U} < \delta$ *и* $| s_0 - s_1 | < \delta$, *то геодезическая* $c_2(s) = \exp_q[g_2] \times (sw)$ *лежит в* $U$ *для всех* $s$, *подчиненных условию* $0 \leqslant s \leqslant b$, *и, более того,*

$$|(x_j \circ c_1)(s_1) - (x_j \circ c_2)(s_0)| < \varepsilon \tag{6.2}$$

и

$$|(x_j \circ c_1)'(s_1) - (x_j \circ c_2)'(s_0)| < \varepsilon \qquad (6.3)$$

для всех $1 \leqslant j \leqslant n$.

Кроме того, если $(x_1 \circ c_1)'(s_1) \neq 0$, то постоянную $\delta > 0$ можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$1 - \varepsilon < \left| \frac{(x_1 \circ c_2)'(s_0)}{(x_1 \circ c_1)'(s_1)} \right| < 1 + \varepsilon.$$

## 6.3. Устойчивость геодезической неполноты пространств Робертсона — Уокера

В этом разделе мы исследуем устойчивость в пространстве лоренцевых метрик непространственноподобной геодезической неполноты пространств Робертсона—Уокера $M = (a, b) \times_f H$ (см. определение 4.10). Оказывается, что доказательство $C^0$-устойчивости времениподобной геодезической неполноты использует только однородность риманова сомножителя $(H, \mathrm{h})$, но не его изотропность. В соответствии с этим мы будем формулировать результаты в первой части этого раздела для более широкого класса искривленных лоренцевых произведений $M = (a, b) \times_f H$, где $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ и $(H, \mathrm{h})$ — однородное риманово многообразие. Всюду в этом разделе $x_1 = t$ будет обозначать обычную координату на $(a, b)$.

Чтобы изучить геодезическую неполноту таких пространств при возмущениях метрики, полезно использовать координаты, приспособленные к структуре произведения. Зафиксируем $p = (t_1, h_1) \in (a, b) \times H$. Вследствие того что подмногообразие $\{t_1\} \times H$ многообразия $M$ пространственноподобно, лоренцева метрика $g$ на $M$ индуцирует на касательном пространстве к этому подмногообразию в точке $p$ положительно определенное скалярное произведение. Чтобы определить на $H$ римановы нормальные координаты $x_2, \ldots, x_n$ в окрестности $V$ точки $h_1$, можно, отождествив $\{t_1\} \times H$ и $H$, использовать ортонормированный базис касательного пространства к $\{t_1\} \times H$ в точке $p$. Тогда $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определяет координатную систему для $M$ на $(a, b) \times V$. По построению в этих координатах метрика $g$ в точке $p$ имеет вид $\mathrm{diag}\{-1, +1, \ldots, +1\}$. Так как подмногообразие $\{t_1\} \times H$ не обязательно вполне геодезическое, если $f$ отлична от постоянной, то эти координаты не обязательно нормальные. Тем не менее координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ хорошо приспособлены к структуре произведения в силу того, что множества уровня $x_1(t) = \lambda$ есть в точности $\{\lambda\} \times V$. Будем говорить, что построенные выше координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ адаптированы в точке $p \in M$, и будем называть такие координаты *адаптированными координатами*.

**Определение 6.8.** Выпуклая нормальная окрестность $U$ многообразия $(M, g)$ с компактным замыканием $\overline{U}$ называется *адаптированной нормальной окрестностью*, если $\overline{U}$ покрыто адаптированными координатами $(x_1, \ldots, x_n)$, которые приспособлены в каждой точке $U$ так, что выполняются следующие условия:

(1) В каждой точке из $U$ компоненты $g_{ij}$ метрического тензора $g$, выраженные в данных координатах $(x_1, \ldots, x_n)$, отличаются от элементов матрицы $\operatorname{diag}\{-1, +1, \ldots, +1\}$ самое большее на $1/2$.

(2) Метрика $g$ удовлетворяет соотношению $g <_U g_0$, где $g_0$ — метрика Минковского $-ds^2 = -dx_1^2 + \ldots + dx_n^2$ для $U$ (по поводу обозначения $g <_U g_0$ см. определение устойчивой причинности в разд. 2.2).

Таким образом, в окрестности $U$ из определения 6.8 лоренцеву метрику $g$ можно выразить посредством формулы

$$g \mid U = -dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + k_{ij}\, dx_i\, dx_j,$$

где функции $k_{ij}$: $U \to \mathbb{R}$ удовлетворяют неравенству $|k_{ij}| \leqslant 1/2$ для всех $i, j$: $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Чтобы применить это в дальнейшем, нам необходимо доказать существование счетных цепей $\{U_k\}$ адаптированных нормальных окрестностей, покрывающих направленные в будущее непродолжаемые в прошлое времениподобные геодезические вида $c(t) = (t, y_0)$. Вследствие того что и в определении 6.10, и в лемме 6.11 допускается возможность $a = -\infty$, мы примем следующее соглашение, которое будет выполняться до конца раздела.

**Соглашение 6.9.** Через $\omega_0$ будем обозначать произвольную фиксированную точку интервала $(a, b)$.

Дадим теперь следующее определение.

**Определение 6.10.** Пусть $M = (a, b) \times_f H$ — лоренцево искривленное произведение с метрикой $\overline{g} = -dt^2 \oplus fh$. Зафиксируем произвольно выбранную точку $y_0 \in H$. Пусть $c$: $(a, \omega_0] \to (M, \overline{g})$ — направленная в будущее непродолжаемая в прошлое времениподобная геодезическая, заданная соотношением $c(t) = (t, y_0)$. Счетное покрытие $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ геодезической $c$ открытыми множествами и строго монотонно убывающая последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, у которой $t_1 = \omega_0$ и $t_k \to a^+$ при $k \to \infty$, называются *допустимой цепью* для $c$: $(a, \omega_0] \to (M, \overline{g})$, если:

(1) Каждая $U_k$ является адаптированной нормальной окрестностью, приспособленной в некоторой точке геодезической $c$ и содержащей $c(t_k) = (t_k, y_0)$.

(2) Каждая направленная в будущее и непродолжаемая в прошлое непространственноподобная кривая $\sigma(t) = (t, \sigma_1(t))$, где $\sigma(t_k) = (t_k, y_0)$, остается в $U_k$ для всех $t$, подчиненных условию $t_{k+1} \leqslant t \leqslant t_k$, $k$ — любое.

Для произвольной направленной в будущее непространственноподобной кривой $\sigma$ в $(M, \bar{g})$ параметризация может быть выбрана так, что $\sigma(t) = (t, \sigma_1(t))$. Поэтому условие (2) накладывается на все направленные в будущее непространственноподобные кривые, исходящие из $(t_k, y_0)$. Покажем теперь, что допустимые цепи существуют.

**Лемма 6.11.** *Пусть* $M = (a, b) \times_f H$, *где* $a \geqslant -\infty$, *и* $\bar{g} = -dt^2 \oplus f\mathrm{h}$ — *лоренцево искривленное произведение. Для любого* $y_0 \in H$ *времениподобная геодезическая* $c\colon (a, \omega_0] \to (M, \bar{g})$, *задаваемая соотношением* $c(t) = (t, y_0)$, *может быть покрыта допустимой цепью.*

*Доказательство.* Будем говорить, что $\{U_k\}$, $\{t_k\}$ — допустимая цепь для $c \mid (\theta, \omega_0]$, $\theta \geqslant a$, если $\{U_k\}$, $\{t_k\}$ удовлетворяет условиям определения 6.10, за исключением одного: при $k \to \infty$ $t_k \to \theta^+$ вместо $t_k \to a^+$. Положим $\tau = \inf\{\theta \in [a, \omega_0]$: существует допустимая цепь $\{U_k\}$, $\{t_k\}$ для $c \mid (\theta', \omega_0]$ и для всех $\theta' \geqslant \theta\}$. Мы должны показать, что $\tau = a$.

Взяв адаптированную нормальную окрестность с центром в $c(\omega_0)$, нетрудно увидеть, что $\tau < \omega_0$. Предположим, что $\tau > a$. Пусть $U$ — произвольная адаптированная нормальная окрестность, приспособленная в точке $(\tau, y_0) \in M$. Выберем $r > \tau$ так, чтобы все направленные в будущее непространственноподобные кривые $\sigma(t) = (t, \sigma_1(t))$, берущие начало в $(r, y_0)$, лежали в $U$ для всех $\tau - \varepsilon \leqslant t \leqslant r$, где $\varepsilon > 0$. Тогда для $c\,((r + \tau)/2, \omega_0]$ найдется допустимая цепь $\{U_n\}$, $\{t_n\}$, у которой $t_m < r$ для некоторого $m$. Положим $\tilde{U}_m = U_{m+1} = U$. Расширяя конечную цепь $\{U_1, \ldots, U_{m-1}, U_m, U_{m+1}\}$, $\{t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m, \tau - \varepsilon\}$ до бесконечной допустимой цепи, получаем требуемое противоречие. □

Покажем теперь, что подмножество из $U_k$, для которого выполняется свойство (2) определения 6.10, можно расширить от точки $(t_k, y_0)$ до окрестности $\{t_k\} \times V_k(y_0)$ в $\{t_k\} \times H$. Обозначение $\|g - g_1\|_{0, U_k} < \delta$ определено в разд. 6.2.

**Лемма 6.12.** *Пусть* $\{U_k\}$, $\{t_k\}$ — *допустимая цепь для времениподобной геодезической* $c\colon (a, \omega_0] \to (M, g)$, $c(t) = (t, y_0)$. *Для каждого* $k$ *в* $H$ *существует окрестность* $V_k(y_0)$ *точки* $y_0$, *для которой любая направленная в будущее непространственноподобная кривая* $\sigma(t) = (t, \sigma_1(t))$ *с* $\sigma(t_k) \in \{t_k\} \times V_k(y_0)$ *остается в* $U_k$ *для всех* $t$, *подчиненных условию* $t_{k+1} \leqslant t \leqslant t_k$. *Более того,* $V_k(y_0)$ *и* $\delta > 0$ *можно выбрать так, что если* $g_1 \in \mathrm{Lor}(M)$ *и*

$\| g - g_1 \|_{0,\, U_k} < \delta$, *то выполняются следующие два утверждения: если* $\gamma(t) = (t, \gamma_1(t))$ — *произвольная непространственноподобная кривая в* $(M, g_1)$ *с* $\gamma(t_k) \in \{t_k\} \times V_k(y_0)$, *то*

(1) $\gamma$ *остается в* $U_k$ *для всех* $t$, *подчиненных условию* $t_{k+1} \leqslant t \leqslant t_k$;

(2) $g_1$-*длина* $\gamma \mid [t_{k+1}, t_k]$ *не больше* $\sqrt{6n}\,(t_k - t_{k+1})$.

*Доказательство.* Напомним сначала, что отображение $\pi$: $M = (a, b) \times H \to \mathbb{R}$, задаваемое правилом $\pi(t, h) = t$, выступает в роли глобальной функции времени для $M$. В частности, векторное поле $\nabla\pi$ удовлетворяет неравенству $g(\nabla\pi, \nabla\pi) < 0$ во всех точках из $M$. Определим $\tilde{g} \in \mathrm{Lor}(M)$ посредством соотношения

$$\tilde{g}(x, y) = g(x, y) - g(x, \nabla\pi)\, g(y, \nabla\pi).$$

Из определения $\tilde{g}$ вытекает, что $g \prec \tilde{g}$ на $M$, так что $U_2 = \{\bar{g}_2 \in \mathrm{Con}(M)\colon \bar{g}_2 < \tau(\tilde{g})\}$ является открытой окрестностью $C(M, g)$ в $\mathrm{Con}(M)$. Положим $U_1 = \tau^{-1}(U_2)$. Тогда $U_1$ есть $C$-открытая окрестность метрики $g$ в $\mathrm{Lor}(M)$, такая, что если $g_1 \in U_1$, то отображение проектирования $\pi$: $M \to \mathbb{R}$ представляет собой глобальную функцию времени для $(M, g_1)$. Отсюда следует, что гиперповерхности $\{t\} \times H$, $t \in (a, b)$, остаются пространственноподобными в $(M, g_1)$. Поэтому любая непространственноподобная кривая $\gamma$ в $(M, g_1)$, $g_1 \in U_1$, может быть параметризована так, что $\gamma(t) = (t, \gamma_1(t))$. Таким образом, лемма будет применима к любой непространственноподобной кривой в $(M, g_1)$, исходящей из произвольной точки в $\{t_k\} \times V_k(y_0)$, при условии, что $g_1 \in U_1$ достаточно близка к $g$ на $U_k$.

Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — заданная адаптированная координатная система в адаптированной нормальной окрестности $U_k$. Ввиду условия (2) определения 6.8 можно найти $\delta_1 > 0$, такое, что из $\| g - g_1 \|_{0,\, U_k} < \delta_1$ вытекает, что соотношение $g_1 \prec g_0$ выполняется на $U_k$, где $g_0$ — лоренцева метрика на $U_k$, заданная в адаптированных локальных координатах посредством формулы $g_0 = -dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2$. Во-вторых, по соображениям компактности из того, что $C^0$-близкие метрики имеют близкие световые конусы, вытекает существование окрестности $V_k(y_0)$ точки $y_0$ в $H$ и постоянной $\delta_2 > 0$, таких, что если $g_1 \in \mathrm{Lor}(M)$ удовлетворяет неравенству $\| g - g_1 \|_{0,\, U_k} < \delta_2$, а $\gamma(t) = (t, \gamma_1(t))$ — любая направленная в будущее непространственноподобная кривая в $(M, g_1)$, у которой $\gamma(t_k) \in \{t_k\} \times V_k(y_0)$, то $\gamma(t) \in U_k$ для всех $t$, подчиненных условию $t_{k+1} \leqslant t \leqslant t_k$.

Остается доказать оценку длины (2). Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, 1/2)$. Предположим, что метрика $g' \in \mathrm{Lor}(M)$ удовлетворяет

неравенству $\| g' - g \|_{0, U_k} \leqslant \delta$, а $\gamma(t) = (t, \gamma_1(t))$ — произвольная непространственноподобная кривая в $(M, g')$ с условием $\gamma(t_k) \in \{t_k\} \times V_k(y_0)$, $\gamma$: $[t_{k+1}, t_k] \to M$. Обозначим через $L(\gamma)$ длину кривой $\gamma$ в $(M, g')$. Таким образом,

$$L(\gamma) = \int_{t_{k+1}}^{t_k} \sqrt{\sum_{i, j} - g'_{ij}(\gamma(t))\, \gamma'_i(t)\, \gamma'_j(t)\, dt}.$$

В силу определения 6.8 и выбора $\delta'$ имеем $|g'_{ij}| \leqslant (1 + 1/2) + 1/2 = 2$ и $|\gamma'_i(t)| \leqslant \sqrt{3}$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Поэтому $L(\gamma) \leqslant \int_{t_{k+1}}^{t_k} \sqrt{2n^2 (\sqrt{3})^2}\, dt = \sqrt{6} n (t_k - t_{k+1})$, как и требовалось. □

Предполагая теперь, что риманов сомножитель $(H, h)$ лоренцева искривленного произведения однороден, распространим утверждение леммы 6.12 с $U_k$ до $[t_{k+1}, t_k] \times H$. Будем использовать обозначение $| g_1 - g |_0 < \delta$, определенное в разд. 2.2.

**Лемма 6.13.** *Пусть* $(M, g)$ — *лоренцево искривленное произведение с однородным* $(H, h)$, *и пусть* $\{U_k\}$, $\{t_k\}$ — *допустимая цепь для* $c(t) = (t, y_0)$, $c$: $(a, \omega_0] \to M$. *Если для каждого* $k$ *существует непрерывная функция* $\delta_k$: $[t_{k+1}, t_k] \times H \to (0, \infty)$, *такая, что для метрики* $g_1 \in \mathrm{Lor}(M)$, *удовлетворяющей условию* $| g - g_1 |_0 < \delta_k$ *на* $[t_{k+1}, t_k] \times H$, *любая непространственноподобная кривая* $\gamma(t) = (t, \gamma_1(t))$, $\gamma$: $[t_{k+1}, t_k] \to (M, g_1)$, *соединяющая произвольную точку из* $\{t_{k+1}\} \times H$ *с произвольной точкой из* $\{t_k\} \times H$, *имеет длину не больше* $\sqrt{6} n (t_k - t_{k+1})$.

*Доказательство.* Зафиксируем произвольное $k > 0$. Пусть $\delta > 0$ — постоянная из леммы 6.12, такая, что если $g_1 \in \mathrm{Lor}(M)$ удовлетворяет неравенству $\| g_1 - g \|_{0, U_k} < \delta$, то любая непространственноподобная кривая $\gamma(t) = (t, \gamma_1(t))$ в $(M, g_1)$ с условием $\gamma(t_k) \in \{t_k\} \times V_k(y_0)$ остается в $U_k$ для всех $t$, подчиненных условию $t_{k+1} \leqslant t \leqslant t_k$, и имеет длину не больше $\sqrt{6} n (t_k - t_{k+1})$. Пусть далее $(x_1, \ldots, x_n)$ — заданные координаты, приспособленные для $U_k$.

В группе $I(H)$ можно найти изометрии $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$, такие, что если $y_i = \varphi_i(y_0)$ и $V_k(y_i) = \varphi_i(V_k(y_0))$, то множества $\{V_k(y_i)\}_{i=1}^{\infty}$ вместе с $V_k(y_0)$ образуют локально конечное покрытие $H$. Пусть $\Phi_i$: $M \to M$ — изометрия, заданная посредством правила $\Phi_i(t, h) = (t, \varphi_i(h))$. Положим $\tilde{U}_i = \Phi_i(U_k)$ для каждого $i$. Тогда множества $\{\tilde{U}_i\}$ покрывают $[t_{k+1}, t_k] \times H$, а $(x_1, x_2 \circ \Phi_i^{-1}, \ldots, x_n \circ \Phi_i^{-1})$ являются адаптированными локальными координатами для $\tilde{U}_i$, $i$ любое. Так как все строится при помощи изометрий, то постоянная $\delta > 0$, которая работает в лемме 6.12

для $U_k$ и $c(t) = (t, y_0)$, одинаково хорошо работает для каждого $\tilde{U}_i$ и $\Phi_i \circ c$ при условии, что для $\tilde{U}_i$ используются адаптированные координаты $(x_1, x_2 \circ \Phi_i^{-1}, \ldots, x_n \circ \Phi_i^{-1})$. Если $\delta_k$: $[t_{k+1}, t_k] \times H \to M$ — произвольная непрерывная функция, для которой из неравенства $\| g_1 - g \|_0 < \delta_k$ на $[t_{k+1}, t_k] \times H$ вытекает, что $\| g_1 - g \|_{0, \tilde{U}_i} < \delta$ для каждого $i$, то утверждение леммы немедленно следует из леммы 6.12. □

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы доказать $C^0$-устойчивость времениподобной геодезической неполноты для лоренцевых искривленных произведений $M = (a, b) \times_f H$, где $a > -\infty$ и $(H, \mathrm{h})$ однородно.

**Теорема 6.14.** *Пусть пространство-время* $(M, g)$ *представляет собой искривленное лоренцево произведение* $M = (a, b) \times {}_f H$, *где* $a > -\infty$, $g = -dt^2 \oplus f\mathrm{h}$ *и* $(H, \mathrm{h})$ — *однородное риманово многообразие. Тогда существует* $C^0$*-окрестность* $U(g)$ *метрики* $g$ *в пространстве* $\mathrm{Lor}(M)$ *всех глобально гиперболических метрик, такая, что для каждой метрики* $g_1 \in U(g)$ *все времениподобные геодезические в* $(M, g_1)$ *неполны в прошлом.*

*Доказательство.* Зафиксируем произвольную точку $y_0 \in M$. Пусть $c$: $(a, \omega_0] \to M$ — непродолжаемая в прошлое и направленная в будущее геодезическая, задаваемая по правилу $c(t) = (t, y_0)$. Пусть $\{U_k\}$, $\{t_k\}$ — допустимая цепь для $c$, существование которой гарантируется леммой 6.11. Выберем для каждого $t_k$ в соответствии с леммой 6.13 $\delta_k$: $[t_{k+1}, t_k] \times H \to (0, \infty)$. Пусть $\delta$: $M \to (0, \infty)$ — непрерывная функция, у которой $\delta(p) \leqslant \delta_k(q)$ для всех $q \in [t_{k+1}, t_k] \times H$ и любого $k > 0$. Положим $V_1(g) = \{g_1 \in \mathrm{Lor}(M); \ | g_1 - g |_0 < \delta\}$. Вследствие того что глобальная гиперболичность является $C^0$-открытым условием, можно также предполагать, что все метрики в $V_1(g)$ глобально гиперболические.

Согласно изложенному в первом абзаце доказательства леммы 6.12, можно выбрать $C^0$-окрестность $V_2(g)$ метрики $g$ в $\mathrm{Lor}(M)$ так, что для всех $g_1 \in V_2(g)$ каждая гиперповерхность $\{t\} \times H$, $t \in (a, b)$, пространственноподобна в $(M, g_1)$. Тогда каждую непространственноподобную кривую $\gamma$: $(\alpha, \beta) \to (M, g_1)$ путем перепараметризации можно привести к следующему виду: $\gamma(t) = (t, \gamma_1(t))$. Вследствие того, что лемма 6.12 применима ко всем непродолжаемым непространственноподобным геодезическим в $(M, g_1)$, получаем, что $g_1 \in V_2(g)$.

Рассмотрим теперь $C^0$-окрестность $U(g) = V_1(g) \cap V_2(g)$ метрики $g$ в $C^0$-топологии. Пусть $g_1 \in U(g)$, а $\gamma$: $(\alpha, \beta) \to (M, g_1)$ — произвольная направленная в будущее непродолжаемая времениподобная геодезическая. Используя рассуждения Герока (1970,

с. 448), можно считать, что $\{t_1\} \times H$ — поверхность Коши для $(M, g_1)$, и, значит, существует $s_0 \in (\alpha, \beta)$, для которого $\gamma(s_0) \in \{t_1\} \times H$. При переходе от $\{t_{k+1}\} \times H$ к $\{t_k\} \times H$ $g_1$-длина кривой $\gamma$, согласно лемме 6.13, не больше $\sqrt{6}n\,(t_k - t_{k+1})$ для каждого $k$. Складывая эти оценки, получаем, что $g_1$-длина $\gamma|(\alpha, s_0]$ не больше $\sqrt{6}n\,(t_1 - a)$. Поскольку $\gamma \mid [\alpha, s_0]$ — непродолжаемая в будущее времениподобная геодезическая конечной $g_1$-длины, кривая $\gamma$ неполна в прошлом в $(M, g_1)$. $\square$

Вследствие того что риманов сомножитель $(H, \mathrm{h})$ пространства Робертсона—Уокера однороден, мы получаем приводимое ниже следствие из теоремы 6.14, которое для времениподобных геодезических утвердительно решает вопрос, поднятый Лернером (1973, с. 35).

**Теорема 6.15.** *Пусть* $(M, g)$ — *пространство-время Робертсона—Уокера,* $M = (a, b) \times_f H$, $a > -\infty$. *Тогда существует* $C^0$*-окрестность* $U(g)$ *метрики* $g$ *в пространстве глобально гиперболических метрик* $\mathrm{Lor}(M)$, *такая, что все времениподобные геодезические в* $(M, g_1)$ *неполны в прошлом для каждой* $g_1 \in U(g)$.

Если изменить временную функцию на $(M, g)$ на другую $\pi_1$: $M \to \mathbb{R}$, где $\pi_1(t, h) = -t$, и применить к полученному при этом пространству-времени леммы 6.12 и 6.13, то получится точный аналог этих лемм для направленной в будущее времениподобной геодезической $c$: $[\omega_0, b) \to (M, g)$, задаваемой в этом пространстве-времени посредством соотношения $c(t) = (t, y_0)$. Отсюда следует, что если $(M, g)$ — искривленное лоренцево произведение $M = (a, b) \times_f H$ с однородным сомножителем $(H, \mathrm{h})$ и $b < \infty$, то то же самое доказательство, что и в теореме 6.14, устанавливает $C^0$-устойчивость времениподобной геодезической неполноты в будущем. Объединяя это замечание с теоремой 6.14, получим следующий результат.

**Теорема 6.16.** *Пусть* $(M, g)$ — *лоренцево искривленное произведение* $M = (a, b) \times_f H$, $g = -dt^2 \oplus f\mathrm{h}$, *где* $a$ *и* $b$ *конечны, а* $(H, \mathrm{h})$ *однородно. Тогда существует* $C^0$*-окрестность* $U(g)$ *метрики* $g$ *в пространстве глобально гиперболических метрик* $\mathrm{Lor}(M)$, *такая, что все времениподобные геодезические в* $(M, g_1)$ *для любой* $g_1 \in U(g)$ *являются неполными как в прошлом, так и в будущем.*

Интересно отметить, что, в то время как конечность $a$ и $b$ существенно используется при доказательстве теоремы 6.16, оно не зависит от конкретного выбора искривляющей функции $f$: $(a, b) \to (0, \infty)$; существенно используя однородность риманова сомножителя $(H, \mathrm{h})$, доказательство теоремы 6.16 ни на какие другие геометрические и топологические свойства не опирается.

В общей теории относительности и в космологии рассматриваются замкнутые модели большого взрыва (см. Хокинг и Эллис (1977, разд. 5.3)). Эти модели представляют собой пространства Робертсона—Уокера, у которых $b - a < \infty$ и $H$ компактно. Из этого можно заключить, что в теореме 6.16 доказывается, в частности, $C^0$-устойчивость времениподобной геодезической неполноты этих моделей.

Обратимся теперь к доказательству $C^1$-устойчивости изотропной геодезической неполноты для пространств Робертсона—Уокера. Взяв $M = (0, 1) \times_f R$ с искривляющей функцией $f(t) = (2t)^{-2}$ и метрикой $\bar{g} = -dt^2 \oplus f dx^2$, можно непосредственно убедиться, используя результаты разд. 2.6, в том, что кривая $\gamma$: $(-\infty, 0) \to (M, \bar{g})$, задаваемая правилом $\gamma(t) = (e^t, e^{2t})$, является полной в прошлом изотропной геодезической. Поэтому подходящим выбором искривляющей функции можно построить пространства Робертсона—Уокера с $a > -\infty$, которые являются изотропно геодезически полными в прошлом. Таким образом, в отличие от доказательства устойчивости времениподобной геодезической неполноты здесь необходимо предполагать, что $(M, g)$ содержит неполную в прошлом (соответственно неполную и в прошлом, и в будущем) изотропную геодезическую для того, чтобы получить изотропный аналог теоремы 6.15 (соответственно теоремы 6.16). Неудивительно, что доказательство $C^1$-устойчивости изотропной геодезической неполноты является более сложным, чем для времениподобного случая; это происходит вследствие того, что для доказательства изотропной неполноты необходимо вместо лоренцевой длины дуги использовать аффинные параметры. Для доказательства леммы 6.18 также необходимы как изотропность, так и однородность $(H, h)$. Поэтому в оставшейся части этого раздела мы будем предполагать, что $M = (a, b) \times_f H$ — пространство-время Робертсона—Уокера.

Пусть $(V, x_1, \ldots, x_n)$ — адаптированная нормальная окрестность многообразия $(M, g)$ с адаптированными координатами $(x_1, \ldots, x_n)$. Для доказательства леммы 6.18 необходимо определить расстояние между компактными подмножествами, составленными из изотропных для различных лоренцевых метрик на $M$ векторов и приложенных в различных точках $V$. Напомним (из разд. 6.2), что локальные координаты $(x_1, \ldots, x_n)$ на $V$ можно поднимать до локальных координат $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots \ldots, x_{2n})$ на $TV = TM \mid_V$. Таким образом, для любых $q \in V$, $g_1 \in \operatorname{Lor}(M)$ и $\alpha > 0$ можно определить

$$S(q, \alpha, g_1) = \{v \in T_qM: g_1(v, v) = 0 \text{ и } x_{n+1}(v) = -\alpha\}.$$

Множество $S(q, \alpha, g_1)$ является компактным подмножеством пространства $T_q M$ для любых $\alpha > 0$ и $g_1 \in \operatorname{Lor}(M)$. Пусть $p$, $q \in Y$, $g_1$, $g_2 \in \operatorname{Lor}(M)$ и $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ заданы. *Хаусдорфово*

*расстояние* между $S(p, \alpha_1, g_1)$ и $S(q, \alpha_2, g_2)$ определим посредством следующей формулы:

$$\operatorname{dist}(S(p, \alpha_1, g_1), S(q, \alpha_2, g_2)) =$$

$$= \sup_w \inf_v \left\{ \left( \sum_{i=1}^{2n} [x_i(v) - x_i(w)]^2 \right)^{1/2} : v \in S(p, \alpha_1, g_1), \ \ w \in S(q, \alpha_2, g_2) \right\}.$$

Непрерывность компонент метрического тензора $g$ как функций $g_{ij}\colon V \times V \to \mathbb{R}$ и замкнутость световых конусов для лоренцевых метрик, близких в $C^0$-топологии, обеспечивают непрерывность этого расстояния по $p$, $\alpha$ и $g$ (см. Буземан (1962, с. 25)).

**Лемма 6.17.** *Пусть $V$ — адаптированная нормальная окрестность, адаптированная в точке $p \in (M, g)$. Для заданных $\alpha > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что из условий $\| p - q \|_2 < \delta$, $\| g_1 - g \|_{0,V} < \delta$, $g_1 \in \mathrm{Lor}(M)$ и $|\alpha_1 - \alpha| < \delta$ вытекает,* что $\operatorname{dist}(S(q, \alpha_1, g_1), S(p, \alpha, g)) < \varepsilon$.

Пусть теперь $(M, g)$ — пространство-время Робертсона—Уокера $(a, b) \times_f H$, изотропно неполное в прошлом. Тем самым некоторая направленная в будущее непродолжаемая в прошлое изотропная геодезическая $c\colon [0, A) \to (M, g)$ неполна в прошлом (т. е. $A < \infty$). Из того, что $(H, h)$ изотропно и пространственно однородно, а изометрии переводят геодезические в геодезические, вытекает, что все изотропные геодезические неполны в прошлом. Зафиксируем эту непродолжаемую в прошлое неполную в прошлом изотропную геодезическую $c\colon [0, A) \to (M, g)$ с заданной параметризацией до конца доказательства теоремы 6.19.

Пусть $(\omega_0, y_0) = c(0) \in M = (a, b) \times H$. Применим лемму 6.11 к направленной в будущее времениподобной геодезической $t \to (t, y_0)$, $t \leqslant \omega_0$, и построим для нее допустимую цепь $\{U_k\}$, $\{t_k\}$. При помощи выбранных $\{t_k\}$ можно найти $s_k$ так, что $0 = s_1 < s_2 < \ldots < s_k < \ldots < A$ и $c(s_k) \in \{t_k\} \times H$ для каждого $k$. Положим $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$. Как и выше, пусть $x_1\colon M \to \mathbb{R}$ — отображение проектирования на первый сомножитель многообразия $M = (a, b) \times_f H$: $x_1(t, h) = t$. Заметим, что если $(V, x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная адаптированная координатная карта, то координатная функция $x_1\colon V \to \mathbb{R}$ совпадает с этим отображением проектирования. Если $\gamma$ — произвольная гладкая кривая из $M$, пересекающая каждую гиперповерхность $\{t\} \times H \subset M$ ровно один раз, и $\gamma(s) \in \{t\} \times H$, то будем говорить, что величина $|(x_1 \circ \gamma)'(s)|$ является $x_1$-скоростью кривой $\gamma$ в $\{t\} \times H$. В частности, $x_1$-скорость фиксированной изотропной геодезической $c\colon [0, A) \to (M, g)$ в $\{t_k\} \times H$ будем обозначать через $\alpha_k = |(x_1 \circ c)'(s_k)|$ для каждого $k$.

**Лемма 6.18.** *Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Тогда для каждого $k > 0$ существует непрерывная функция $\delta_k$: $[t_{k+1}, t_k] \times H \to (0, \infty)$ со следующими свойствами. Пусть $g_1 \in \mathrm{Lor}(M)$ такая, что на $[t_{k+1}, t_k] \times H$ выполняется оценка $|g_1 - g|_1 < \delta_k$, и пусть $\gamma$: $[0, B) \to M$ — произвольная направленная в прошлое изотропная геодезическая, у которой $\gamma(0) \in \{t_k\} \times H$, и $x_1$-скорость $\{t_k\} \times \times H$ равна $\alpha_k$. Тогда $\gamma$ достигает $\{t_{k+1}\} \times H$ при возрастании аффинного параметра самое большее на $2\Delta s_k$, и более того, $x_1$-скорость кривой $\gamma$ в $\{t_{k+1}\} \times H$ удовлетворяет оценке*

$$1 - \varepsilon < \left|\frac{\theta}{\alpha_{k+1}}\right| < 1 + \varepsilon.$$

*Доказательство.* Пусть $c$: $[0, A) \to (M, g)$ — заданная выше неполная в прошлом изотропная геодезическая. Фиксируем $k > > 0$. Из пространственной однородности пространств Робертсона—Уокера следует, что существует изометрия $\varphi \in I(H)$, для которой $\psi = \mathrm{id} \times \varphi \in I\ (M, g)$ удовлетворяет условию $\psi(c(s_k)) = (t_k, y_0)$, где $y_0$ определено выше. Ввиду того что $k$ в ходе доказательства предполагается фиксированным, можно, не опасаясь путаницы, положить $p = (t_k, y_0)$. Пусть $c_1(s) = \psi \circ \circ c(s + s_k)$. Тогда $c_1$ — непродолжаемая в прошлое неполная в прошлом изотропная геодезическая из $(M, g)$, для которой $c_1(0) \in \{t_k\} \times H$, $c_1(\Delta s_k) \in \{t_{k+1}\} \times H$ и $c_1(s) = \exp_p[g](sv)$, где $v = \psi_*(c'(s_k))$. Выберем $b > 0$ так, чтобы $\Delta s_k < b < 2\Delta s_k$ и $c_1(s) \in U_k$ для всех $s$, подчиненных условию $0 \leqslant s \leqslant b$. Ввиду того что $b > \Delta s_k$, для некоторого $t < t_{k+1}$ имеем $c_1(b) \in \{t\} \times H$. Отсюда $(x_1 \circ c_1)(\Delta s_k) - (x_1 \circ c_1)(b) = t_{k+1} - t > 0$. Положим $\varepsilon_1 = = \min\{\varepsilon, t_{k+1} - (x_1 \circ c_1)(b)\} > 0$.

Пусть теперь $g_1 \in \mathrm{Lor}(M)$ и $q \in U_k \cap (\{t_k\} \times H)$. Предположим, что $\gamma$: $[0, B) \to (M, g_1)$ — произвольная направленная в будущее непродолжаемая в будущее изотропная $g_1$-геодезическая, у которой $\gamma(0) = q$, а $x_1$-скорость в $q$ равна $\alpha_k$. Тогда $w = = \gamma'(0) \in T_q M$ удовлетворяет следующим соотношениям: $g_1(w, w) = 0$ и $x_{n+1}(w) < 0$. Более того, $\gamma(s) = \exp_q[g_1](sw)$. Применяя к $c_1$ и $c_2 = \gamma$ леммы 6.6 и 6.7 с постоянной $\varepsilon_1$ (определенной, как указано выше), можно найти постоянную $\delta_0$, $0 < < \delta_0 < \Delta s_k$, так, что из $\|v - w\|_2 < \delta_0$, $\|g_1 - g\|_{1, U_k} < \delta_0$ и $|s_0 - \Delta s_k| < \delta_0$ вытекают соотношения

$$|(x_1 \circ c_1)(s) - (x_1 \circ c_2)(s)| < \varepsilon_1 \leqslant t_{k+1} - (x_1 \circ c_1)(b) \tag{1}$$

для всех $s$, $0 \leqslant s \leqslant b$,

$$1 - \varepsilon_1 < \left|\frac{(x_1 \circ c_2)'(s_0)}{(x_1 \circ c_1)'(\Delta s_k)}\right| < 1 + \varepsilon_1. \tag{2}$$

Полагая в неравенстве (1) $s = b$, получаем, что $|(x_1 \circ c_1)(b) - - (x_1 \circ c_2)(b)| < t_{k+1} - (x_1 \circ c_1)(b)$, откуда следует, что $(x_1 \circ c_2)(b) <$

$< t_{k+1}$. Значит, найдется $s'$, $0 < s' < b$, такая, что $(x_1 \circ c_2)(s') = t_{k+1}$. Но тогда $s' < b < 2\Delta s_k$. Последнее неравенство показывает, что аффинный параметр для $c_2$ при переходе от $\{t_k\} \times H$ к $\{t_{k+1}\} \times H$ возрастает меньше, чем $2\Delta s_k$, при условии, что $\delta_0$ выбрано так, как указано выше.

Для произвольной геодезической $c_2(s) = \exp[g_1](sw)$, где $g_1$ и $w$ $\delta_0$-близки к $g$ и $v$ (как и выше), обозначим через $s'$ значение аффинного параметра $s$ для $c_2$, такое, что $(x_1 \circ c_2)(s') = t_{k+1}$. Согласно лемме 6.6, при $\delta_0 \to 0$ соответствующее значение $s'$ стремится к $\Delta s_k$. Таким образом, в силу непрерывной зависимости от параметра можно выбрать $\delta_1$, $0 < \delta_1 < \delta_0$, так, чтобы для любой геодезической $c_2(s) = \exp[g_1](sw)$, у которой $g_1$ и $w$ $\delta_1$-близки к $g$ и $v$ соответственно, выполнялось равенство $(x_1 \circ c_2)(s') = t_{k+1}$, где $s' \in [\Delta s_k - \delta_0, \Delta s_k + \delta_0]$. Отсюда, применяя оценку (2) при $s_0 = s'$, что возможно ввиду неравенства $\delta_1 < \delta_0$, получаем

$$1 - \varepsilon < \left| \frac{(x_1 \circ c_2)'(s')}{(x_1 \circ c_1)'(\Delta s_k)} \right| = \left| \frac{\theta}{\alpha_{k+1}} \right| < 1 + \varepsilon. \tag{6.4}$$

Теперь нам нужно распространить эти оценки с окрестности $v \in T_pM$ на окрестность $S(p, \alpha_k, g)$. Заметим для этого, что так как $M = (a, b) \times_f H$ — искривленное произведение одномерного сомножителя $(a, b)$ и $H$ с $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, то группа $I(H)$ действует на $S(p, \alpha_k, g)$ транзитивно. Поэтому для любого заданного $z \in S(p, \alpha_k, g)$ можно применить предыдущие рассуждения, используя *ту же самую* допустимую цепь $\{U_k\}$, $\{t_k\}$ для того, чтобы найти постоянную $\delta_1(z) > 0$, такую, что если $w \in TM$ удовлетворяет условию $\|w - z\|_2 < \delta_1(z)$, $\gamma(w) \in U_k \cap (\{t_k\} \times H)$, $\|g_1 - g\|_{1, U_k} < \delta_1(z)$ и $c_2(s) = \exp[g_1] \times (sw)$ имеет в $\{t_k\} \times H$ $x_1$-скорость, равную $\alpha_k$, то $c_2$ при переходе от $\{t_k\} \times H$ к $\{t_{k+1}\} \times H$ имеет прирост аффинного параметра не больше, чем на $2\Delta s_k$, и подчиняется оценке (6.4). Используя компактность $S(p, \alpha_k, g)$, можно выбрать изотропные векторы $v_1, \ldots, v_j \in S(p, \alpha_k, g)$ так, чтобы множества $\{w \in S(p, \alpha_k, g)\colon \|w - v_m\|_2 < \delta_1(v_m)$, где $m = 1, \ldots, j\}$ покрывали $S(p, \alpha_k, g)$. Положим $\delta_2 = \min\{\delta(v_m)\colon 1 \leqslant m \leqslant j\}$. Согласно лемме 6.17, существует постоянная $\delta_3$, $0 < \delta_3 < \delta_2$, для которой из неравенств $\|p - q\|_2 < \delta_3$, $\|g_1 - g\|_{1, U_k} < \delta_3$, $w \in S(p, \alpha_k, g)$ вытекает, что $\|w - v_m\|_2 < \delta_1(v_m)$ для некоторого $m$. Отсюда вытекают следующие свойства $\delta_3$. Если $\gamma\colon [0, B) \to (M, g_1)$ — произвольная непродолжаемая в прошлое направленная в прошлое изотропная геодезическая из $(M, g_1)$, для которой $\|g_1 - g\|_{1, U_k} < \delta_3$, $\gamma(0) \in (\{t_k\} \times H) \cap \{g \in U_k\colon \|p - q\|_2 < \delta_3\}$, где $p = (t_k, y_0)$, и которая имеет в $\gamma(0)$ $x_1$-скорость $\alpha_k$, то к $\gamma$ применимы заключения теоремы 6.16. Ввиду того что $I(H)$ действует на $H$ транзитивно, этот результат можно распространить с $(\{t_k\} \times H) \cap$

$\cap \{q \in U_k\colon \|p - q\|_2 < \delta_3\}$ на все $\{t_k\} \times H$ в точности так же, как и в доказательстве леммы 6.13. В частности, функции $\delta_k$: $[t_{k+1}, t_k] \times H \to (0, \infty)$ можно построить именно так, как в лемме 6.13. □

Доказав лемму 6.18, мы теперь готовы к тому, чтобы доказать $C^1$-устойчивость изотропной геодезической неполноты в прошлом для пространств Робертсона—Уокера. Вследствие изотропности и пространственной однородности пространств Робертсона—Уокера неполнота в прошлом одной непродолжаемой изотропной геодезической влечет за собой неполноту в прошлом всех изотропных геодезических. Таким образом, теорему устойчивости можно сформулировать следующим образом.

**Теорема 6.19.** *Пусть $(M, g)$ — пространство-время Робертсона—Уокера, содержащее непродолжаемую изотропную геодезическую, которая неполна в прошлом. Тогда существует $C^1$-окрестность $U(g)$ метрики $g$ в пространстве глобально гиперболических метрик $\operatorname{Lor}(M)$, такая, что все изотропные геодезические на $(M, g_1)$ неполны в прошлом для каждой $g_1 \in U(g)$.*

*Доказательство.* Пусть $M = (a, b) \times_f H$ и $c\colon [0, A] \to (M, g)$ — заданная непродолжаемая неполная в прошлом изотропная геодезическая. Положив $\omega_0 = x_1(c(0))$, будем считать $\{U_k\}$, $\{t_k\}$, $\{s_k\}$ и $\{\alpha_k\}$ выбранными, как и в абзаце, предшествующем лемме 6.18. Пусть $\{\beta_k\}$ — последовательность вещественных чисел, у которой $0 < \beta_k < 1$ для каждого $k$ и $1/2 < \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \beta_k) < 1$. Тогда для каждого $m \geqslant 1$ имеем

$$1 < \prod_{k=1}^{m} (1 - \beta_k)^{-1} < 2. \tag{6.5}$$

Применяя лемму 6.18 для каждого $k \geqslant 1$ с $\varepsilon = \beta_k$, получаем непрерывную функцию $\delta_k$: $[t_{k+1}, t_k] \times H \to (0, \infty)$, свойства которой описаны в лемме 6.18. Выберем непрерывную функцию $\delta$: $M \to (0, \infty)$ так, чтобы для произвольной точки $q \in M$, лежащей в области определения $\delta_k$, выполнялось неравенство $\delta(q) < \delta_k(q)$. Положим $U_1(g) = \{g_1 \in \operatorname{Lor} M\colon |g_1 - g|_1 < \delta\}$ и выберем $C^1$-открытую окрестность $U_2(g)$ метрики $g$ в $\operatorname{Lor}(M)$ так, чтобы все метрики из $U_2(g)$ были глобально гиперболическими, и так, чтобы каждая гиперповерхность $\{t\} \times H$ была пространственноподобной в $(M, g_1)$ для всех $t \in (a, b)$ и любой $g_1 \in U_2(g)$ (см. лемму 6.12). Положим $U(g) = U_1(g) \cap U_2(g)$.

Допустим теперь, что $g_1 \in U(g)$ и $\gamma$: $[0, B) \to M$ — произвольная направленная в будущее и непродолжаемая в будущее изотропная геодезическая в $(M, g_1)$. Перепараметризуя $\gamma$, если это необходимо, можно предполагать, что $x_1(\gamma(0)) = t_k$ для некоторого $k \geqslant 1$ и что $\gamma$ имеет в $\{t_k\} \times H$ $x_1$-скорость, равную $\alpha_k$. Сог-

ласно лемме 6.18, при переходе от $\{t_k\} \times H$ к $\{t_{k+1}\} \times H$ аффинный параметр у $\gamma$ изменяется самое большее на $2\Delta s_k$. Чтобы применить лемму 6.18 к $\gamma$, когда $\gamma$ переходит от $\{t_{k+1}\} \times H$ к $\{t_{k+2}\} \times \times H$, может оказаться необходимым перепараметризовать $\gamma$ в $\{t_{k+1}\} \times H$ так, чтобы она имела в $\{t_{k+1}\} \times H$ $x_1$-скорость, равную $\alpha_{k+1}$. Тем не менее, если обозначить через $\theta_{k+1}$ $x_1$-скорость $\gamma$ в $\{t_{k+1}\} \times H$, то из леммы 6.18 получаем, что $1 - \beta_k < < |\theta_{k+1}/\alpha_{k+1}| < 1 + \beta_k$. Тем самым $x_1$-скорость $\gamma$ в $\{t_{k+1}\} \times H$ не может быть меньше $(1 - \beta_k)\,\alpha_{k+1}$. Значит, аффинный параметр кривой $\gamma$ при переходе от $\{t_{k+1}\} \times H$ к $\{t_{k+2}\} \times H$ возрастает самое большее на $2\,(1 - \beta_k)^{-1}\,\Delta s_{k+1}$. Рассуждая по индукции, можно убедиться в том, что при переходе от $\{t_{k+l}\} \times H$ к $\{t_{k+l+1}\} \times \times H$ аффинный параметр кривой $\gamma$ возрастает самое большее на $2\Delta s_{k+1}\prod_{i=0}^{l-1}(1 - \beta_{k+i})^{-1}$. Применяя неравенство (6.5), получаем, что при переходе от $\{t_{k+l}\} \times H$ к $\{t_{k+l+1}\} \times H$ аффинный параметр $\gamma$ возрастает самое большее на $4\Delta s_{k+l}$. Из того, что $\sum_{k=1}^{\infty}\Delta s_k = A$, вытекает, что полная аффинная длина $B$ кривой $\gamma$ меньше $4A$. Но так как $4A < \infty$, то это означает, что $\gamma$ неполна в прошлом, что и требовалось доказать. □

Обращая ориентацию во времени, можно получить аналог теоремы 6.19 для пространств Робертсона—Уокера, имеющих неполные в будущем изотропные геодезические. Таким образом, теорема 6.19 приводит к следующему результату.

**Теорема 6.20.** *Пусть* $(M, g)$ — *пространство-время Робертсона—Уокера, содержащее непродолжаемую изотропную геодезическую, которая одновременно неполна и в прошлом, и в будущем. Тогда существует $C^1$-окрестность* $U(g)$ *метрики* $g$ *в пространстве глобально гиперболических метрик* $\mathrm{Lor}(M)$, *такая, что все изотропные геодезические в* $(M, g_1)$ *являются неполными и в прошлом, и в будущем для каждой метрики* $g_1 \in U(g)$.

Сформулируем теперь две теоремы устойчивости для непространственноподобной геодезической неполноты, объединив теоремы 6.15 и 6.19 и соответственно теоремы 6.16 и 6.20. Первая из этих теорем применима ко всем моделям большого взрыва, а вторая — к замкнутым моделям большого взрыва.

**Теорема 6.21.** *Пусть* $(M, g)$ — *пространство-время Робертсона—Уокера вида* $(a, b) \times_f H$, *где* $a > -\infty$. *Предположим, что* $(M, g)$ *содержит неполную в прошлом и непродолжаемую в прошлое изотропную геодезическую. Тогда найдется $C^1$-окрестность* $U(g)$ *метрики* $g$ *в пространстве глобально гиперболических метрик* $\mathrm{Lor}(M)$, *такая, что все непространственноподобные геодезические в* $(M, g_1)$ *неполны в прошлом для каждой метрики* $g_1 \in U(g)$.

**Теорема 6.22.** *Пусть* $(M, g)$ — *пространство-время Робертсона—Уокера вида* $(a, b) \times_f H$, *где и* $a$ *и* $b$ *конечны. Предположим, что* $(M, g)$ *содержит непродолжаемую изотропную геодезическую, которая одновременно неполна и в прошлом, и в будущем. Тогда существует* $C^1$-*окрестность* $U(g)$ *метрики* $g$ *в пространстве глобально гиперболических метрик* $\mathrm{Lor}(M)$, *такая, что все непространственноподобные геодезические из* $(M, g_1)$ *одновременно неполны и в прошлом, и в будущем для каждой метрики* $g_1$ *из* $U(g)$.

Глава 7

# МАКСИМАЛЬНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ И ПРИЧИННО РАЗДЕЛЯЕМЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫ́Е МНОГООБРАЗИЯ

Многие основные свойства полных некомпактных римановых многообразий выводятся из того принципа, что предельная кривая последовательности минимальных геодезических сама является минимальной геодезической. После того как Хопфом и Риновым (1931) было дано корректное определение полноты, Ринову (1932) и Майерсу (1935) удалось доказать, используя этот принцип, что из каждой точки полного некомпактного риманова многообразия исходит геодезический луч. Здесь под *лучом* понимается геодезическая $\gamma$: $[0, \infty) \to (N, g_0)$, реализующая риманово расстояние между любой парой своих точек. Ринов и Майерс построили требуемый геодезический луч следующим образом. В силу полноты и некомпактности $(N, g_0)$ существует бесконечная последовательность $\{p_n\}$ точек в $N$, такая, что для любой точки $p \in N$ $d_0(p, p_n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Пусть $\gamma_n$ — минимальный (т. е. реализующий расстояние) нормальный геодезический сегмент с концами $p = \gamma_n(0)$ и $p_n$. Этот сегмент существует в силу полноты $(N, g_0)$. Если $v \in T_pN$ — любая точка накопления последовательности $\{\gamma_n'(0)\}$ единичных касательных векторов в пространстве $T_pN$, то $\gamma(t) = \exp_p tv$ — требуемый геодезический луч. То, что $\gamma$ является лучом, интуитивно ясно вследствие того, что $\gamma$ представляет собой предельную кривую для некоторой подпоследовательности минимальных геодезических сегментов $\{\gamma_m\}$. Существование геодезических лучей, проходящих через каждую точку, является важным инструментом в недавно построенной теории структуры полных некомпактных римановых многообразий как положительной (см. Чигер и Громол (1971, 1972)), так и отрицательной (см. Эберлейн и О'Нейл (1973)) кривизны.

Вторым приложением этого основного принципа построения геодезических как пределов минимальных геодезических сегментов является конкретная геометрическая реализация для полных римановых многообразий теории бесконечно удаленных точек (концов) некомпактных хаусдорфовых топологических пространств (см. Кон-Фоссен (1959)). Бесконечная последовательность $\{p_n\}$ точек в многообразии называется *расходящейся к бесконечности*, если для произвольно заданного компактного множества $K$ лишь

конечное число членов этой последовательности может содержаться в $K$. Если полное риманово многообразие $(N, g_0)$ имеет больше чем одну бесконечно удаленную точку, то в $N$ существуют компактное подмножество $K$ и последовательности $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$, которые расходятся к бесконечности, так, что $0 < d_0(p_n, q_n) \to \infty$ и каждая кривая, идущая из $p_n$ в $q_n$, встречает $K$ для любого $n$. Пусть $\gamma_n$ — минимальный (т. е. реализующий расстояние) геодезический сегмент, соединяющий $p_n$ с $q_n$. Так как каждый сегмент $\gamma_n$ встречает $K$, то можно построить предельную геодезическую $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$, которая будет минимальной как предел последовательности минимальных кривых. Тогда «$\gamma(-\infty)$» соответствует бесконечно удаленной точке многообразия $N$, представленной последовательностью $\{p_n\}$, а «$\gamma(+\infty)$» — бесконечно удаленной точке $N$, представленной последовательностью $\{q_n\}$. В частности, полное риманово многообразие, имеющее более одной бесконечно удаленной точки, содержит прямую, т. е. геодезическую $\gamma$: $(-\infty, \infty) \to N$, которая реализует расстояние между любой парой своих точек.

Описанные римановы конструкции побуждают к изучению аналогичных теорем существования для геодезических лучей и прямых в сильно причинных пространственно-временны́х многообразиях. С точки зрения общей теории относительности желательно иметь конструкции, годные не только для глобально гиперболических подмножеств пространственно-временны́х многообразий, но также и для сильно причинных пространств. Однако если предполагать только сильную причинность, то в общем случае оказывается неверным утверждение о том, что причинно связанные точки можно соединить максимальным геодезическим сегментом. Поэтому для лоренцевых многообразий нужен чуть более слабый, чем для полных римановых многообразий принцип построения максимальных геодезических. Именно в сильно причинном пространстве-времени предельные кривые последовательностей «почти максимальных» кривых являются максимальными, а значит, и геодезическими. В разд. 7.1 мы приведем два способа построения семейств почти максимальных кривых, предельные кривые которых в сильно причинном пространстве-времени являются максимальными геодезическими. Сильная причинность нужна для того, чтобы обеспечить полунепрерывность сверху длины дуги в $C^0$-топологии на кривых, а также и возможность применения предложения 2.21. В разд. 7.2 мы применим эту конструкцию к доказательству существования направленных в прошлое и в будущее непространственноподобных геодезических лучей, исходящих из каждой точки сильно причинного пространства-времени.

В разд. 7.3 мы исследуем класс причинно разделяемых пространственно-временны́х многообразий. Будем говорить, что *компактное множество $K$ причинно разделяет* пространство-время,

если найдутся две бесконечные последовательности $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$, расходящиеся к бесконечности так, что $p_n \ll q_n$, $p_n \neq q_n$, и все непространственноподобные кривые, идущие из $p_n$ в $q_n$, встречают $K$ для каждого $n$. Пространство-время $(M, g)$, допускающее такой компакт $K$, причинно разделяющий две расходящиеся последовательности, называется *причинно разделяемым*. Из определения видно, что причинная разделяемость является глобальным конформным инвариантом класса $C(M, g)$. Далее, применяя принцип из разд. 7.1, мы показываем, что если сильно причинное пространство-время $(M, g)$ причинно разделяемо компактным множеством $K$, то $(M, g)$ содержит непространственноподобную геодезическую прямую $\gamma\colon (a, b) \to M$, которая пересекает $K$, т. е. $d(\gamma(s), \gamma(t)) = L(\gamma \mid [s, t])$ для всех $s$, $t$, подчиненных условию $a < s \leqslant t < b$. Этот результат, как будет видно в гл. 11, является существенным для доказательства теоремы сингулярности 6.3 в работе Бима и Эрлиха (1979а). Мы заключаем эту главу исследованием условий на глобальную геодезическую структуру заданного пространства-времени $(M, g)$, из которых вытекала бы причинная разделяемость $(M, g)$. В частности, мы покажем, что все двумерные глобально гиперболические пространственно-временные многообразия причинно разделяемы. Одно из этих условий и существование в сильно причинных пространственно-временных многообразиях причинно разделяемых непространственноподобных геодезических прямых влекут за собой также, что сильно причинное пространство-время, не содержащее направленных в будущее изотропных геодезических лучей, содержит времениподобную геодезическую прямую.

## 7.1. Почти максимальные кривые и максимальные геодезические

Цель этого раздела состоит в том, чтобы показать способ построения геодезических как пределов «почти максимальных» кривых в сильно причинных пространственно-временных многообразиях. В обеих конструкциях важную роль играют полунепрерывность сверху лоренцевой длины дуги в $C^0$-топологии на кривых для сильно причинных пространственно-временных многообразий и полунепрерывность снизу лоренцева расстояния. Сильная причинность $(M, g)$ является существенной, так как в этом случае сходимости в смысле предельной кривой и в $C^0$-топологии на кривых тесно связаны (см. предложение 2.21). Первую конструкцию можно применить к паре хронологически связанных точек $p$, $q$, для которых $d(p, q) < \infty$. Хотя этот подход и достаточен для доказательства существования непространственноподобных геодезических лучей в глобально гиперболических пространствах (см. Бим и Эрлих (1979в, теорема 4.2)), он

не годится для точек, расстояние между которыми бесконечно. В соответствии с этим для нужд разд. 7.2 и 7.3 мы приведем вторую конструкцию, которую можно использовать в произвольных сильно причинных пространственно-временны́х многообразиях.

Пусть $(M, g)$ — произвольное пространство-время. Предположим, что $p$ и $q$ — различные точки $M$, связанные условием $p \leqslant q$. Если $d(p, q) = 0$, то, взяв в качестве $\gamma$ направленную в будущее непространственноподобную кривую из $p$ в $q$, получим, что $L(\gamma) \leqslant d(p, q) = 0$. Отсюда $L(\gamma) = d(p, q)$, и, согласно теореме 3.13, $\gamma$ можно перепараметризовать в максимальный изотропный геодезический сегмент из $p$ в $q$. Поэтому предположим, что $p \ll q$, или, что равносильно, $d(p, q) > 0$. Если $d(p, q) < \infty$, то по определению 3.1 для любого $\varepsilon > 0$ существует направленная в будущее непространственноподобная кривая $\gamma$ из $p$ в $q$, удовлетворяющая условию

$$d(p, q) \geqslant L(\gamma) \geqslant d(p, q) - \varepsilon. \tag{7.1}$$

Конечно, неравенство (7.1) представляет собой единственно ограничение на $L(\gamma)$ при условии, что $\varepsilon < d(p, q)$. В этом случае мы будем называть $\gamma$ «почти максимальной» кривой.

Отметим следующее простое следствие обратного неравенства треугольника.

**Замечание 7.1.** Пусть $\gamma$: $[0, 1] \to M$ — направленная в будущее непространственноподобная кривая из $p$ в $q$, $p \neq q$, такая, что

$$d(p, q) - \varepsilon \leqslant L(\gamma) < \infty.$$

Тогда для любых $s$ и $t$ из отрезка $[0, 1]$, $s < t$, имеем

$$L(\gamma \mid [s, t]) \geqslant d(\gamma(s), \gamma(t)) - \varepsilon.$$

*Доказательство.* Предположим, что для некоторой пары чисел $s$ и $t$ из $[0, 1]$, связанных неравенством $s < t$, $L(\gamma \mid [s, t]) < d(\gamma(s), \gamma(t)) - \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= L(\gamma \mid [0, s]) + L(\gamma \mid [s, t]) + L(\gamma \mid [t, 1]) \leqslant \\ &\leqslant d(\gamma(0), \gamma(s)) + L(\gamma \mid [s, t]) + d(\gamma(t), \gamma(1)) < \\ &< d(p, \gamma(s)) + d(\gamma(s), \gamma(t)) - \varepsilon + d(\gamma(t), q) \leqslant d(p, q) - \varepsilon, \end{aligned}$$

что и приводит к противоречию. □

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы привести образец принципа, согласно которому для сильно причинных пространственно-временны́х многообразий пределы почти максимальных кривых являются максимальными геодезическими. Сильная причинность здесь существенна вследствие того, что сходимость в смысле предельной кривой и сходимость в $C^0$-топологии для сильно

причинных (но не для произвольных) пространственно-временных многообразий тесно связаны.

**Предложение 7.2.** *Пусть* $(M, g)$ — *сильно причинное пространство-время. Предположим, что* $p_n \to p$ *и* $q_n \to q$, *где* $p_n \ll q_n$ *для каждого* $n$ *и* $0 < d(p, q) < \infty$. *Пусть далее* $\gamma_n\colon [a, b] \to M$ — *направленная в будущее непространственноподобная кривая из* $p_n$ *в* $q_n$, *подчиненная условию*

$$d(p_n, q_n) \geqslant L(\gamma_n) \geqslant d(p_n, q_n) - \varepsilon_n > 0, \tag{7.2}$$

*где* $\varepsilon_n \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Если* $\gamma\colon [a, b] \to M$ — *предельная кривая последовательности* $\{\gamma_n\}$, *у которой* $\gamma(a) = p$ *и* $\gamma(b) = q$, *то* $L(\gamma) = d(p, q)$. *Тем самым* $\gamma$ *можно перепараметризовать в гладкую максимальную геодезическую из* $p$ *в* $q$.

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что, согласно лемме 2.16, кривая $\gamma$ является непространственноподобной. Во-вторых, согласно предложению 2.21, некоторая подпоследовательность $\{\gamma_m\}$ последовательности $\{\gamma_n\}$ сходится к $\gamma$ в $C^0$-топологии на кривых. В силу полунепрерывности сверху длины дуги в этой топологии для сильно причинных пространственно-временных многообразий (см. замечание 2.22) из формулы (7.2) получаем

$$L(\gamma) \geqslant \overline{\lim}\, L(\gamma_m) \geqslant \overline{\lim}\, [d(p_m, q_m) - \varepsilon_m].$$

Используя полунепрерывность снизу лоренцева расстояния (лемма 3.4), приходим к неравенству $L(\gamma) \geqslant d(p, q)$. Но по определению расстояния $d(p, q) \geqslant L(\gamma)$. Таким образом $L(\gamma) = d(p, q)$. Последнее утверждение следует из теоремы 3.13. $\square$

Рассмотрим теперь второй метод построения максимальных геодезических в сильно причинных пространствах $(M, g)$, который может быть применен также и к точкам, лоренцево расстояние между которыми бесконечно. Выберем для этого произвольную точку $p_0 \in M$ и полную (положительно определенную) риманову метрику $h$ для паракомпактного многообразия $M$ (и будем считать их фиксированными до конца гл. 7). Обозначим через $d_0\colon M \times M \to \mathbb{R}$ риманову функцию расстояния, индуцированную на $M$ метрикой $h$. По теореме Хопфа—Ринова множества

$$\overline{B}_n = \{m \in M\colon\ d_0(p_0, m) \leqslant n\}$$

компактны для всех натуральных чисел $n$. Таким образом, семейство $\{\overline{B}_n\colon n > 0\}$ образует компактное исчерпывание многообразия $M$ связными множествами. Обозначим через

$$d[\overline{B}_n]\colon \overline{B}_n \times \overline{B}_n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

лоренцеву функцию расстояния, индуцированную на $\overline{B}_n$ включением $\overline{B}_n \subset (M, g)$, $n$ — любое. Иначе говоря, для данной точки

$p \in \overline{B}_n$ положим $\mathrm{d}\,[\overline{B}_n]\,(p,\ q)$ равным точной верхней грани длин направленных в будущее непространственноподобных кривых, идущих из $p$ в $q$ и содержащихся в $\overline{B}_n$, если $q \in J^+(p,\ \overline{B}_n)$. Если же $q \notin J^+(p,\ \overline{B}_n)$, то полагаем $\mathrm{d}\,[\overline{B}_n]\,(p,\ q) = 0$. Отсюда немедленно следует, что $\mathrm{d}\,[\overline{B}_n]\,(p,\ q] \leqslant \mathrm{d}\,(p,\ q)$ для всех $p$, $q \in \overline{B}_n$. Однако в общем случае $\mathrm{d}\,[\overline{B}_n]$ *не* является ограничением на множество $\overline{B}_n \times \overline{B}_n$ заданной лоренцевой функции расстояния $\mathrm{d}$ многообразия $(M,\ g)$. Тем не менее для сильно причинных пространственно-временны́х многообразий эти два расстояния «в пределе» совпадают.

**Лемма 7.3.** *Пусть многообразие* $(M,\ g)$ *сильно причинно. Тогда для всех* $p,\ q \in M$ *имеем* $\mathrm{d}\,(p,\ q) = \lim \mathrm{d}\,[\overline{B}_n)\,(p,\ q)$.

*Доказательство.* Вследствие того что $\mathrm{d}\,[\overline{B}_n]\,(p,\ q) \leqslant \mathrm{d}\,(p,\ q)$, требуемое равенство очевидно, если $\mathrm{d}\,(p,\ q) = 0$. Предположим поэтому, что $\mathrm{d}\,(p,\ q) > 0$. По определению лоренцева расстояния можно найти последовательность $\{\gamma_k\}$ направленных в будущее непространственноподобных кривых из $p$ в $q$ так, что $L\,(\gamma_k) \to \mathrm{d}\,(p,\ q)$ при $k \to \infty$. (Если $\mathrm{d}\,(p,\ q) = \infty$, выбираем $\{\gamma_k\}$ так, чтобы $L\,(\gamma_k) \geqslant k$ для каждого $k$.) Из того, что образ $\gamma_k$ в $M$ компактен, а риманова функция расстояния $\mathrm{d}_0\colon M \times M \to \mathbb{R}$ непрерывна и принимает конечные значения, для каждого $k$ вытекает существование $n\,(k) > 0$, такого, что $\gamma_k \subset \overline{B}_j$ для всех $j \geqslant n\,(k)$. Таким образом, $\mathrm{d}\,(p,\ q) = \lim L\,(\gamma_k) \leqslant \lim \mathrm{d}\,[\overline{B}_n]\,(p,\ q)$. А так как $\mathrm{d}\,[\overline{B}_n]\,(p,\ q) \leqslant \mathrm{d}\,(p,\ q)$ для всякого $n$, то лемма доказана. □

Удобно ввести следующее соглашение об обозначении, которое будет использоваться до конца этой главы.

**Соглашение об обозначении 7.4.** Пусть $\gamma$ — направленная в будущее непространственноподобная кривая в причинном пространстве-времени. Пусть $p = \gamma\,(s)$ и $q = \gamma\,(t)$, где $s < t$ и $p \neq q$. Ограничение $\gamma$ на отрезок $[s,\ t]$ будем обозначать через $\gamma\,[p,\ q]$.

Для сильно причинных пространственно-временны́х многообразий лоренцевы функции расстояния $\mathrm{d}$ и $\mathrm{d}\,[\overline{B}_n]$ связаны следующим образом.

**Лемма 7.5.** *Пусть многообразие* $(M,\ g)$ *сильно причинно. Если* $p_n \to p$ *и* $q_n \to q$, *то* $\mathrm{d}\,(p,\ q) \leqslant \varliminf \mathrm{d}\,[\overline{B}_n]\,(p,\ q)$.

*Доказательство.* Отбрасывая очевидный случай $\mathrm{d}\,(p,\ q) = 0$, предположим сначала, что $0 < d\,(p,\ q) < \infty$. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Используя определение лоренцева расстояния и стандартные методы теории причинности (см. Пенроуз (1972, с. 15—16)),

можно найти времениподобную кривую $\gamma$ из $p$ в $q$, для которой $d(p, q) - \varepsilon < L(\gamma) \leqslant d(p, q)$. Вследствие того что $\gamma$ времениподобна и $L(\gamma) > d(p, q) - \varepsilon$, найдутся точки $r_1, r_2 \in \gamma$, подчиненные условиям $d(p, q) - \varepsilon < L(\gamma[r_1, r_2])$ и $p \ll r_1 \ll r_2 \ll \ll q$. Так как множества $I^-(r_1)$ и $I^+(r_2)$ открыты и $p_n \to p$, $q_n \to \to q$, то для всех достаточно больших $n$ имеем $p_n \ll r_1 \ll r_2 \ll q_n$. К этому следует добавить, что для всех достаточно больших $n$ $\gamma \subset \overline{B}_n$, $p_n \in J^-(r_1, \overline{B}_n)$ и $q_n \in J^+(r_2, \overline{B}_n)$. Тем самым $d(p, q) - \varepsilon < L(\gamma[r_1, r_2]) \leqslant d[\overline{B}_n](p_n, q_n)$ для всех больших $n$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то в случае, когда $0 < d(p, q) < \infty$, имеем $d(p, q) \leqslant \underline{\lim}\, d(B_n)(p_n, q_n)$. Рассмотрим, наконец, случай, когда $d(p, q) = \infty$. Выбирая связывающие $p$ с $q$ времениподобные кривые $\gamma_k$ так, чтобы $L(\gamma_k) \geqslant k$ ($k$ любое), и рассуждая, как и выше, получим, что $d[\overline{B}_n](p_n, q_n) \geqslant k - \varepsilon$ для всех достаточно больших $n$ и каждого $k$. Отсюда вытекает требуемое $\lim d[\overline{B}_n](p_n, q_n) = \infty$. □

Вследствие того что по предположению $(M, g)$ является сильно причинным, но не обязательно глобально гиперболично, возможны значения лоренцевой функции расстояния $d\colon M \times M \to \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, равные бесконечности $+\infty$. Вместе с тем для любого данного $\overline{B}_n$ функция расстояния $d[\overline{B}_n]\colon \overline{B}_n \times \overline{B}_n \to \mathbb{R} \cup \cup \{\infty\}$ конечнозначна. Этот факт является следствием компактности множеств $\overline{B}_n$ и компактности некоторых определенных подмножеств, образованных непространственноподобными кривыми в $C^0$-топологии на кривых (см. Пенроуз (1972, с. 50, теорема 6.5)). Более того, эта компактность влечет также существование кривых, реализующих $d[\overline{B}_n]$-расстояние для точек $p$, $q \in \overline{B}_n$, связанных условием $q \in J^+(p, \overline{B}_n)$.

**Лемма 7.6.** *Пусть $(M, g)$ — сильно причинное пространство-время и $n > 0$ произвольно. Если $q \in J^+(p, \overline{B}_n)$, то* 1) $d[\overline{B}_n](p, q) < \infty$ *и* 2) *существует направленная в будущее непространственноподобная кривая $\gamma$ в $\overline{B}_n$, соединяющая $p$ с $q$ и удовлетворяющая равенству $L(\gamma) = d[\overline{B}_n](p, q)$.*

*Доказательство.* По определению расстояния $d[\overline{B}_n]$ из соотношений $d[\overline{B}_n](p, q) = 0$ и $q \in J^+(p, \overline{B}_n)$ вытекает существование направленной в будущее непространственноподобной кривой $\gamma$ в $\overline{B}_n$, идущей из $p$ в $q$ и удовлетворяющей неравенству $L(\gamma) \leqslant d[\overline{B}_n](p, q) = 0$. Отсюда, как и требуется, вытекает, что $L(\gamma) = d[\overline{B}_n](p, q)$. Поэтому можно предполагать, что $d[\overline{B}_n], (p, q) > 0$. Вновь используя определение $d[\overline{B}_n]$, найдем

последовательность $\{\gamma_k\}$ направленных в будущее непространственноподобных кривых, связывающих $p$ с $q$ так, что $L(\gamma_k) \to d[\overline{B}_n](p, q)$. (Если $\mathrm{d}[\overline{B}_n](p, q) = \infty$, то $\gamma_k$ выбираем так, чтобы $L(\gamma_k) \geqslant k$ для любого $k$.) Из того, что $\overline{B}_n$ компактно, а $(M, g)$ сильно причинно, вытекает существование в $\overline{B}_n$ направленной в будущее непространственноподобной кривой $\gamma$ из $p$ в $q$, обладающей следующим свойством: подпоследовательность $\{\gamma_m\}$ последовательности $\{\gamma_k\}$ сходится к $\gamma$ в $C^0$-топологии на кривых согласно теореме 6.5 Пенроуза (1972, с. 50—51). Используя теперь полунепрерывность снизу длины дуги в $C^0$-топологии на кривых, получаем, что $\mathrm{d}[\overline{B}_n](p, q) = \lim L(\gamma_m) \leqslant L(\gamma)$, откуда следует, что расстояние $\mathrm{d}[\overline{B}_n](p, q)$ конечно. Так как по определению $L(\gamma) \leqslant d[\overline{B}_n](p, q)$, то отсюда получаем требуемое $\mathrm{d}[\overline{B}_n](p, q) = L(\gamma)$. □

Пусть теперь точки $p, q \in M$ связаны условиями $p \leqslant q$, $p \neq q$, а в остальном произвольны. Возьмем любую непространственноподобную кривую $\gamma_0$, соединяющую $p$ с $q$. Вследствие того что образ кривой $\gamma_0$ компактен в $M$, а риманова функция расстояния непрерывна, можно найти $N > 0$, такое, что $\gamma_0$ содержится в $\overline{B}_N$. Отсюда следует, что $q \in J^+(p, \overline{B}_n)$ для всех $n \geqslant N$. Поэтому, используя лемму 7.6, можно найти направленную в будущее непространственноподобную кривую $\gamma_n$ из $p$ в $q$ так, что $L(\gamma_n) = \mathrm{d}[\overline{B}_n](p, q)$ для каждого $n \geqslant N$. Тогда для $C^0$-предельных кривых последовательности $\{\gamma_n\}$ получаем следующий аналог предложения 7.2.

**Предложение 7.7.** *Пусть многообразие $(M, g)$ сильно причинно и $p, q \in M$ — различные точки, связанные условием $p \leqslant q$. Пусть $\gamma_n$ — направленная в будущее непространственноподобная кривая, идущая в $\overline{B}_n$ из $p$ в $q$ так, что $L(\gamma_n) = \mathrm{d}[\overline{B}_n](p, q)$, где $n \geqslant N$ ($N$ — достаточно большое положительное число). Если $\gamma$ — непространственноподобная кривая из $p$ в $q$ — такова, что $\{\gamma_n\}$ сходится к $\gamma$ в $C^0$-топологии на кривых, то $L(\gamma) = \mathrm{d}(p, q)$, и значит, $\gamma$ можно перепараметризовать в максимальный геодезический сегмент из $p$ в $q$.*

*Доказательство.* Используя лемму 7.5 и полунепрерывность сверху длины дуги в $C^0$-топологии на кривых в сильно причинных пространственно-временных многообразиях, получим

$$\mathrm{d}(p, q) \leqslant \varliminf \mathrm{d}[\overline{B}_n](p, q) = \varliminf L(\gamma_n) \leqslant$$
$$\leqslant \varlimsup L(\gamma_n) \leqslant L(\gamma) \leqslant \mathrm{d}(p, q),$$

что и требовалось. □

Пусть теперь $p$, $q$, $p \ll q$, — различные точки произвольного сильно причинного пространства-времени. Предположим, что последовательность $\{\gamma_n\}$ непространственноподобных кривых из $p$ в $q$ выбрана, как в предложении 7.7. Несмотря на то что предельная для последовательности $\{\gamma_n\}$ кривая $\gamma$, $\gamma(0) = p$, всегда существует (см. предложение 2.18), нет гарантии в том, что $\gamma$ достигнет точки $q$, если $(M, g)$ не является глобально гиперболическим. В самом деле, если $d(p, q) = \infty$, то максимальных геодезических из $p$ в $q$ просто не существует, а поэтому нет и предельной для последовательности $\{\gamma_n\}$ кривой $\gamma$, исходящей из $p$ ($\gamma(0) = p$) и проходящей через $q$. Совмещая вывод, полученный из предложения 7.7, с предположением о том, что $\gamma$ соединяет $p$ с $q$ (см. предложение 7.7), приходим к неравенству $d(p, q) < \infty$. Напротив, условие $d(p, q) < \infty$ *не* приводит к тому, что любая кривая $\gamma$ ($\gamma(0) = p$), предельная для последовательности $\{\gamma_n\}$, достигнет $q$, если многообразие $(M, g)$ не является глобально гиперболическим. Соответствующие примеры можно легко построить, выбрасывая точки из пространства-времени Минковского.

## 7.2. Непространственноподобные геодезические лучи в сильно причинных пространствах

Целью этого раздела является доказательство того, что из каждой точки сильно причинного пространства-времени $(M, g)$ исходят направленные в прошлое и направленные в будущее непространственноподобные геодезические лучи.

**Определение 7.8.** *Направленным в будущее* (соответственно *в прошлое*) *непространственноподобным геодезическим лучом* называется направленная в будущее (соответственно в прошлое) непродолжаемая в будущее (соответственно в прошлое) непространственноподобная геодезическая $\gamma: (0, a) \to (M, g)$, обладающая следующими свойствами: $d(\gamma(0), \gamma(t)) = L(\gamma\,|\,[0, t])$ (соответственно $d(\gamma(t), \gamma(0)) = L(\gamma\,|\,[0, t])$) для всех $t$, удовлетворяющих условию $0 \leqslant t < a$.

Из обратного неравенства треугольника вытекает, что непространственноподобный геодезический луч максимален между любой парой своих точек.

Используя леммы 7.5 и 7.6, докажем сначала предложение, необходимое для доказательства существования не только непространственноподобных геодезических лучей, но также и существования непространственноподобных геодезических прямых в сильно причинных причинно разделяемых пространственно-временны́х многообразиях (разд. 7.3). Пусть $\overline{B}_n$ и $d[\overline{B}_n]: \overline{B}_n \times \overline{B}_n \to \mathbb{R}$ те же, что и в разд. 7.1.

**Предложение 7.9.** *Пусть $(M, g)$ — сильно причинное пространство-время и $K$ — произвольное компактное подмножество $M$. Предположим, что $p$ и $q$ — различные точки из $M$, такие, что $p \ll q$ и каждая непространственноподобная кривая из $p$ в $q$ встречает $K$. Тогда выполняется хотя бы одно из следующих утверждений:*

(1) *Существует направленный в будущее максимальный непространственноподобный геодезический сегмент с концами в $p$ и $q$, который пересекает $K$.*

(2) *Существует направленная в будущее максимальная непространственноподобная геодезическая, которая начинается в $p$, пересекает $K$ и является непродолжаемой в будущее.*

(3) *Существует направленная в будущее максимальная непространственноподобная геодезическая, которая кончается в $q$, пересекает $K$ и является непродолжаемой в прошлое.*

(4) *Существует максимальная непространственноподобная геодезическая, которая пересекает $K$ и является одновременно непродолжаемой и в прошлое, и в будущее.*

*Доказательство.* Пусть $\gamma_0$ — произвольная направленная в будущее кривая в $M$, идущая из $p$ в $q$. Из того, что $K \cup \{\gamma_0\}$ компактно, вытекает существование $N > 0$, такого, что множество $K \cup \{\gamma_0\}$ содержится в $\overline{B}_n$ для всех $n \geqslant N$. Тем самым $q \in J^+(p, \overline{B}_n)$ для всех $n \geqslant N$. Поэтому, согласно лемме 7.6, для каждого $n \geqslant N$ найдется направленная в будущее непространственноподобная кривая $\gamma_n$ в $\overline{B}_n$, соединяющая $p$ с $q$ так, что $L(\gamma_n) = d[\overline{B}_n](p, q)$. По предположению каждая $\gamma_n$ пересекает $K$ в некоторой точке $r_n$. В силу компактности $K$ существуют точка $r \in K$ и подпоследовательность $\{r_m\}$ последовательности $\{r_n\}$, такие, что $r_m \to r$ при $m \to \infty$. Продолжим каждую кривую $\gamma_m$ до непространственноподобной непродолжаемой ни в прошлое, ни в будущее кривой, которую по-прежнему будем обозначать через $\gamma_m$. Согласно предложению 2.18, существует непродолжаемая непространственноподобная кривая $\gamma$, предельная для подпоследовательности $\{\gamma_m\}$ и такая, что $\gamma$ содержит $r$. Переобозначая, если необходимо, мы можем считать, что $\{\gamma_m\}$ определяет $\gamma$.

Предельная кривая $\gamma$ либо содержит и $p$, и $q$, либо только $p$, либо только $q$, либо не содержит ни $p$, ни $q$. Эти четыре возможности приводят соответственно к четырем случаям (1)—(4) рассматриваемого предложения. Так как доказательства весьма похожи, приведем доказательство только для второго случая. Предположим поэтому, что $\gamma: (a, b) \to M$ содержит $p = \gamma(t_0)$ и не содержит $q$. Нужно показать, что $\gamma \mid [t_0, b)$ максимальна. Возьмем на кривой $\gamma \mid [t_0, b)$ произвольную точку $x$. Так как $\{\gamma_m\}$ выделяет $\gamma$, то можно найти точки $x_m \in \gamma_m$, такие, что $x_m \to x$

при $m \to \infty$. Переходя, если необходимо к подпоследовательности $\{\gamma_k\}$ последовательности $\{\gamma_m\}$, согласно предложению 2.21, можем предполагать, что $\gamma_k\ [p, x_k]$ сходится к $\gamma\ [p, x]$ в $C^0$-топологии на кривых (вспомните соглашение 7.4 об обозначениях). Из того, что $\gamma\ [p, x]$ замкнуто в $M$ и $q \notin \gamma$, вытекает существование открытого множества $V$, содержащего $\gamma\ [p, x]$ и не содержащего $q$, $q \notin V$. Так как $\gamma_k\ [p, x_k] \to \gamma\ [p, x]$ в $C^0$-топологии на кривых, то найдется $N_1 > 0$, такое, что $\gamma_k\ [p, x_k] \subset V$ для всех $k \geqslant N_1$. Отсюда следует, что $q \notin \gamma_k\ [p, x_k]$ для всех $k \geqslant N_1$. Тем самым для всех $k \geqslant N_1$ справедливо включение $\gamma_k\ [p, x_k) \subset \gamma_k\ [p, q]$, которое означает, что $L\ (\gamma_k\ (p, x_k)] = d\ [\overline{B}_k]\ (p, x_k)$ для всех $k \geqslant N_1$. Из леммы 7.5 и полунепрерывности сверху длины дуги в $C^0$-топологии на кривых для сильно причинных пространств имеем

$$d(p, x) \leqslant \underline{\lim}\, d[\overline{B}_k](p, x_k) = \underline{\lim}\, L(\gamma_k[p, x_k]) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim}\, L(\gamma_k[p, x_k]) \leqslant L(\gamma[p, x]).$$

Так как по определению лоренцева расстояния $L\ (\gamma\ [p, x]) \leqslant d\ (p, x)$, то $d\ (p, x) = L\ (\gamma, [p, x])$, что и требовалось доказать. □

Для глобально гиперболических пространственно-временных многообразий случай (1) предложения 7.9 имеет место всегда вследствие того, что множество $J^+(p) \cap J^-(q)$ компактно и никакая непродолжаемая непространственноподобная кривая не оказывается захваченной компактным множеством в прошлом или в будущем. Однако путем выкалывания точек из пространства-времени Минковского можно построить сильно причинное, но не глобально гиперболическое пространство-время, имеющее хронологически связанные точки $p \ll q$, к которым применим в точности один из случаев (2)—(4).

Теперь при помощи предложения 7.9 можно доказать, что из каждой точки сильно причинного пространства-времени исходят направленные в прошлое и направленные в будущее непространственноподобные геодезические лучи. Как обычно, достаточно показать, что из каждой точки исходят лучи, направленные в будущее.

**Теорема 7.10.** *Пусть $(M, g)$ — сильно причинное пространство-время и точка $p \in M$ произвольна. Тогда существует направленный в будущее непространственноподобный геодезический луч $\gamma$: $[0, a) \to M$, у которого $\gamma(0) = p$, т. е. $d(p, \gamma(t)) = L(\gamma \mid [0, t])$ для всех $t$, удовлетворяющих условию $0 \leqslant t < a$.*

*Доказательство.* Пусть $c$: $[0, b) \to M$ — направленная в будущее и непродолжаемая в будущее времениподобная кривая,

$c(0) = p$. Вследствие того что $(M, g)$ сильно причинно, $c$ не может быть захвачена в будущем никаким компактным множеством (см. предложение 2.9). Таким образом, существует последовательность $\{t_n\}$, такая, что $t_n \to b$ и $d_0(p, c(t_n)) \to \infty$ при $n \to \infty$. Положим $q_n = c(t_n)$ для каждого $n$.

Применим теперь предложение 7.9 к каждой паре $p$, $q_n$ с $K = \{p\}$. Для каждого $n$ либо (1) существует максимальный направленный в будущее непространственноподобный геодезический сегмент из $p$ в $q_n$, либо (2) существует направленный в будущее непродолжаемый в будущее непространственноподобный геодезический луч, начинающийся в $p$. Если при некотором $n$ имеет место случай (2), то все доказано. Предположим поэтому, что для каждого $n$ найдется максимальный направленный в будущее непространственноподобный геодезический сегмент $\gamma_n$, соединяющий $p$ с $q_n$. Продолжим кривую $\gamma_n$ до направленной в будущее непродолжаемой в будущее непространственноподобной кривой, сохранив за ней обозначение $\gamma_n$. Согласно предложению 2.18, последовательность $\{\gamma_n\}$ имеет направленную в будущее непродолжаемую в будущее непространственноподобную предельную кривую $\gamma\colon [0, a) \to M$, у которой $\gamma(0) = p$. Перенумеровывая $q_n$, если это необходимо, можем считать, что сама последовательность $\{\gamma_n\}$ определяет $\gamma$.

Остается показать, что если точка $x \in \gamma$, $p \neq x$ произвольна, то $L(\gamma[p, x]) = d(p, x)$. Так как $\{\gamma_n\}$ выделяет $\gamma$, то для каждого $n$ можно выбрать $x_n \in \gamma_n$ так, чтобы $x_n \to x$ при $n \to \infty$. В соответствии с предложением 2.21 выделим из последовательности $\{\gamma_n\}$ подпоследовательность $\{\gamma_m\}$ так, чтобы $\{\gamma_m[p, x_m]\}$ сходилась к $\gamma[p, x]$ в $C^0$-топологии на кривых. Отсюда вытекает существование $N > 0$, такого, что $\gamma_m[p, x_m] \subset \overline{B}_N$ для всех $m \geqslant N$. Из того, что $\overline{B}_N$ — компакт, а $d_0(p, q_n) \to \infty$, следует, что существует $N_1 \geqslant N$, для которого $q_m \notin \overline{B}_N$ при всех $m \geqslant N_1$. Отсюда вытекает, что соотношение $L(\gamma_m[p, x_m]) = d(p, x_m) = d[\overline{B}_m](p, x_m)$ справедливо для всех $m \geqslant N_1$. Используя лемму 7.5 и полунепрерывность сверху лоренцевой длины дуги в $C^0$-топологии на кривых, получаем

$$d(p, x) \leqslant \varliminf d[\overline{B}_m](p, x_m) = \varliminf L(\gamma_m[p, x_m]) \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup L(\gamma_m[p, x_m]) \leqslant L(\gamma[p, x]),$$

откуда $d(p, x) = L(\gamma[p, x])$, как и в предложении 7.9. □

## 7.3. Причинно разделяемые пространственно-временные многообразия и непространственноподобные геодезические прямые

В этом разделе мы определим и изучим класс причинно разделяемых пространств. Обоснованием нашего определения этого класса пространственно-временных многообразий является геометрическая реализация бесконечно удаленных точек некомпактного полного риманова многообразия при помощи геодезических прямых, рассмотренная во введении к этой главе (см. Фройденталь (1931), где впервые дано определение бесконечно удаленной точки некомпактного хаусдорфова топологического пространства). Напомним, что бесконечная последовательность в некомпактном топологическом пространстве называется *расходящейся к бесконечности*, если для любого заданного компактного подмножества $C$ лишь конечное число элементов последовательности содержится в $C$.

**Определение 7.11.** Пространство-время $(M, g)$ называется *причинно разделяемым компактным множеством* $K$, если существуют две бесконечные последовательности точек $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$, расходящиеся к бесконечности так, что $p_n \leqslant q_n$, $p_n \neq q_n$ для любого $n$ и все направленные в будущее кривые из $p_n$ в $q_n$ встречают $K$. Пространство-время $(M, g)$, которое причинно разделяемо некоторым компактом $K$, называется *причинно разделяемым*.

Заметим прежде всего, что если $k \neq n$, то $p_k$ не обязательно причинно связана с $q_n$ или $p_n$. Отметим также, что компактное множество $K$ может быть совершенно отличным от поверхности Коши (см. теорему 2.13) и что глобально гиперболические сильно причинные пространственно-временные многообразия могут быть причинно разделяемыми, даже если они и не содержат поверхностей Коши. Пример такого рода дает пространство-время Райсснера—Нордстрема с $e^2 = m^2$ (рис. 7.1).

Непосредственно из определения 7.11 следует, что если $(M, g)$ причинно разделяемо, то для произвольной метрики $g_1 \in C(M, g)$ многообразие $(M, g_1)$ будет также причинно разделяемо. Это означает, что причинная разделяемость является глобальным конформным инвариантом.

Ранее мы пользовались более обременительным вариантом причинной разделяемости, в котором в дополнение к условиям определения 7.11 предполагалось, что $0 < d(p_n, q_n) < \infty$ для любого $n$ (см. Бим и Эрлих (1979а, с. 171; 1979в)). С этим дополнительным условием наше предыдущее определение было, вообще говоря, конформно инвариантным только для класса глобально гиперболических пространственно-временных многообразий.

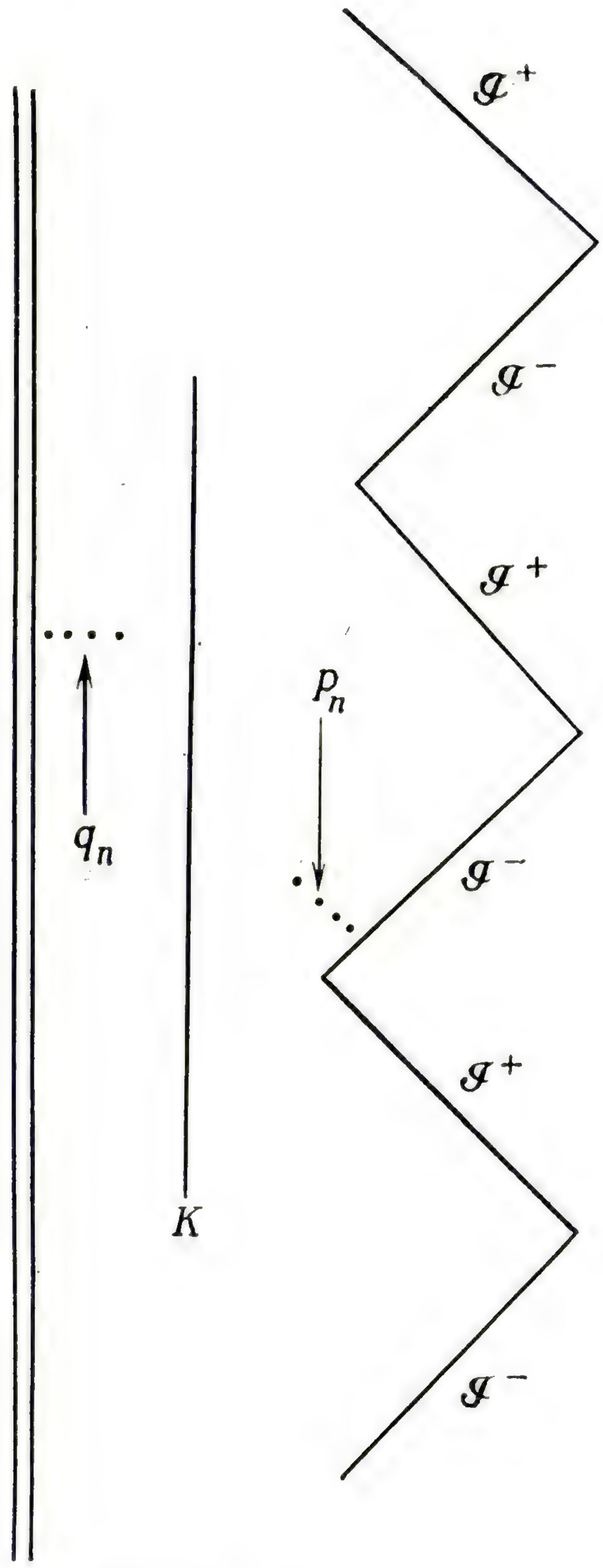



Рис. 7.1. Показана диаграмма Пенроуза для пространства-времени Райсснера—Нордстрема с $e^2 = m^2$, содержащего причинно разделяющее множество $K$ и связанные расходящиеся последовательности $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$. Это пространство-время не содержит поверхностей Коши потому, что оно не является глобально гиперболическим.

Дадим теперь следующее

**Определение 7.12.** Пусть $(M, g)$ — произвольное пространство-время. Непродолжаемая в прошлое и в будущее направленная в будущее непространственноподобная геодезическая $\gamma$: $(a, b) \to M$ называется *непространственноподобной геодезической прямой*, если $L(\gamma \mid [s, t]) = d(\gamma(s), \gamma(t))$ для всех $s$ и $t$, связанных условием $a < s \leqslant t < b$.

Установим существование непространственноподобных геодезических прямых для сильно причинных причинно разделяемых пространственно-временных многообразий. Этот результат будет важным вкладом в доказательство теорем о сингулярностях для причинно разделяемых пространственно-временных многообразий в разд. 11.4.

**Теорема 7.13.** *Пусть $(M, g)$ — сильно причинное пространство-время, причинно разделяемое компактным множеством $K$.*

*Тогда $M$ содержит непространственноподобную геодезическую прямую $\gamma$: $(a, b) \to M$, которая пересекает $K$.*

*Доказательство.* Пусть $K$, $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ те же, что и в определении 7.11. Применяя предложение 7.9 к $K$, $p_n$ и $q_n$, для каждого $n$ получим направленную в будущее непространственноподобную геодезическую $\gamma_n$, пересекающую $K$ в некоторой точке $r_n$ и удовлетворяющую по крайней мере одному из случаев (1)—(4) предложения 7.9. Если случай (4) имеет место для любого $n$, то мы получаем требуемое. Предположим поэтому, что $\gamma_n$ не удовлетворяет условию (4). Отсюда вытекает, что хотя бы один из случаев (1)—(3) выполняется для бесконечного числа номеров $n$. В силу того что разбор этих случаев весьма схож, мы приведем доказательство только для ситуации (2). Переходя, если это необходимо, к подпоследовательности, можно предполагать, что случай (2) выполняется для всех $n$. Ввиду того что $K$ — компакт, существует подпоследовательность последовательности $\{r_n\}$, $\{r_m\}$, такая, что $r_m \to r$ при $m \to \infty$. Продолжим каждую $\gamma_m$ через $p_m$ в прошлое так, чтобы получить непространственноподобную кривую (за ней мы сохраняем то же обозначение $\gamma_m$), которая для любого $m$ является непродолжаемой как в прошлое, так и в будущее. Согласно предложению 2.18, последовательность $\{\gamma_m\}$ имеет направленную в будущее непродолжаемую ни в прошлое, ни в будущее непространственноподобную предельную кривую $\gamma$, причем $r \in \gamma$. Переходя, если это необходимо, к подпоследовательности, можно предполагать, что сама $\{\gamma_m\}$ определяет $\gamma$. Докажем, что $\gamma$ — требуемая непространственноподобная прямая. Чтобы выяснить это, достаточно показать, что если $x, y \in \gamma$ — различные точки, связанные отношением $x \leqslant r \leqslant y$, то $L(\gamma[x, y]) = d(x, y)$. Ввиду того что $\{\gamma_m\}$ выделяет $\gamma$, можно найти точки $x_m, y_m \in \gamma_m$, такие, что $x_m \to x$ и $y_m \to y$ при $m \to \infty$. Переходя, если это необходимо, к подпоследовательности $\{\gamma_k\}$ последовательности $\{\gamma_m\}$, согласно предложению 2.21, можно считать, что $\gamma_k[x_k, y_k]$ сходится к $\gamma[x, y]$ в $C^0$-топологии на кривых. Из того, что $\gamma[x, y]$ компактно в $M$, вытекает существование $N > 0$, такого, что $\gamma[x, y] \subset \operatorname{Int}(\overline{B}_N)$. По определению $C^0$-топологии на кривых найдется такое $N_1 \geqslant N$, что $\gamma_k[x_k, y_k] \subset \operatorname{Int}(\overline{B}_N)$ для всех $k \geqslant N_1$. Так как $\{p_k\}$ расходится к бесконечности, а $\overline{B}_N$ компактно, то можно указать $N_2 \geqslant N_1$, для которого $p_k \notin \overline{B}_N$, где $k \geqslant N_2$ любое. Следовательно, $x_k$ для всех $k \geqslant N_2$ идет вслед за $p_k$ на $\gamma_k$, так что $\gamma_k[x_k, y_k]$ максимальна для всех $k \geqslant N_2$. Поэтому

$$d(x, y) \leqslant \underline{\lim}\, d(x_k, y_k) = \underline{\lim}\, L(\gamma_k[x_k, y_k]) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim}\, L(\gamma_k[x_k, y_k]) \leqslant L(\gamma[x, y]) \leqslant d(x, y).$$

Отсюда вытекает, как и требовалось, что $d(x, y) = L(\gamma[x, y])$. □

Сформулируем теперь в терминах глобальной геодезической структуры несколько критериев того, чтобы глобально гиперболические и сильно причинные пространственно-временны́е многообразия были причинно разделяемы. В частности, мы сможем показать, что все двумерные глобально гиперболические пространства являются причинно разделяемыми. Один из наших критериев (предложение 7.18) вместе с теоремой 7.13 означает, что если сильно причинное пространство-время $(M, g)$ не содержит изотропных геодезических лучей, то $(M, g)$ содержит времениподобную геодезическую прямую.

Напомним, что непродолжаемая изотропная геодезическая $\gamma$: $(a, b) \to (M, g)$ называется *изотропной геодезической прямой*, если $d(\gamma(s), \gamma(t)) = 0$ для всех $s$ и $t$, связанных соотношением $a < s \leqslant t < b$.

**Предложение 7.14.** *Пусть* $(M, g)$ — *глобально гиперболическое пространство-время. Если* $(M, g)$ *содержит изотропную геодезическую прямую, то* $(M, g)$ *является причинно разделяемым.*

*Доказательство.* Пусть $c$: $(a, b) \to M$ — заданная изотропная геодезическая прямая и $r$ — произвольная точка $c$. Выберем в $M$ компактное подмножество $K$ так, чтобы $r \in \operatorname{Int}(K)$. Построим последовательности $t_n \to a^+$ и $t_n' \to b^-$, удовлетворяющие условию $c(t_n) \leqslant r \leqslant c(t_n')$ для любого $n$. Положим $p_n = c(t_n)$. Достаточно показать, что для каждого $n$ найдется некоторая точка $q_n$ со свойствами: $c(t_n') \ll q_n$ и все непространственноподобные кривые из $p_n$ в $q_n$ встречают $K$.

Если для какого-нибудь $n$ такой точки $q_n$ не существует, то должны быть последовательность точек $\{x_k\}$, сходящаяся к $c(t_n')$ так, что $c(t_n') \ll x_k$ для всех $k$, и последовательность направленных в будущее непространственноподобных кривых $\gamma_k$, соединяющих $c(t_n)$ с $x_k$ так, что $K \cap \gamma_k = \varnothing$ для любого $k$. Последовательность $\{\gamma_k\}$ будет иметь в качестве предельной направленную в будущее непространственноподобную кривую $\gamma$, начинающуюся в $c(t_n)$. Из глобальной гиперболичности $(M, g)$ вытекает, что $\gamma$ должна соединять $c(t_n)$ с $c(t_n')$. С другой стороны, из того, что $c$ — максимальная изотропная геодезическая, вытекает, что единственной (с точностью до параметризации) непространственноподобной кривой из $c(t_n)$ в $c(t_n')$ является изотропная геодезическая $c \mid [t_n, t_n']$ (см. лемму 8.13). Тем самым $\gamma \subset c$ и последовательность $\{\gamma_k\}$ должна пересекать $K$ для некоторого большого $k$. □

Предложение 7.14 позволяет утверждать, что пространство-время Минковского, пространство-время де Ситтера и космологические модели Фридмана причинно разделяемы. С другой стороны, пример 4.11 статической вселенной Эйнштейна показывает, что существуют глобально гиперболические причинно разделяемые пространственно-временны́е многообразия, не содержащие изо-

тропных геодезических прямых. Поэтому наличие изотропной геодезической прямой *не* является необходимым условием того, чтобы глобально гиперболическое пространство-время было причинно разделяемым.

В следующем предложении мы дадим достаточное условие для того, чтобы глобально гиперболическое пространство-время $(M, g)$ было причинно разделяемым. Для доказательства этого результата (предложение 7.18) необходимо ввести несколько дополнительных понятий из элементарной теории причинности. Подмножество $S$ пространства-времени $(M, g)$ называется *ахрональным*, если никакие две точки из $S$ хронологически не связаны. Для заданного замкнутого подмножества $S$ пространства-времени $(M, g)$ *область Коши в будущем*, или область зависимости, $D^+(S)$ множества $S$ определяется как множество всех точек $q$, для которых каждая непродолжаемая в прошлое непространственноподобная кривая, исходящая из $q$, пересекает $S$. *Горизонт Коши в будущем* $H^+(S)$ задается формулой $H^+(S) = \mathrm{cl}\,(D^+(S)) \setminus I^-(D^+(S))$. *Контур будущего* $E^+(S)$ подмножества $S$ определяется как $E^+(S) = J^+(S) \setminus I^+(S)$. Ахрональное множество $S$ называется *ловушечным для будущего*, если $E^+(S)$ компактен. Более развернутое описание этих понятий можно найти у Хокинга и Эллиса (1977, с. 135, 207, 224—225 и 297).

Для доказательства предложения 7.18 нам также необходим один результат, впервые установленный Хокингом и Пенроузом (1970, с. 537, лемма 2.12). В книге Хокинга и Эллиса (1977, с. 296) этот результат представлен в несколько иной форме в ходе доказательства теоремы 2. В доказательстве этой теоремы предполагается, что $\dim M \geqslant 3$, $(M, g)$ имеет всюду неотрицательную непространственноподобную кривизну Риччи и удовлетворяет типовому условию (условия (1) и (2) теоремы 2). Однако нетрудно заметить, что если в формулировке леммы 8.2.1 и идущего за ним следствия в книге Хокинга и Эллиса (1977, с. 298—299) дополнительно предполагать, что $(M, g)$ сильно причинно, то легко получить наши лемму 7.15 и следствие 7.16. Для полноты изложения мы сформулируем оба эти результата.

**Лемма 7.15.** *Пусть $A$ — замкнутое подмножество сильно причинного пространства-времени $(M, g)$. Тогда $H^+(\mathrm{cl}\,(E^+(A)))$ либо некомпактно, либо пусто.*

Из этой леммы, как и у Хокинга и Пенроуза (1970, с. 537) или у Хокинга и Эллиса (1977, с. 298—299), получается следующее утверждение.

**Следствие 7.16.** *Пусть $(M, g)$ сильно причинно. Если $S$ — ловушечное множество для будущего в $(M, g)$, т. е. $E^+(S)$ ком-*

*пактно, то существует непродолжаемая в будущее времениподобная кривая $\gamma$, целиком содержащаяся в $D^+(E^+(S))$.*

Для доказательства предложения 7.18 полезно установить справедливость следующей леммы.

**Лемма 7.17.** *Пусть $(M, g)$ сильно причинно. Если $E^+(p)$ некомпактно, то $E^+(p)$ содержит бесконечную последовательность $\{q_n\}$, которая расходится к бесконечности.*

*Доказательство*. Если $E^+(p)$ замкнуто, то сформулированное утверждение немедленно следует из того, что замкнутое и некомпактное подмножество $M$ должно быть неограниченным относительно $d_0$. Предположим поэтому, что $E^+(p)$ незамкнуто. Тогда существует бесконечная последовательность $\{x_n\} \subset E^+(p)$, такая, что $x_n \to x \notin E^+(p)$ при $n \to \infty$. Вследствие того что $x_n \in E^+(p)$, имеем $d(p, x_n) = 0$. Отсюда в силу включения $x_n \in J^+(p)$ вытекает существование максимального направленного в будущее изотропного геодезического сегмента $\gamma_n$ из $p$ в $x_n$, $n$ любое. Продолжим каждую кривую $\gamma_n$ через $x_n$ до непродолжаемой в будущее непространственноподобной кривой, за которой сохраним то же обозначение $\gamma_n$. Согласно предложению 2.18, последовательность $\{\gamma_n\}$ имеет непродолжаемую в будущее непространственноподобную предельную кривую $\gamma$: $[0, a) \to M$, для которой $\gamma(0) = p$. Можно считать, что сама последовательность $\{\gamma_n\}$ определяет $\gamma$. Если $x \in \gamma$, то $x \in J^+(p)$. Из неравенства $d(p, x) \leqslant \overline{\lim}\, d(p, x_n) = 0$ получаем, что $x \in J^+(p) \setminus I^+(p) = E^+(p)$ в противоречии с предположением $x \notin E^+(p)$. Тем самым $x \notin \gamma$. Покажем теперь, что $\gamma\,[0, a)$ целиком содержится в $E^+(p)$. Возьмем для этого произвольную точку $z \in \gamma$. Вследствие того что $\{\gamma_n\}$ определяет $\gamma$, можно найти $z_n \in \gamma_n$, такие, что $z_n \to z$ при $n \to \infty$. Согласно предложению 2.21, существует подпоследовательность $\{\gamma_k\}$ последовательности $\{\gamma_n\}$, у которой $\gamma_k\,[p, z_k]$ сходятся к $\gamma\,[p, z]$ в $C^0$-топологии на кривых. Так как $x \notin \gamma$, то можно найти открытое множество $U$, содержащее $\gamma\,[p, z]$ и такое, что $x \notin U$. Вследствие сходимости $x_k \to x$ точки $z_k$ расположены на $\gamma_k$ перед $x_k$ для всех достаточно больших $k$. Тем самым $\gamma\,[p, z_k]$ максимален и $d(p, z_k) = 0$ справедливо для всех достаточно больших $k$. Отсюда вытекает неравенство $d(p, z) \leqslant \overline{\lim}\, d(p, z_k) = 0$. Так как $z$ выбрано произвольно, то тем самым $d(p, z) = 0$ для всех $z \in \gamma$. В силу того что $\gamma$ — непространственноподобная кривая, она является максимальным направленным в будущее непродолжаемым в будущее изотропным геодезическим лучом. Взяв последовательность $\{t_n\}$, подчиненную условию $t_n \to a^-$, а в остальном произвольную, и положив $q_n = \gamma(t_n)$, получим требуемую расходящуюся последовательность. □

Завершив эти приготовления, мы теперь можем получить достаточное условие того, что сильно причинное пространство-время причинно разделяемо. Пример пространства-времени Минковского показывает, что это условие не является необходимым. Напомним, что направленная в будущее и непродолжаемая в будущее изотропная геодезическая $\gamma$: $[0, a) \to M$ называется *изотропным геодезическим лучом*, если $d(\gamma(0), \gamma(t)) = 0$ для всех $t$, подчиненных условию $0 \leqslant t < a$.

**Предложение 7.18.** *Пусть $(M, g)$ сильно причинно. Если $p \in M$ не является начальной точкой никакого направленного в будущее (соответственно в прошлое) изотропного геодезического луча, то $(M, g)$ причинно разделяемо контуром будущего (соответственно прошлого) $E^+(p) = J^+(p) \setminus I^+(p)$ (соответственно $E^-(p) = J^-(p) \setminus I^-(p)$) точки $p$.*

*Доказательство.* Покажем сначала, что предположение о том, что $p$ не является начальной точкой никакого направленного в будущее непродолжаемого в будущее геодезического луча, означает компактность $E^+(p)$. Предположим противное: $E^+(p)$ некомпактно. Тогда существует последовательность точек $\{q_n\} \subset E^+(p)$, которая по лемме 7.17 расходится к бесконечности. Вследствие включения $q_n \in E^+(p)$ имеем $d(p, q_n) = 0$ для всех $n$. Так как $q_n \in J^+(p)$, то, согласно следствию 3.14, найдется направленная в будущее изотропная геодезическая $\gamma_n$ из $p$ в $q_n$. Продолжим каждую $\gamma_n$ через $q_n$ до непродолжаемой в будущее непространственноподобной кривой, по-прежнему обозначаемой через $\gamma_n$. Пусть $\gamma$ — непродолжаемая в будущее непространственноподобная кривая, предельная для последовательности $\{\gamma_n\}$, существование которой гарантирует предложение 2.18, $\gamma(0) = p$. Используя предложение 2.21 и тот факт, что $q_n$ расходятся к бесконечности, можно показать подобно тому, как это делалось при доказательстве теоремы 7.10, что если $q$ — произвольная точка на $\gamma$, удовлетворяющая условиям $q \neq p$, $q \geqslant p$, то $L(\gamma[p, q]) = d(p, q)$. Поэтому $\gamma$ можно перепараметризовать в изотропный геодезический луч, исходящий из $p$, что и приводит к необходимому противоречию. Значит, $E^+(p)$ компактно.

Покажем теперь, что $E^+(p)$ причинно разделяет $(M, g)$. Из компактности $E^+(p)$ вытекает, что множество $\{p\}$ является ловушечным в будущем в $M$. Тем самым, согласно следствию 7.16, найдется непродолжаемая в будущее времениподобная кривая $\gamma$, целиком содержащаяся в $D^+(E^+(p))$. Продолжим $\gamma$ до непродолжаемой как в прошлое, так и в будущее времениподобной кривой, за которой сохраним прежнее обозначение $\gamma$. Из определения $D^+(E^+(p))$ вытекает, что кривая $\gamma$ должна пересечь $E^+(p)$ в некоторой точке $r$. Вследствие того что $E^+(p)$ ахронально и $\gamma$ вре-

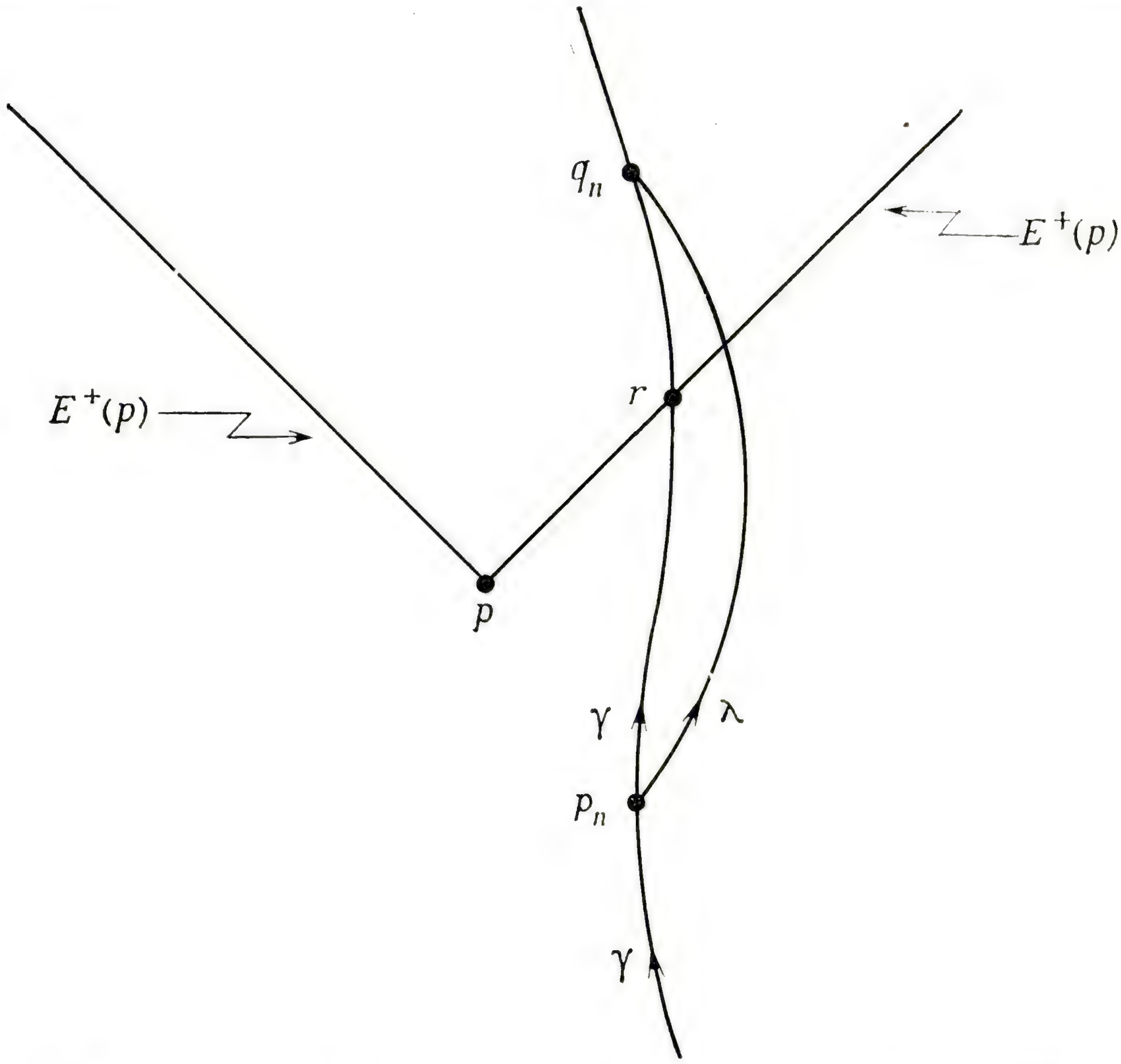



Рис. 7.2. В доказательстве предложения 7.18 показано, что множество $E^+(p)$ причинно разделяет $(M, g)$, если $p$ не является начальной точкой никакого направленного в будущее изотропного геодезического луча. Времениподобная кривая $\gamma$ пересекает $E^+(p)$ в единственной точке $r$, и любая непространственноподобная кривая $\lambda$ из $p_n$ в $q_n$ должна встретить $E^+(p)$.

мениподобна, $\gamma$ встречает $E^+(p)$ только в точке $r$. Пусть $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ — две последовательности точек на $\gamma$, расходящиеся к бесконечности, причем так, что $p_n \ll r \ll q_n$ для каждого $n$ (см. предложение 2.9). Чтобы показать, что $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ и $E^+(p)$ причинно разделяют $(M, g)$, нужно убедиться в том, что для каждого $n$ любая непространственноподобная кривая $\lambda$: $[0, 1] \to M$, у которой $\lambda(0) = p_n$ и $\lambda(1) = q_n$, пересекает $E^+(p)$. Продолжим $\lambda$ до непродолжаемой в прошлое кривой $\tilde{\lambda}$, которая получится, если сначала пройги по $\gamma$ вплоть до $p_n$, а затем по $\lambda$ от $p_n$ до $q_n$ (рис. 7.2). Так как $q_n \in D^+(E^+(p))$, то кривая $\tilde{\lambda}$ должна пересекать $E^+(p)$. Вследствие того что $\gamma$ встречает $E^+(p)$ только в $r$, $\lambda$ пересекает $E^+(p)$. Поэтому $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ и $K = E^+(p)$ причинно разделяют $(M, g)$, как и требовалось. □

Объединяя теорему 7.13 и предложение 7.18, получим следующий результат о геодезической структуре сильно причинных

пространственно-временных многообразий, не содержащих изотропных геодезических лучей. Примерами таких многообразий являются статические вселенные Эйнштейна (пример 4.11).

**Теорема 7.19.** *Пусть* $(M, g)$ — *сильно причинное пространство-время, ни одна точка которого не является начальной ни для какого направленного в будущее изотропного геодезического луча. Тогда* $(M, g)$ *содержит времениподобную геодезическую прямую.*

*Доказательство.* Согласно предложению 7.18, $(M, g)$ причинно разделяемо. Поэтому в силу теоремы 7.13 $(M, g)$ содержит непространственноподобную прямую. По предположению прямая линия должна быть времениподобной, а не изотропной. □

Эквивалентный результат можно сформулировать, используя предположение о том, что ни одна точка не является начальной точкой никакого направленного в прошлое геодезического луча.

Используя предложения 7.14 и 7.18, мы можем показать теперь, что все двумерные глобально гиперболические пространственно-временные многообразия причинно разделяемы. Установим сначала следующую лемму.

**Лемма 7.20.** *Пусть* $(M, g)$ — *двумерное глобально гиперболическое пространство-время. Если* $E^+(p)$ (*соответственно* $E^-(p)$) *некомпактно, то обе изотропные геодезические, и направленные в будущее* (*соответственно в прошлое*), *и непродолжаемые в будущее* (*соответственно в прошлое*), *начинающиеся в точке* $p$, *максимальны.*

*Доказательство.* Предположим, что $E^+(p)$ некомпактно для некоторой точки $p \in M$. Пусть $c_1$: $[0, a) \to M$ и $c_2$: $[0, b) \to M$ — две направленные в будущее непродолжаемые в будущее изотропные геодезические, у которых $c_1(0) = c_2(0) = p$. Допустим, что $c_1$ не максимальна. Полагая $t_0 = \sup\{t \in [0, a)\colon d(p, c_1(t)) = 0\}$, имеем $0 < t_0 < a$ вследствие того, что $c_1$ не максимальна, а $(M, g)$ сильно причинно (см. разд. 8.2). Положим $q = c_1(t_0)$ и выберем $t_n \to t_0^+$ так, чтобы $t_n < a$ для всех $n$. Из полунепрерывности снизу лоренцева расстояния имеем $d(p, q) = 0$. Так как $c_1(t_n) \in I^+(p)$, а $(M, g)$ глобально гиперболично, то для каждого $n$ найдется максимальная направленная в будущее времениподобная геодезическая $\gamma_n$ из $p$ в $c_1(t_n)$. Согласно следствию 2.19, последовательность $\{\gamma_n\}$ имеет предельную кривую $\gamma$, являющуюся непространственноподобной геодезической из $p$ в $q$. Кроме того, равенство $d(p, q) = 0$ означает, что $\gamma$ — изотропная геодезическая. Из того, что $\dim M = 2$, вытекает, что $\gamma$ — либо подсегмент геодезической $c_1$, либо подсегмент геодезической $c_2$. Если $\gamma \subset c_2$, то $c_2$ проходит через $q$ при некотором значении пара-

метра $t_0'$. В этом случае $E^+(p) = c_1 \mid [0, t_0] \cup c_2 \mid [0, t_0']$ компактно, и мы приходим к противоречию.

Предположим, что $\gamma \subset c_1$. Пусть $U(q)$ — выпуклая нормальная окрестность точки $q$. Выберем $U(q)$ столь малой, что никакая непространственноподобная кривая, покидающая $U(q)$, никогда не возвращается. Непродолжаемые изотропные геодезические из $U(q)$ можно разделить на два непересекающихся семейства $F_1$ и $F_2$, каждое из которых просто покрывает $U(q)$ (см. разд. 2.4). Пусть $F_1$ — тот класс, который содержит изотропную геодезическую $c_1 \cap U(q)$. Обозначим через $c_3$ единственную изотропную геодезическую из $F_2$, которая содержит $q$. Для некоторого достаточно большого $n$ времениподобная геодезическая $\gamma_n$ должна пересекать $c_3$ в некоторой точке $r$. При этом должно выполняться условие $q \leqslant r$ ввиду того, что если бы $r \leqslant q$, то $p \ll r$ привело бы к $p \ll q$, которое неверно. Однако условия $q \leqslant r$, $q = c_1 \cap c_2$, $q \leqslant c_1(t_n)$ и $r \in c_3$ означают, что $r \not\ll c_1(t_n)$ (см. Буземан и Бим (1966, с. 245)). Это противоречит тому, что $r \ll c_1(t_n)$, так как $r$ появляется на времениподобной геодезической $\gamma_n$ прежде $c_1(t_n)$. Это и завершает доказательство леммы. □

**Теорема 7.21.** *Все двумерные глобально гиперболические пространства причинно разделяемы.*

*Доказательство.* Пусть $(M, g)$ — двумерное глобально гиперболическое пространство-время. Если для некоторой точки $p_0 \in M$ множество $E^+(p_0)$ компактно, то каждая направленная в будущее изотропная геодезическая, начинающаяся в $p_0$, имеет точку раздела и поэтому не может быть глобально максимальной (см. разд. 8.2). Поэтому в силу предложения 7.18 $(M, g)$ причинно разделяемо.

Предположим теперь, что $E^+(p)$ некомпактно для всех $p \in M$. Пусть $c: (a, b) \to M$ — направленная в будущее непродолжаемая изотропная геодезическая. Пусть далее $s$ и $t$ удовлетворяют условию $a < s \leqslant t < b$, а в остальном произвольны. Применяя к точке $p = c(s)$ лемму 7.20, находим, что $c \mid [s, b)$ максимален и поэтому $d(c(s), c(t)) = L(c \mid [s, t])$. Это означает, что $c$ максимальна, и, следовательно, $c$ — изотропная прямая. Используя предложение 7.14, получаем, что $(M, g)$ причинно разделяемо. □

Сформулируем следствие из теорем 7.13 и 7.21.

**Следствие 7.22.** *Пусть $(M, g)$ — произвольное глобально гиперболическое пространство-время размерности 2. Тогда $(M, g)$ содержит непространственноподобную прямую.*

Глава 8

# ЛОРЕНЦЕВО МНОЖЕСТВО РАЗДЕЛА

Пусть $c$: $[0, \infty) \to N$ — геодезическая в полном римановом многообразии с начальной точкой $p = c(0)$. Рассмотрим на $c$ множество всех точек $q$, для которых часть кривой $c$ от $p$ до $q$ является единственной кратчайшей среди всех кривых в $N$, соединяющих $p$ и $q$. Если это множество имеет наиболее удаленную от $p$ предельную точку, то эта предельная точка называется *точкой раздела* для $p$ вдоль луча $c$. Множество раздела $C(p)$ определяется как множество точек раздела для $p$ вдоль всевозможных геодезических лучей, начинающихся в $p$. Вследствие того что негомотетичные конформные преобразования не сохраняют предгеодезических, множество раздела точки в многообразии *не* является конформным инвариантом.

Множество раздела играет ключевую роль в современной глобальной римановой геометрии, особенно в связи с теоремой о сфере Рауха (1951), Клингенберга (1959, 1961) и Берже (1960). Понятие точки раздела как противопоставление связанному с ним, но отличному понятию сопряженной точки было впервые определено Пуанкаре (1905). Наблюдение Пуанкаре, опубликованное в 1905 г. и оказавшееся важным для последующих работ Рауха, Клингенберга и Берже, состояло в том, что если для полного риманова многообразия точка $q$ содержится в множестве раздела точки $p$, то либо $q$ сопряжена $p$, либо существуют по крайней мере два геодезических сегмента одной и той же кратчайшей длины, соединяющие $p$ и $q$ (см. Уайтхед (1935)). Клингенберг (1959, с. 657) показал, что если $q$ — ближайшая к $p$ точка раздела и $q$ не сопряжена $p$, то существует геодезическая петля, начинающаяся в $p$ и содержащая $q$. Клингенберг использовал этот результат для того, чтобы получить оценку сверху для радиуса инъективности полного риманова многообразия положительной кривизны через нижнюю грань секционной кривизны и длину наикратчайшей нетривиальной гладкой замкнутой геодезической на $N$.

Важность множества раздела в римановой геометрии наводит на мысль изучения аналогичных понятий и результатов для времениподобных и изотропных геодезических в пространственно-временных многообразиях. Ведущая роль, которую играют в тео-

рии сингулярностей в общей теории относительности тесно связанные с точками раздела сопряженные точки (см. гл. 11), подтверждает эту мысль. Несмотря на большое сходство между римановым множеством раздела и времениподобным множеством точек раздела, между римановым и лоренцевым множествами раздела есть также и поразительные различия. Наиболее значительным является то, что точки изотропного раздела инвариантны относительно конформных преобразований. Таким образом, множество изотропного раздела является инвариантом причинной структуры пространства-времени $(M, g)$. Это можно использовать для того, чтобы показать (см. Бим и Эрлих (1979а, следствие 5.3)), что если $(M, g)$ — космологическая модель Фридмана, то в пространстве $C(M, g)$ лоренцевых метрик для $M$, глобально конформных $g$, существует $C^2$-окрестность $U(g)$, у которой каждая изотропная геодезическая в $(M, g_1)$ является неполной для любой метрики $g_1 \in U(g)$.

Ввиду существенных различий между изотропными и времениподобными точками раздела предпочтительно изучать эти случаи по отдельности. Одно из таких отличий состоит в том, что в противоположность точкам изотропного раздела точки времениподобного раздела неинвариантны при глобальных конформных преобразованиях лоренцевой метрики.

В разд. 8.1 мы рассмотрим аналог риманова множества раздела для времениподобных геодезических. В лоренцевом переложении времениподобные геодезические локально максимизируют длину дуги между любыми двумя своими точками. Поэтому при определении точек времениподобного раздела уместно задаться вопросом: является часть данного времениподобного геодезического сегмента от $p$ до $q$ *наидлиннейшей* непространственноподобной кривой среди *всех* кривых в $M$, соединяющих $p$ с $q$? Это можно удобно сформулировать при помощи лоренцевой функции расстояния. Пусть $\gamma$: $[0, a) \to M$ — направленная в будущее непродолжаемая в будущее времениподобная геодезическая в произвольном пространстве-времени. Положим $t_0 = \sup \{t \in [0, a)\colon d(\gamma(0), \gamma(t)) = L(\gamma | [0, t])\}$. Если $0 < t_0 < a$, то $\gamma(t_0)$ называется *точкой времениподобного раздела в будущем* для точки $\gamma(0)$ вдоль $\gamma$. Точка времениподобного раздела в будущем $\gamma(t_0)$ обладает требуемыми свойствами: (а) если $t < t_0$, то $\gamma | [0, t]$ является единственной с точностью до перепараметризации максимальной времениподобной кривой из $\gamma(0)$ в $\gamma(t)$; (б) $\gamma | [0, t]$ максимальна для любого $t \leqslant t_0$; (в) если $t > t_0$, то найдется направленная в будущее непространственноподобная кривая $\sigma$, идущая из $\gamma(0)$ в $\gamma(t)$ и удовлетворяющая неравенству $L(\sigma) > L(\gamma | [0, t])$; (г) точка раздела в будущем $\gamma(t_0)$ совпадает или предшествует первой точке, сопряженной в будущем точке $\gamma(0)$ вдоль $\gamma$.

Ввиду того что многие теоремы для римановых точек раздела справедливы только для полных римановых многообразий, представляется совсем неудивительным, что более «глобальные» результаты, приводимые во второй половине разд. 8.1, часто требуют глобальной гиперболичности. И здесь существенно выяснить — можно ли хронологически связанные точки, находящиеся на произвольно больших расстояниях, соединить максимальными времениподобными геодезическими сегментами. Даже в этом случае доказательства для пространственно-временны́х многообразий носят более технический характер, чем для римановых многообразий. Вместо того чтобы, как в римановой геометрии, прямо использовать экспоненциальное отображение, необходимо рассмотреть последовательность максимальных времениподобных геодезических как последовательность непространственноподобных кривых, выделить предельную кривую, взять подпоследовательность, сходящуюся к этому пределу в $C^0$-топологии (см. разд. 2.3), и, наконец, используя полунепрерывность сверху длины дуги, доказать, что предельная кривая является максимальной и, значит, геодезической. Этот технический прием, выделенный в лемму 8.6, дает следующий аналог теоремы Пуанкаре, известной для полных римановых многообразий. Если $(M, g)$ — глобально гиперболическое пространство-время и $q$ является точкой раздела в будущем для $p$ вдоль времениподобного геодезического сегмента $c$ из $p$ в $q$, то выполняются одно или оба следующих утверждения: (а) $q$ — первая точка, сопряженная $p$ в будущем, или (б) существует не менее двух максимальных геодезических сегментов из $p$ в $q$.

В разд. 8.2 мы изучим точки изотропного раздела. Несмотря на то что изотропные геодезические имеют нулевую длину дуги, точки изотропного раздела можно определить при помощи лоренцевой функции расстояния. Пусть $\gamma\colon [0, a) \to M$, $\gamma(0) = p$, — направленная в будущее непродолжаемая в будущее изотропная геодезическая. Положим $t_0 = \sup\{t \in [0, a)\colon d(p, \gamma(t)) = 0\}$. Если $0 < t_0 < a$, то $\gamma(t_0)$ называется *точкой изотропного раздела в будущем* для $\gamma(0)$ вдоль $\gamma$. Точка изотропного раздела, если она существует, обладает следующими свойствами: (а) $\gamma$ максимизирует длину дуги вплоть до точки изотропного раздела, включая последнюю; (б) для любого $t \leqslant t_0$ не существует никакой времениподобной кривой, соединяющей $p$ с $\gamma(t)$; (в) если $t_0 < t < a$, то существует времениподобная кривая из $\gamma(0)$ в $\gamma(t)$; (г) точка изотропного раздела в будущем совпадает с первой точкой, сопряженной $\gamma(0)$ вдоль $\gamma$ в будущем, или предшествует ей. Для глобально гиперболических пространственно-временных многообразий аналог теоремы Пуанкаре для полных римановых многообразий выполняется как для точек изотропного раздела, так и для точек времениподобного раздела. Следовательно, если

$(M, g)$ глобально гиперболично и $q$ — точка изотропного раздела точки $p = \gamma(0)$ в будущем вдоль изотропной геодезической $\gamma$, то выполняется хотя бы одно из следующих свойств: (а) $q$ — первая точка, сопряженная точке $p$ в будущем вдоль $\gamma$, или (б) существуют по крайней мере два максимальных изотропных геодезических сегмента, соединяющих $p$ и $q$. Мы завершим разд. 8.2, показывая (следуя Биму и Эрлиху (1979а, разд. 5)), как можно применять точки изотропного раздела к доказательству теорем о сингулярностях для изотропных геодезических.

Множество непространственноподобного раздела — объединение множеств изотропного и времениподобного раздела в данной точке — изучается в разд. 8.3. Для полных римановых многообразий известно, что если $q$ — ближайшая к $p$ точка раздела, то либо $q$ сопряжена $p$, либо существует геодезическая петля, начинающаяся в $p$ и проходящая через $q$. Однако глобально гиперболический аналог этого результата (теорема 8.24) имеет несколько иной оттенок. Если $(M, g)$ — глобально гиперболическое пространство-время и $q \in M$ — ближайшая к $p$ точка (непространственноподобного) раздела, то либо $q$ сопряжена $p$, либо $q$ — точка *изотропного* раздела для $p$. Поэтому ближайшей несопряженной точки времениподобного раздела для $p$ не существует. Мы покажем также, что для глобально гиперболических пространственно-временных многообразий множества непространственноподобного и изотропного разделов замкнуты (предложение 8.29). Причем можно будет убедиться (пример 8.28), что предположение о глобальной гиперболичности здесь существенно.

## 8.1. Множество времениподобного раздела

Напомним, что направленная в будущее непространственноподобная кривая $\gamma$ из $p$ в $q$ называется максимальной, если $d(p, q) = L(\gamma)$. Выше мы видели, что максимальную направленную в будущее непространственноподобную кривую можно путем перепараметризации сделать геодезической (теорема 3.13). Напомним также аналог одного классического результата из римановой геометрии. Доказательство этого утверждения можно провести, следуя Кобаяси (1967, с. 99). При этом вместо минимального геодезического сегмента из $p_1$ в $p_2$ в римановом доказательстве нужно использовать следующий факт. Если $p \ll q$ и точки $p$, $q$ содержатся в выпуклой нормальной окрестности, то их можно соединить максимальным времениподобным геодезическим сегментом, лежащим в этой окрестности.

**Лемма 8.1.** *Пусть $c$: $[0, a] \to M$ — максимальный времениподобный геодезический сегмент. Тогда для любых $s$ и $t$, связанных условием $0 \leqslant s < t < a$, $c \mid [s, t]$ является единственным (с точ-*

*ностью до параметризации) максимальным геодезическим сегментом из $c(s)$ в $c(t)$.*

Прежде чем начинать изучение множества времениподобного раздела, необходимо определить наблюдаемое в будущем единичное расслоение $T_{-1}M$ (см. Торп (1977а, 1977б)).

**Определение 8.2.** Положим $T_{-1}M = \{v \in TM\colon g(v, v) = -1$ и вектор $v$ направлен в будущее$\}$. Будем обозначать через $T_{-1}M|_p$ слой $T_{-1}M$ в точке $p \in M$. Кроме того, для данного $v \in T_{-1}M$ обозначим через $c_v$ единственную времениподобную геодезическую, у которой $c_v'(0) = v$.

Непосредственно из неравенства треугольника следует, что если $\gamma\colon [0, a) \to M$ — направленная в будущее непространственноподобная геодезическая и $d(\gamma(0), \gamma(s)) = L(\gamma \mid [0, s])$, то $d(\gamma(0), \gamma(t)) = L(\gamma \mid [0, t])$ для всех $t$, удовлетворяющих условию $0 \leqslant t \leqslant s$. Кроме того, из неравенства треугольника вытекает также, что если $d(\gamma(0), \gamma(s)) > L(\gamma \mid [0, s])$, то $d(\gamma(0), \gamma(t)) > L(\gamma \mid [0, t])$ для всех $t$, удовлетворяющих условию $s \leqslant t < a$. Поэтому имеет смысл следующее

**Определение 8.3.** Определим функцию $s\colon T_{-1}M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ посредством формулы $s(v) = \sup\{t \geqslant 0\colon \ d(\pi(v), \ c_v(t)) = t\}$.

Нетрудно заметить прежде всего, что если $d(p, p) = \infty$, то $s(v) = 0$ для всех $v \in T_{-1}M$, для которых $\pi(v) = p$. Кроме того, если $(M, g)$ сильно причинно, то $s(v) > 0$ для всех $v \in T_{-1}M$. Число $s(v)$ можно интерпретировать как «наибольшее» значение параметра $t$, для которого $c_v$ является максимальной геодезической между $c_v(0)$ и $c_v(t)$. Действительно, из леммы 8.1 легко вытекает

**Следствие 8.4.** *Для значений параметра $t$, подчиненных условию $0 < t < s(v)$, геодезическая $c_v\colon [0, t] \to M$ является единственной (с точностью до перепараметризации) максимальной времениподобной кривой из $c_v(0)$ в $c_v(t)$.*

Для произвольных пространственно-временных многообразий функция $s$ не может быть полунепрерывной снизу, в чем легко убедиться, выбрасывая точку из пространства Минковского. Но для времениподобно геодезически полных пространственно-временных многообразий выполняется следующее утверждение.

**Предложение 8.5.** *Если $(M, g)$ времениподобно геодезически полно, то функция $s\colon T_{-1}M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ полунепрерывна сверху.*

*Доказательство.* Достаточно показать следующее. Пусть $v_n \to v$ в $T_{-1}M$ так, что $\{s(v_n)\}$ сходится в $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Тогда $s(v) \geqslant \lim s(v_n)$. Если $s(v) = \infty$, то неравенство очевидно. Предпо-

ложим поэтому, что $s(v) < \infty$ и $s(v) < \lim s(v_n) = A$, и построим противоречие.

Можно выбрать $\delta > 0$ так, чтобы $s(v) + \delta < A$, и считать, что $s(v_n) \geqslant s(v) + \delta = b$ для всех $n$. Положим $c_n = c_{v_n}$. Из того, что $b \leqslant s(v_n)$, получаем, что $d(\pi(v_n), c_n(b)) = b$ для всех $n$. В силу условия $v_n \to v$ и полунепрерывности расстояния снизу имеем $d(\pi(v), c_v(b)) \leqslant \underline{\lim}\, d(\pi(v_n), c_n(b))$. Тем самым $d(\pi(v), c_v(b)) \leqslant b = L(c_v \mid [0, b])$; последнее равенство получаем по определению длины дуги. С другой стороны, $d(\pi(v), c_v(b)) \geqslant \geqslant L(c_v \mid [0, b])$, так что $d(\pi(v), c_v(b)) = L(c_v \mid [0, b]) = b$. Отсюда $s(v) \geqslant b = s(v) + \delta$, что и приводит к противоречию. □

Чтобы доказать полунепрерывность $s$ снизу для глобально гиперболических пространственно-временных многообразий, полезно сначала установить следующую лемму.

**Лемма 8.6.** *Пусть $(M, g)$ — глобально гиперболическое пространство-время, а $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ — две бесконечные последовательности точек, для которых $p_n \to p$ и $q_n \to q$, причем $p \ll q$. Пусть $c_n$: $[0, d(p_n, q_n)] \to M$ — нормальный максимальный геодезический сегмент из $p_n$ в $q_n$. Положим $v_n = c_n'(0) \in T_{-1}M$. Тогда последовательность $\{v_n\}$ имеет времениподобный предельный вектор $w \in T_{-1}M$. Более того, $c_w$: $[0, d(p, q)] \to M$ — максимальный геодезический сегмент из $p$ в $q$.*

*Доказательство.* В силу следствия 2.19 существует непространственноподобная направленная в будущее кривая $c$, предельная для последовательности $c_n$ и соединяющая $p$ с $q$. Согласно предложению 2.21 и замечанию 2.22, имеем $L(c) \geqslant \overline{\lim}\, L(c_n) = = \lim d(p_n, q_n) = d(p, q) > 0$. Из неравенства $d(p, q) \geqslant L(c)$ вытекает, что $L(c) = d(p, q) > 0$. Отсюда и из теоремы 3.13 следует, что кривую $c$ можно перепараметризовать в максимальный времениподобный геодезический сегмент из $p$ в $q$. Наконец, $w = = c'(0) / [-g(c'(0), c'(0))]^{1/2}$ — требуемый касательный вектор. □

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы доказать полунепрерывность $s$ снизу для глобально гиперболических пространств.

**Предложение 8.7.** *Если $(M, g)$ глобально гиперболично, то $s$: $T_{-1}M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ полунепрерывна снизу.*

*Доказательство.* Достаточно показать, что из условий $v_n \to v$ в $T_{-1}M$ и $s(v_n) \to A$ в $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ вытекает неравенство $s(v) \leqslant A$. Если $A = \infty$, то утверждение очевидно. Предположим поэтому, что $A < \infty$, и, допуская, что $s(v) > A$, придем к противоречию.

Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $A + \delta < s(v)$. Положим $b_n = s(v_n) + b$ и возьмем $N_0$ таким, чтобы $b_n < s(v)$ для всех $n \geqslant N_0$. Положим $c_n = c_{v_n}$, $p_n = c_n(0)$ и $q = c_v(A + \delta)$. Из того, что $v_n \to v$, а $c_v$ определена для значений параметра, больших $A + \delta$, вытекает, что геодезические $c_n$, начиная с некоторого $N \geqslant N_0$, также должны быть определены для некоторых значений параметра, больших $b_n$. Положим $q_n = c_n(b)$, где $n \geqslant N$. Из того, что $b_n > s(v_n)$, вытекает, что $c_n \mid [0, b_n]$ не может быть максимальной. Так как $M$ является глобально гиперболическим и $c_n(0) \ll c_n(b_n)$, то можно найти максимальные нормальные времениподобные геодезические сегменты $\gamma_n$: $[0, \mathrm{d}(p_n, q_n)] \to M$ из $p_n$ в $q_n$. Положим $w_n = \gamma_n'(0)$. Из того, что $c_v \mid [0, s(v))$ — максимальная геодезическая и, значит, не имеет сопряженных точек, вытекает, что $v$ не может быть предельным направлением для $\{w_n: n \geqslant N\}$. Поэтому максимальная геодезическая $c_w$, соединяющая $p$ с $q$, существование которой обеспечивается леммой 8.6, примененной к $\{w_n\}$, отлична от $c_v$. Это приводит к оценке $s(v) \leqslant A + \delta$, которая противоречит неравенству $A + \delta < s(v)$. $\square$

Приводимый ниже пример сильно причинного пространства-времени, не являющегося глобально гиперболическим, показывает, что условие глобальной гиперболичности в предложении 8.7 является необходимым для полунепрерывности снизу $s$. Пусть на $\mathbb{R}^2$ задана обычная метрика Минковского $ds^2 = dx^2 - dy^2$ и $(M, g)$ — пространство-время, образованное путем оснащения $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, y) \in \mathbb{R}^2: 1 \leqslant y \leqslant 2\}$ индуцированной метрикой (рис. 8.1). Пусть $p = (0, 0)$, $p_n = (1/n, 0)$ и $v = \partial/\partial y|_p$, $v_n = \partial/\partial y|_{p_n}$ для всех $n \geqslant 1$. Тогда $v_n \to v$ при $n \to \infty$. Пусть далее $\gamma(t) = (0, t)$ и $\gamma_n(t) = (p_n, t)$ для всех $t \geqslant 0$. Конформно преобразуя $g$ на указанном на рис. 8.1 компактном множестве C, отделенном от $I^+(p)$ разрезом $\{(1, y) \in \mathbb{R}^2: 1 \leqslant y \leqslant 2\}$, получим для $M$ метрику $\tilde{g}$ со следующими свойствами. Прежде всего, $\gamma$ еще является максимальной геодезической в $(M, \tilde{g})$, так что $s(v) = +\infty$. Но для каждого $n$ существует времениподобная кривая $\sigma_n$, пересекающая множество C и соединяющая точку $p_n$ с точкой $q_n = (1/n, y_n)$, $y_n \leqslant 4$, на $\gamma_n$ так, что $L(\sigma_n) > L(\gamma[p_n, q_n])$. Следовательно, $\gamma[p_n, q_n]$ не может быть максимальной для всех $n$. Отсюда вытекает, что $s(v_n) \leqslant 4$ для всех $n$. Поэтому функция $s$ не является полунепрерывной снизу. Заметим, что $(M, \tilde{g})$ сильно причинно, но не глобально гиперболично вследствие того, что $J^+((1, 0)) \cap J^-((1, 3))$ некомпактно. Аналогичная конструкция, примененная к $n$-мерному пространству Минковского, позволяет построить сильно причинное $n$-мерное пространство-время, для которого функция $s$ не может быть полунепрерывной снизу.

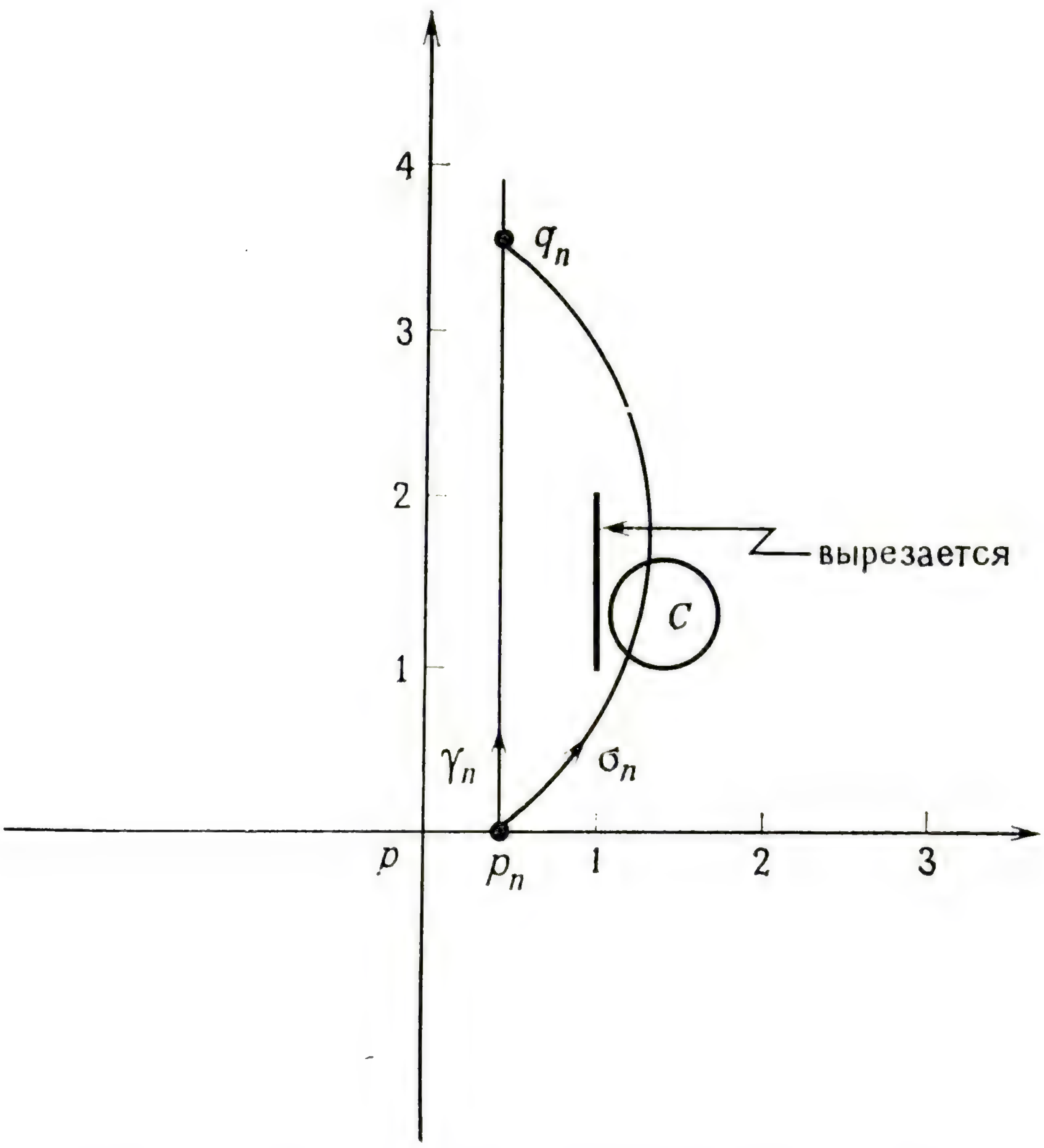



Рис. 8.1. Показано сильно причинное пространство-время $(M, \tilde{g})$, содержащее последовательность $\{v_n\}$ единичных времениподобных касательных векторов $v_n$, которая сходится к $v$, но $s(v) = \infty$ и $s(v_n) \leqslant 4$ для всех $n \geqslant 1$. Поэтому функция $s$: $T_{-1}M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ не является полунепрерывной снизу.

Можно построить также примеры глобально гиперболических пространственно-временны́х многообразий, для которых функция $s$ не является полунепрерывной сверху.

Объединяя предложения 8.5 и 8.7, получаем следующий результат.

**Теорема 8.8.** *Если пространство-время* $(M, g)$ *глобально гиперболично и времениподобно геодезически полно, то* $s$: $T_{-1} M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *непрерывна.*

Теперь мы готовы определить множество времениподобного раздела.

**Определение 8.9.** *Множество времениподобного раздела в будущем* $\Gamma^+(p)$ *в пространстве* $T_pM$ определяется по следующему правилу: $\Gamma^+(p) = \{s(v)\, v\colon v \in T_{-1}M|_p$ и $0 < s(v) < \infty\}$. *Множество времениподобного раздела в будущем* $C_t^+(p)$ *для точки* $p$ *в* $M$ определяется по формуле $C_t^+(p) = \exp_p(\Gamma^+(p))$. Если $0 < s(v) < \infty$ и $c_v(s(v))$ существует, то точка $c_v(s(v))$ называется

*точкой раздела в будущем для* $p = c_v(0)$ *вдоль* $c_v$. *Множество времениподобного раздела в прошлом* $C_t^-(p)$ и *точки раздела в прошлом* определяются аналогично.

Величину $s(v)$ можно интерпретировать как меру расстояния от точки $p$ до точки раздела вдоль $c_v$ в будущем. Таким образом, теорема 8.8 означает, что для глобально гиперболических времениподобно геодезически полных пространственно-временны́х многообразий расстояние от фиксированной точки $p \in M$ до соответствующей ей в направлении $v \in T_{-1}M|_p$ точки раздела в будущем является непрерывной функцией от $v$.

Приведем теперь лоренцевы аналоги двух хорошо известных результатов, связывающих в полных римановых многообразиях точки раздела и сопряженные точки. Следующее свойство сопряженных точек хорошо известно (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 125—129), Лернер (1972, теорема 4 (6))).

**Теорема 8.10.** *Времениподобная геодезическая не является максимальной за первой сопряженной точкой.*

На языке определения 8.9 это можно сформулировать следующим образом.

**Следствие 8.11.** *Точка раздела в будущем для точки* $p = c_v(0)$ *вдоль* $c_v$ *появляется не позже, чем первая точка, сопряженная* $p$ *вдоль* $c_v$ *в будущем.*

Используя этот факт, можно доказать второй основной результат о точках раздела и сопряженных точках в глобально гиперболических пространствах.

**Теорема 8.12.** *Пусть* $(M, g)$ *глобально гиперболично. Если* $q = c(t)$ *является точкой раздела в будущем для точки* $p = c(0)$ *вдоль времениподобной геодезической* $c$ *из* $p$ *в* $q$, *то выполняется хотя бы одно (возможно, и оба) из следующих утверждений:*

(1) $q$ — *первая точка, сопряженная в будущем точке* $p$ *вдоль* $c$.

(2) *Существует по меньшей мере два максимальных времениподобных геодезических сегмента из* $p$ *в* $q$.

*Доказательство.* Без потери общности можно считать, что $c = c_v$ для некоторого $v \in T_{-1}M$, и, значит, $t = d(p, q) = s(v)$. Пусть $\{t_n\}$ — монотонно убывающая последовательность вещественных чисел, сходящаяся к $t$. Из включения $c(t) \in M$ вытекает, что точки $c(t_n)$ существуют для достаточно больших $n$. В силу глобальной гиперболичности $c(0)$ и $c(t_n)$ можно соединить максимальной времениподобной геодезической $c_n = c_{v_n}$, у которой $v_n \in T_{-1}M|_p$. Из того, что $t_n > t = s(v)$, получаем, что $v \neq v_n$ для всех $n$. Пусть $w \in T_{-1}M$ — времениподобный предельный вектор для последовательности $\{v_n\}$ (он существует по лемме 8.6),

Если $v \neq w$, то $c$ и $c_w$ — два максимальных времениподобных геодезических сегмента из $p$ в $q$.

Остается показать, что если $v = w$, то $q$ — первая точка, сопряженная в будущем точке $p$ вдоль $c$. Если $v = w$, то существует подпоследовательность $\{v_m\}$ последовательности $\{v_n\}$, такая, что $v_m \to v$. Если бы $v$ не была сопряженной точкой, то нашлась бы окрестность $U$ вектора $v$ в $T_{-1}M|_p$, отображение $\exp_p$: $U \to M$ которой инъективно. С другой стороны, из того, что $c_n$ и $c \mid [0, t_n]$ соединяют $c(0)$ с $c(t_n)$ и $v_m \to v$, такой окрестности $U$ существовать не может. Поэтому точка $q$ сопряжена точке $p$ вдоль $c$ в будущем. Согласно следствию 8.11, $q$ должна быть первой точкой, сопряженной $p$ вдоль $c$ в будущем. □

Теорема 8.12 имеет непосредственное приложение: для глобально гиперболических пространственно-временных многообразий $q \in C_t^+(p) \Leftrightarrow p \in C_t^-(q)$.

Множество времениподобного раздела полного глобально гиперболического пространства-времени имеет следующее структурное свойство, уточняющее теорему 8.12. Из этой теоремы видно, что если $q \in C_t^+(p)$ и $q$ не является сопряженной $p$, то существует по крайней мере два максимальных геодезических сегмента из $p$ в $q$. В соответствии с этим имеет смысл рассматривать множество

$$\mathrm{Seg}(p) = \{q \in C_t^+(p)\text{: существует по меньшей мере два направленных в будущее максимальных геодезических сегмента из } p \text{ в } q\}.$$

Вследствие того что функция $s$: $T_{-1}M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, согласно теореме 8.8, является непрерывной и в глобально гиперболических пространствах существуют максимальные геодезические, соединяющие произвольную пару причинно связанных точек, можно показать, что $\mathrm{Seg}(p)$ плотно в $C_t^+(p)$ для всех $p \in M$. Доказательство этого факта можно провести, следуя доказательству Уолтером леммы 2 для полных римановых многообразий (см. Уолтер (1979, с. 93)).

Для множества времениподобного раздела в прошлом $C_t^-(p)$ имеет место аналогичный результат.

## 8.2. Множество изотропного раздела

Определение точки изотропного раздела было дано Бимом и Эрлихом (1979а, разд. 5), где это понятие использовалось при доказательстве изотропной геодезической неполноты некоторых классов пространственно-временных многообразий. Пусть $\gamma$: $[0, a) \to (M, g)$ — направленная в будущее изотропная геодезическая, исходящая из точки $p = \gamma(0)$. Положим $t_0 = \sup\{t \in [0, a)\text{: } d(p, \gamma(t)) = 0\}$. В случае если $0 < t_0 < a$, будем называть

точку $\gamma(t_0)$ *точкой изотропного раздела* для точки $p$ на $c$ в будущем. Точки изотропного раздела в прошлом определяются аналогично. Обозначим через $C_N^+(p)$ (соответственно $C_N^-(p)$) *множество изотропного раздела в будущем* (соответственно *в прошлом*) для точки $p$, состоящее из всех точек изотропного раздела для точки $p$ в будущем (соответственно в прошлом). Из определения множества $C_N^+(p)$ и полунепрерывности снизу расстояния вытекает, что $d(p, q) = 0$ для всех $q \in C_N^+(p)$. *Множество непространственноподобного раздела в будущем* определим посредством формулы $C^+(p) = C_t^+(p) \cup C_N^+(p)$. Множество непространственноподобного раздела в прошлом определяется подобным же образом. Для подкласса глобально гиперболических пространств Бьюдик и Сакс (1976) дали другое, но эквивалентное определение точки изотропного раздела при помощи изотропных образующих границы множества $I^+(p)$.

Геометрический смысл точек изотропного раздела схож с геометрическим смыслом точек времениподобного раздела: геодезическая $\gamma$ является максимальной от точки $p$ вплоть до точки раздела $\gamma(t_0)$, включая и ее, т. е. $L(\gamma \mid [0, t]) = d(p, \gamma(t)) = 0$ для всех $t \leqslant t_0$. Таким образом, для любого $t$, $t \leqslant t_0$, времениподобной кривой, которая соединяла бы $p$ с $\gamma(t)$, не существует. Напротив, за точкой раздела $\gamma(t_0)$ геодезическая $\gamma$ не является более максимальной. Действительно, каждую точку $\gamma(t)$, $t_0 < t < a$, можно соединить с $p$ времениподобной кривой.

Используя предложение 2.19 Пенроуза (1972, с. 15) и определение максимальности, можно легко доказать следующую лемму.

**Лемма 8.13.** *Пусть $(M, g)$ — сильно причинное пространство-время. Если существует два изотропных геодезических сегмента, соединяющих $p$ с $q$, то на каждом из них точка $q$ либо совпадает с точкой изотропного раздела для точки $p$, либо расположена за ней.*

Пример цилиндра $S^1 \times \mathbb{R}$ с лоренцевой метрикой $ds^2 = d\theta\, dt$ показывает, что условие причинности многообразия $(M, g)$ в лемме 8.13 нельзя отбросить.

Перейдем к доказательству изотропного аналога леммы 8.6.

**Лемма 8.14.** *Пусть $(M, g)$ глобально гиперболично и $c\colon [0, t] \to (M, g)$ — направленная в будущее изотропная геодезическая, идущая из точки $p = c(0)$ в точку $q = c(t)$, которые связаны условием $d(p, q) = 0$. Предположим, что $p_n \to p$, $q_n \to q$ и $p_n \leqslant q_n$. Пусть $c_n$ — максимальная геодезическая, соединяющая $p_n$ и $q_n$ и имеющая начальное направление $v_n$. Тогда множество направлений $\{v_n\}$ имеет предельное направление $w$ и $c_w$ является максимальной изотропной геодезической из $p$ в $q$.*

*Доказательство.* Применяя следствие 2.19, построим направленную в будущее непространственноподобную предельную кривую $\lambda$ из $p$ в $q$. Кривая $\lambda$ в силу равенства $d(p, q) = 0$ должна удовлетворять условию $L(\lambda) = 0$. Отсюда следует, что $\lambda$ можно перепараметризовать в максимальную изотропную геодезическую. □

Теперь можно получить изотропный аналог теоремы 8.12.

**Теорема 8.15.** *Пусть $(M, g)$ глобально гиперболично и $q = c(t)$ — точка изотропного раздела в будущем для точки $p = c(0)$ вдоль изотропной геодезической $c$. Тогда имеет место хотя бы одно (возможно, и оба) из следующих утверждений:*

(1) *$q$ — первая точка, сопряженная точке $p$ вдоль $c$ в будущем.*

(2) *Существует по меньшей мере два максимальных изотропных геодезических сегмента из $p$ в $q$.*

*Доказательство.* Положим $v = c'(0)$. Пусть $t_n$ — монотонно убывающая последовательность вещественных чисел, $t_n \to t$. В силу включения $q \in M$ точки $c(t_n)$ определены для всех достаточно больших $n$. Из того, что $(M, g)$ глобально гиперболично, вытекает существование максимальных непространственноподобных геодезических $c_n$ с начальными направлениями $v_n$, соединяющих $p$ с $c(t_n)$. Согласно лемме 8.14, множество направлений $\{v_n\}$ имеет предельное направление $w$. Если $v \neq w$, то геодезическая $c_w$ является второй максимальной изотропной геодезической, соединяющей $p$ с $q$, так как $d(p, q) = 0$. Если же $v = w$, то $q$ сопряжена $p$ вдоль $c$. Из равенства $d(p, q) = 0$ вытекает, что точка $q$ должна быть первой сопряженной точкой геодезической $c$ (см. теорему 9.72). □

Покажем теперь, как множество изотропного раздела можно использовать в доказательстве теорем об устойчивости изотропной геодезической неполноты. Наводящие соображения, в известной степени обосновывающие такой подход, состоят, во-первых, в том, что большое число физически интересных пространственно-временных многообразий можно конформно вложить в часть статической вселенной Эйнштейна (см. пример 4.11), свободной от изотропных точек раздела, а во-вторых, в том, что точки изотропного раздела инвариантны относительно конформных преобразований метрики. Глобально конформные вложения пространства-времени де Ситтера 2-го рода и космологических моделей Фридмана описаны Пенроузом (1972а) (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 150—157)).

Сейчас в кратком отступлении мы приведем прямые вычисления, обосновывающие хорошо известный факт, что изотропные предгеодезические инвариантны относительно глобально конформных преобразований. Доказательство конформной инвариантности

точек изотропного раздела можно провести также при помощи лоренцевой функции расстояния.

Напомним, что гладкая кривая $\gamma\colon J \to M$ называется *предгеодезической*, если $\gamma$ можно перепараметризовать в гладкую кривую $c$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению геодезических $\nabla_{c'} c'(t) = 0$. Напомним также следующее

**Определение 8.16.** Диффеоморфизм $f\colon (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ многообразия $M_1$ на многообразие $M_2$ называется *глобально конформным диффеоморфизмом*, если существует гладкая функция $\Omega\colon M \to \mathbb{R}$, такая, что

$$f^* g_2 = e^{2\Omega} g_1.$$

Пространство-время $(M_1, g_1)$ называется *глобально конформно диффеоморфным открытому подмножеству* $U$ пространства-времени $(M_2, g_2)$, если существуют диффеоморфизм $f\colon M_1 \to U$ и гладкая функция $\Omega\colon M_1 \to \mathbb{R}$, такие, что

$$f^* (g_2 \mid U) = e^{2\Omega} g_1.$$

Использование в определении 8.16 вместо положительно определенной функции множителя вида $e^{2\Omega}$ необходимо для того, чтобы дать возможно более простую формулу, описывающую зависимость между связностью $\nabla$ для $(M_1, g_1)$ и связностью $\tilde{\nabla}$ для $(M_2, g_2)$. Можно показать непосредственно, что если $f^* g_2 = e^{2\Omega} g_1$, где $f\colon (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ — гладкое отображение, то

$$\tilde{\nabla}_{f_* X} f_* Y \,|_{f(p)} = f_* \nabla_X Y \,|_p + X_p(\Omega) f_* Y(p) + \\ + Y_p(\Omega) f_* X(p) - g_1(X(p), Y(p)) f_* (\operatorname{grad} \Omega(p)) \quad (8.1)$$

для любой пары $X$, $Y$ векторных полей на $M_1$. Здесь через $\operatorname{grad} \Omega$ обозначено векторное поле градиента функции $\Omega$ относительно метрики $g_1$ на $M_1$.

При помощи формулы (8.1) можно показать, что если $\gamma\colon J \to M_1$ — изотропная геодезическая в $(M_1, g_1)$, то $\sigma = f \circ \gamma\colon J \to M_2$ — изотропная предгеодезическая в $(M_2, g_2)$. Суть дела в том, что так как $\gamma'(t)$ изотропен и $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$, то формула (8.1) упрощается:

$$\tilde{\nabla}_{\sigma'} \sigma'(t) = 2\gamma'(t)(\Omega)\, \sigma'(t),$$

где $t \in J$ любое. Заметим, однако, что если $\gamma$ была бы времениподобной, то множитель $g_1(\gamma', \gamma') f_* (\operatorname{grad} \Omega)$ в формуле (8.1) препятствовал бы тому, чтобы $f \circ \gamma$ была времениподобной предгеодезической в $(M_2, g_2)$.

**Лемма 8.17.** *Пусть $f\colon (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ — глобально конформный диффгоморфизм $M_1$ на $M_2$. Тогда $\gamma\colon J \to (M_1, g_1)$ является изотропной предгеодезической в $(M_1, g_1)$ в том и только*

*том случае, когда* $f \circ \gamma$ *является изотропной предгеодезической в* $(M_2, g_2)$.

*Доказательство.* Ввиду того что $f^{-1}$: $(M_2, g_2) \to (M_1, g_1)$ также является конформным диффеоморфизмом, достаточно показать, что если $\gamma$: $J \to M_1$ — изотропная геодезическая, то $\sigma = f \circ \gamma$ — изотропная предгеодезическая в $(M_2, g_2)$, т. е. мы должны показать, что в пространстве-времени $(M_2, g_2)$ $\sigma$ можно перепараметризовать в изотропную геодезическую. Однако уже было показано, что для некоторой гладкой функции $f$: $J \to \mathbb{R}$

$$\tilde{\nabla}_{\sigma'} \sigma'(t) = f(t)\, \sigma'(t). \tag{8.2}$$

Так же как и в классической теории проективно эквивалентных связностей в римановой геометрии, формула (8.2) означает, что $\sigma$ — предгеодезическая (см. Спивак (1970, с. 6-35—6-37)). □

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы доказать конформную инвариантность точек изотропного раздела относительно глобально конформных диффеоморфизмов $f$: $(M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$. Заметим, что если $(M_1, g_1)$ ориентировано во времени векторным полем $X_1$, то $(M_2, g_2)$ ориентировано во времени либо векторным полем $X_2 = f_* X_1$, либо $-X_2$. Если $M_2$ ориентировано во времени полем $X_2$, то $f$ отображает направленные в будущее кривые в направленные в будущее кривые, и поэтому точки изотропного раздела в будущем (соответственно в прошлом) переходят в точки изотропного раздела в будущем (соответственно в прошлом) (см. предложение 8.18). Напротив, если $M_2$ ориентировано во времени полем $-X_2$, то $f$ отображает точки изотропного раздела в будущем (соответственно в прошлом) в точки изотропного раздела в прошлом (соответственно в будущем) вследствие того, что при отображении $f$ кривые, направленные в будущее, переходят в кривые, направленные в прошлое.

**Предложение 8.18.** *Пусть* $f$: $(M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ — *глобально конформный диффеоморфизм* $(M_1, g_1)$ *на* $(M_2, g_2)$. *Пусть* $\gamma$: $[0, a) \to (M_1, g_1)$ — *изотропная геодезическая на* $M_1$. *Если* $q = \gamma(t_0)$ — *точка изотропного раздела для точки* $p = \gamma(0)$ *вдоль геодезической* $\gamma$, *то* $f(q)$ *является точкой изотропного раздела для* $f(p)$ *вдоль изотропной предгеодезической* $f \circ \gamma$: $[0, a) \to (M_2, g_2)$.

*Доказательство.* Достаточно предположить, что $q$ является точкой изотропного раздела для точки $p$ вдоль $\gamma$ в будущем и что $(M_2, g_2)$ ориентировано во времени так, что $f \circ \gamma$ является направленной в будущее изотропной кривой в $(M_2, g_2)$. Перепараметризуем $f \circ \gamma$ в направленную в будущее изотропную геодезическую $\sigma$: $[0, b) \to (M_2, g_2)$, что возможно в силу леммы 8.17, при этом так, чтобы $f(p) = \sigma(0)$. Тогда $f(q) = \sigma(t_1)$ для некоторого $t_1 \in (0, b)$.

Обозначим через $d_i$ лоренцеву функцию расстояния пространства-времени $(M_i, g_i)$, $i = 1, 2$.

Покажем сначала, что $d_2(\sigma(0), \sigma(t)) = 0$ для любого $t$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Предположим противное: $d_2(\sigma(0), \sigma(t)) \neq 0$ для некоторого $t$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Тогда в $M_2$ можно найти направленную в будущее непространственноподобную кривую $\beta$ из $\sigma(0)$ в $\sigma(1)$, для которой $L_{g_2}(\beta) > 0$. Тогда $f^{-1} \circ \beta$ является направленной в будущее непространственноподобной кривой в $M_1$ из $p$ в $f^{-1}(\sigma(t))$, длина которой $L_{g_1}(f^{-1} \circ \beta) > 0$. Вследствие равенства $f(q) = \sigma(t_1)$ для некоторого $t_2 \leqslant t_0$ имеем $f^{-1}(\sigma(t)) = \gamma(t_2)$. Отсюда следует, что $d_1(p, \gamma(t_2)) \geqslant L_{g_1}(f^{-1} \circ \beta) > 0$. Но это противоречит тому, что $d_1(p, \gamma(t_2)) = 0$. Последнее справедливо в силу того, что $t_2 \leqslant t_0$ и $\gamma(t_0) = q$ — точка изотропного раздела для $p$ вдоль $\gamma$ в будущем.

Покажем теперь, что $d_2(\sigma(0), \sigma(t)) \neq 0$ для любого $t > t_1$, т. е. $f(q) = \sigma(t_1)$ является точкой изотропного раздела в будущем для точки $f(p)$ вдоль $\sigma$, как и требуется. Зафиксируем для этого $t > t_1$. Тогда найдется $t_2 > t_0$, для которого $f^{-1}(\sigma(t)) = \gamma(t_2)$. В силу того что $\gamma(t_0) = q$ — точка изотропного раздела в будущем для $p$ вдоль $\gamma$, имеем $d_1(p, \gamma(t_2)) > 0$. Значит, существует направленная в будущее непространственноподобная кривая $\alpha$ из $p$ в $\gamma(t_2)$ длиной $L_{g_1}(\alpha) > 0$. Тогда $f \circ \alpha$ — направленная в будущее непространственноподобная кривая из $f(p)$ в $\sigma(t)$. Следовательно, $d_2(f(p), \sigma(t)) \geqslant L_{g_2}(f \circ \alpha) > 0$, как и требовалось. $\square$

Доказав предложение 8.18, мы имеем все основания использовать множество изотропного раздела для изучения изотропной геодезической неполноты. Напомним, что геодезическая называется неполной, если ее нельзя продолжить на все значения аффинного параметра (см. определение 5.2).

Пусть $R$ и Ric — соответственно тензор кривизны и тензор кривизны Риччи пространства-времени $(M, g)$. Говорят, что непродолжаемая изотропная геодезическая $\gamma$ удовлетворяет типовому условию, если для некоторого значения параметра $t$ существует ненулевой касательный вектор $v \in T_{\gamma(t)}M$, подчиненный условию $g(v, \gamma'(t)) = 0$ и такой, что вектор $R(v, \gamma'(t))\gamma'(t)$ ненулевой и непропорционален $\gamma'(t)$ (см. определение 11.7, разд. 11.2). В частности, если $\mathrm{Ric}(v, v) > 0$ для всех изотропных векторов $v \in TM$, то каждая непродолжаемая изотропная геодезическая пространства-времени $(M, g)$ удовлетворяет типовому условию. В разд. 11.2 будет показано, что для выполнения изотропного типового условия требование $\dim M \geqslant 3$ необходимо. Поэтому в следующем предложении мы будем предполагать, что $\dim M \geqslant 3$.

**Предложение 8.19.** *Пусть $(M, g)$ — пространство-время размерности $\geqslant 3$, такое, что все непродолжаемые изотропные гео-*

*дезические удовлетворяют типовому условию и* Ric $(v, v) > 0$ *для всех изотропных векторов. Если* $(M, g)$ *глобально конформно диффеоморфно открытому подмножеству пространства-времени* $(M', g')$, *не имеющему точек изотропного раздела, то все изотропные геодезические* $(M, g)$ *неполны.*

*Доказательство.* В предложении 4.4.5 Хокинга и Эллиса (1977, с. 115) показано, что если кривизна Риччи неотрицательна на всех изотропных векторах, то каждая полная изотропная геодезическая, удовлетворяющая типовому условию, имеет сопряженные точки (см. предложение 11.17). Так как максимальные геодезические не содержат сопряженных точек, то для доказательства неполноты всех изотропных геодезических пространства-времени $(M, g)$ необходимо убедиться только в том, что каждая из них максимальна. Предположим, что направленная в будущее изотропная геодезическая $\gamma$ из $p$ в $q$ не максимальна. Тогда существует времениподобная кривая, соединяющая $p$ с $q$. В силу того что конформный диффеоморфизм переводит изотропные геодезические в изотропные предгеодезические, а времениподобные кривые во времениподобные кривые, образ $\gamma$ должен быть немаксимальной изотропной геодезической в пространстве-времени $(M', g')$. Это означает, что $(M', g')$ имеет точку изотропного раздела, что и приводит к противоречию. □

Напомним, что четырехмерная статическая вселенная Эйнштейна (пример 4.11) представляет собой цилиндр $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$, вложенный в $\mathbb{R}^5$ с метрикой, индуцированной на нем метрикой Минковского $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$. Тем самым статическая вселенная Эйнштейна есть $\mathbb{R} \times S^3$ с метрикой лоренцева произведения. Геодезические и точки изотропного раздела в этом пространстве-времени легко определяются. Множество изотропного раздела точки $(t, x, y, z, w)$ состоит просто из двух точек $(t \pm \pi, -x, -y, -z, -w)$. Следовательно, подмножество $M' = \{(t, x, y, z, w)\colon 0 < t < \pi,\ x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$ обладает тем свойством, что $C_N(p) \cap M' = \varnothing$ для всех $p \in M'$. Из предложения 8.19 вытекает тогда следующее утверждение.

**Следствие 8.20.** *Пусть* $(M, g)$ — *пространство-время, у которого все изотропные геодезические удовлетворяют типовому условию и* Ric $(v, v) > 0$ *для всех изотропных векторов. Если* $(M, g)$ *глобально конформно диффеоморфно некоторой части подмножества* $M'$ *статической вселенной Эйнштейна, то все изотропные геодезические* $(M, g)$ *неполны.*

Так как пространство-время Минковского свободно от точек изотропного раздела, то сформулированный выше результат оста-

нется справедливым, если заменить $M'$ на пространство-время Минковского.

В космологии пространства Фридмана используются в качестве моделей вселенной. При этом предполагается, что вселенная наполнена идеальной жидкостью, имеющей нулевое давление. Будем также предполагать, что для этих моделей космологическая постоянная $\Lambda$ равна нулю. Тогда эти пространства являются пространствами Робертсона—Уокера (разд. 4.4), у которых $p = \Lambda = 0$. Эти пространства можно конформно вложить в определенное выше подмножество $M'$ статической вселенной Эйнштейна (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 157—158)). Более того, для всех непространственноподобных векторов в космологической модели Фридмана $(M, g)$ $\mathrm{Ric}(g)(v, v) > 0$. Согласно предложению 6.3, существует $C^2$-окрестность $U(g)$ метрики $g$ в $C(M, g)$, в которой для всех $g_1 \in U(g)$ выполняется неравенство $\mathrm{Ric}(g_1)(v, v) > 0$. Ввиду того что из $\mathrm{Ric}(g_1)(v, v) > 0$ вытекает выполнение типового условия в $(M, g_1)$ всеми изотропными геодезическими, следствие 8.20 приводит к следующему результату.

**Следствие 8.21.** *Пусть* $(M, g)$ — *космологическая модель Фридмана. Тогда существует* $C^2$-*окрестность* $U(g)$ *метрики* $g$ *в* $C(M, g)$, *такая, что каждая изотропная геодезическая в* $(M, g_1)$ *неполна для всех* $g_1 \in U(g)$.

## 8.3. Множество непространственноподобного раздела

Напомним следующее понятие.

**Определение 8.22.** *Множество непространственноподобного раздела* $C^+(p)$ *точки* $p$ *в будущем* определяется по правилу $C^+(p) = C_t^+(p) \cup C_N^+(p)$. Соответственно *множество непространственноподобного раздела в прошлом* — $C^-(p) = C_t^-(p) \cup C_N^-(p)$ и *множество непространственноподобного раздела* $C(p) = C^-(p) \cup C^+(p)$.

В гл. 7 мы упоминали о том, что полное некомпактное риманово многообразие допускает из каждой точки геодезический луч. Таким образом, в каждой точке существует такое направление, что геодезическая, исходящая из этой точки в этом направлении, не имеет точек раздела. Для сильно причинных пространственно-временных многообразий лоренцев аналог этого свойства подобным же образом извлекается из существования исходящих из каждой точки направленных в будущее и направленных в прошлое непространственноподобных геодезических лучей. Это можно сформулировать так, как это сделано в первой половине следующего утверждения.

**Предложение 8.23.** (а) *Пусть $(M, g)$ сильно причинно. Тогда для любой заданной точки $p \in M$ существует направленный в будущее и направленный в прошлое непространственноподобные касательные векторы в $T_pM$, такие, что геодезические, исходящие из точки $p$ в этих направлениях, не имеют точек раздела.*

(б) *Пусть $(M, g)$ глобально гиперболично и $p \in M$ — произвольно взятая точка. Тогда у $p$ нет самой далекой точки непространственноподобного раздела.*

*Доказательство.* Как мы уже отмечали, часть (а) непосредственно вытекает из теоремы 7.10. Для доказательства части (б) предположим, что $q \in M$ является наиболее далекой точкой раздела для $p$. Тогда $q$ является точкой раздела вдоль максимального геодезического сегмента $\gamma$ из $p$ в $q$. Выберем последовательность точек $\{q_n\}$ так, чтобы $q \ll q_n$ для каждого $n$ и $q_n \to q$. Из глобальной гиперболичности $(M, g)$ вытекает существование для любого $n$ максимальных времениподобных геодезических сегментов $c_n$: $[0, d(p, q_n)] \to M$ из $p$ в $q_n$. Продолжим каждый $c_n$ до непродолжаемой в будущее геодезической. Вследствие того что $q$ — наиболее удаленная точка раздела для точки $p$ и $d(p, q_n) \geqslant d(p, q) + d(q, q_n) > d(p, q)$ для каждого $n$, геодезический луч $c_n$ не содержит точек раздела точки $p$. Последовательность $\{c_n\}$ имеет предельную кривую $c$, которая в соответствии с предложением 2.18 является направленной в будущее и непродолжаемой в будущее непространственноподобной кривой, исходящей из $p$. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что $\{c_n\}$ сходится к $c$ в $C^0$-топологии на кривых (см. предложение 2.21). Используя глобальную гиперболичность пространства-времени $(M, g)$ и тот факт, что $q_n \to q$, получаем, что $q \in c$. Если $r \in c$ и $r_n \in c_n$, причем $r_n \to r$, то $d(p, r) = \lim d(p, r_n)$. Из того, что в сильно причинных пространствах длина дуги полунепрерывна сверху, вытекает, что длина $c$ от $p$ до $r$ не меньше $\overline{\lim}\, d(p, r_n) = \lim d(p, r_n) = d(p, r)$. Тем самым $c$ — максимальный геодезический луч. Ввиду того что $q$ является точкой раздела для $p$ на $\gamma$, геодезические $c$ и $\gamma$ — различные максимальные непространственноподобные геодезические, проходящие через $p$ и $q$. Тогда, воспользовавшись либо леммой 8.1, либо леммой 8.13, получаем противоречие с максимальностью $c$ за точкой $q$. $\square$

Обратимся теперь к аналогу наблюдения Клингенберга, сделанному им для римановых многообразий, о том, что если $q$ является ближайшей к $p$ точкой раздела и $q$ не сопряжена $p$, то существует геодезическая петля в точке $p$, проходящая через $q$. Для лоренцевых многообразий, однако, верен другой результат. Если $\{q_n\} \subset C_t^+(p)$ сходится к $q \in C_N^+(p)$, то в глобально гипер-

болическом пространстве-времени вследствие непрерывности лоренцевой функции расстояния $\mathrm{d}(p, q_n) \to 0$. Таким образом, есть основания ожидать, что для глобально гиперболических пространств не существует ближайшей к $p$ времениподобной точки раздела $q$, которая была бы не сопряжена $p$.

**Теорема 8.24.** *Пусть $(M, g)$ — глобально гиперболическое пространство-время. Предположим, что у $p \in M$ есть ближайшая к ней точка непространственноподобного раздела в будущем (или в прошлом). Тогда либо $q$ сопряжена точке $p$, либо $q$ является точкой изотропного раздела для $p$.*

*Доказательство.* Пусть $q$ — точка раздела в будущем для точки $p$, ближайшая среди точек раздела для $p$ относительно лоренцева расстояния $\mathrm{d}$. Допустим, что $q$ не является ни сопряженной точке $p$, ни точкой изотропного раздела для $p$. Тогда $p \ll q$, и по теореме 8.12 найдутся по меньшей мере две направленные в будущее максимальные времениподобные геодезические $c_1$ и $c_2$ из $p$ в $q$. Пусть $\gamma$: $[0, a) \to M$ — направленная в прошлое времениподобная кривая, исходящая из $q$. Выбирая $a > 0$ достаточно малым, мы можем предполагать, что образ кривой $\gamma$ лежит в хронологическом будущем точки $p$. Тогда из того, что $p \ll \gamma(t) \ll q$ для всех $t$, $0 < t < a$, при помощи обратного неравенства треугольника получаем $\mathrm{d}(p, q) \geq \mathrm{d}(p, \gamma(t)) + \mathrm{d}(\gamma(t), q) > \mathrm{d}(p, \gamma(t))$. Вследствие того что $q$ является ближайшей точкой раздела, точка $\gamma(t)$ на каждой времениподобной геодезической из $p$ в $\gamma(t)$ появляется раньше, чем точка раздела для $p$. Тем самым всякая времениподобная геодезическая из $p$ в $\gamma(t)$ максимальна. Из того, что $q$ не сопряжена $p$ вдоль $c_1$, вытекает, что существует времениподобная геодезическая из $p$ в $\gamma(t)$, находящаяся вблизи $c_1$ для всех достаточно малых $t$. Аналогичными рассуждениями доказывается существование времениподобной геодезической из $p$ в $\gamma(t)$, находящейся вблизи $c_2$, для всех достаточно малых $t$. Из существования двух максимальных времениподобных геодезических, соединяющих $p$ с $\gamma(t)$, вытекает, что $\gamma(t)$ является точкой раздела для $p$; это приводит к противоречию вследствие неравенства $d(p, \gamma(t)) < d(p, q)$. □

Для римановых многообразий множество единичных касательных векторов в любом касательном пространстве компактно. Поэтому непосредственным следствием римановых аналогов предложений 8.5 и 8.7, доказанных выше, является следующее утверждение: множество раздела каждой точки в полном римановом многообразии — замкнутое подмножество в $M$ (см. Громол, Клингенберг и Мейер (1971, с. 187—188), Кобаяси (1967, с. 100—101)). Для лоренцевых многообразий множество времениподобного раздела в общем случае не является замкнутым подмножеством

в $M$, как показывает пример статической вселенной Эйнштейна (пример 4.11). Однако для глобально гиперболических пространств можно показать, что множество непространственноподобного раздела и множество изотропного раздела любой точки представляют собой замкнутые подмножества $M$ (см. Бим и Эрлих (1979б, предложение 6.5)). Из приводимого ниже примера 8.28 будет видно, что предположение о глобальной гиперболичности является необходимым для замкнутости в $M$ множества непространственноподобного раздела. Доказательство для лоренцевых многообразий оказывается сложнее соответствующего доказательства для римановых многообразий вследствие отсутствия единичных изотропных касательных векторов.

Обратимся теперь к доказательству замкнутости множеств непространственноподобного и изотропного разделов для глобально гиперболических пространств. Докажем сначала следующую техническую лемму.

**Лемма 8.25.** *Пусть* $(M, g)$ — *сильно причинное пространство-время. Предположим, что* $p \ll q_n$ *и* $q_n \to q \neq p$. *Если* $\exp_p(v_n) = q_n$, $\exp_p(v) = q$ *и направления непространственноподобных векторов* $v_n$ *сходятся к направлению вектора* $v$, *то* $v_n \to v$.

*Доказательство*. Выберем числа $a_n > 0$ так, чтобы векторы $w_n = a_n v_n$ сходились к $v$. Тогда последовательность точек $r_n = \exp_p(w_n)$ должна: 1) быть определена для больших $n$ и 2) сходиться к $q$. Ввиду причинности $(M, g)$ найдется только одно значение $t_n$ параметра $t$, для которого $\exp_p(t_n w_n) = q_n$, а именно $t_n = a_n^{-1}$. Используя сходимость $r_n \to q$, $q_n \to q$ и сильную причинность $(M, g)$ вблизи $q$, находим, что $t_n \to 1$. В силу равенства $v_n = t_n^{-1} w_n$ последовательность $\{v_n\}$ сходится к $v$. □

Зафиксируем точку $p \in M$. Касательный вектор $v \in T_pM$ сопряжен точке $p$ в $T_pM$, если отображение $(\exp_p)_*$ вырожденно в $v$. Точки, сопряженные $p$, должны образовывать в $T_pM$ замкнутое подмножество в области определения $\exp_p$ вследствие того, что $(\exp_p)_*$ является невырожденным на открытом подмножестве пространства $T_pM$. Точка $q \in M$ сопряжена точке $p$ вдоль геодезической $c$, если существует сопряженная точка $v \in T_pM$, для которой $\exp_p v = q$ и $c$ является (с точностью до перепараметризации) геодезической $\exp_p(tv)$. Будем называть точку $q$ *непространственноподобно сопряженной точке $p$ в будущем*, если $q \in M$, $p \ll q$ и $q$ сопряжена точке $p$ вдоль непространственноподобной геодезической. Непространственноподобно сопряженные точки в прошлом определяются аналогично. Если $(M, g)$ является причинным пространством-временем, то $p$ не может лежать ни в множестве непространственно сопряженных ей точек в будущем, ни в множестве непространственно сопряженных ей точек

в прошлом потому, что непространственноподобная геодезическая проходит через $p$ самое большее один раз и $(\exp_p)_*$ невырожденно в начальной точке пространства $T_pM$.

**Замечание 8.26.** Однако даже в глобально гиперболических пространствах точки могут быть сопряженными сами себе вдоль *пространственноподобных* геодезических. Это и происходит в любой статической вселенной Эйнштейна размерности $\geqslant 3$.

**Лемма 8.27.** *Пусть $(M, g)$ — глобально гиперболическое пространство-время. Тогда множество точек непространственноподобно сопряженных в будущем (соответственно в прошлом) является замкнутым подмножеством в $M$.*

*Доказательство.* Предположим, что $\{q_n\}$ — последовательность точек, непространственноподобно сопряженных точке $p$ в будущем, причем $q_n \to q$. Тогда $p \neq q$, $p \leqslant q$ и для любого $n$ $p \leqslant q_n$. Пусть $v_n \in T_pM$ — непространственноподобный вектор, такой, что $(\exp_p)_*$ вырожденно в $v_n$ и $\exp_p(v_n) = q_n$. Тогда $c_n(t) = \exp_p(tv_n)$ является направленной в будущее, непродолжаемой в будущее геодезической, исходящей из $p$ и содержащей $q_n$. Согласно предложению 2.18, геодезические $c_n$ должны иметь предельную кривую $\gamma$. Так как $(M, g)$ глобально гиперболично, то $\gamma$ должна содержать $q$. Используя сильную причинность $(M, g)$ и тот факт, что кривая $\gamma$ предельная для непространственноподобных геодезических, получаем, что сама $\gamma$ является непространственноподобной геодезической. Пусть $v$ — единственный (непространственноподобный) вектор, касательный $\gamma$ в точке $\gamma(0) = p$ и такой, что $\exp_p(v) = q$. Из того, что $\gamma$ — предельная кривая последовательности $\{c_n\}$, вытекает, что у последовательности $\{n\}$ должна существовать подпоследовательность $\{m\}$, для которой направления векторов $v_m$ сходятся к направлению вектора $v$. На основании леммы 8.25 можно заключить, что $v_m \to v$. Так как векторы $v_m$ принадлежат множеству всех точек, сопряженных $p$ в $T_pM$, и это множество является замкнутым подмножеством области определения $\exp_p$, то вектор $v$ сопряжен $p$ в $T_pM$. Вследствие того что $v$ — направленный в будущее непространственноподобный вектор, точка $q = \exp_p(v)$ является непространственноподобно сопряженной точке $p$ в $M$ в будущем. Это доказывает замкнутость в $M$ множества точек, непространственноподобно сопряженных в будущем. Аналогичные рассуждения показывают, что множество точек, непространственноподобно сопряженных в прошлом, также замкнуто. □

**Пример 8.28.** Пусть на $M = S^1 \times \mathbb{R} = \{(\theta, t) : 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, t \in \mathbb{R}\}$ введена плоская метрика $ds^2 = d\theta^2 - dt^2$. Это пространство-время представляет собой двумерную статическую вселен-

ную Эйнштейна. Оно глобально гиперболично и не имеет сопряженных точек. Если $p = (0, 0)$, то множество точек изотропного раздела в будущем $C_N^+(p)$ состоит из единственной точки $(\pi, \pi)$. Множество времениподобного раздела в будущем $C_t^+(p)$ совпадает с множеством $\{(\pi, t)\colon t > \pi\}$ и потому не замкнуто. С другой стороны, $C^+(p) = C_t^+(p) \cup C_N^+(p)$ замкнуто.

Если из $M$ выбросить две точки $(\pm\pi/4, 2\pi)$, то мы получим сильно причинное пространство-время $(M', g \mid M')$, которое не является глобально гиперболическим. В этом пространстве-времени $(M', g \mid M')$ множество изотропного раздела в будущем $C^+(p)$ *не* замкнуто.

**Предложение 8.29.** *Пусть $(M, g)$ — глобально гиперболическое пространство-время. Для любой точки $p \in M$ все множества $C_N^+(p)$, $C_N^-(p)$, $C_t^+(p)$, $C_t^-(p)$ являются замкнутыми подмножествами в $M$. В частности, замкнуты и множество изотропного раздела, и множество непространственноподобного раздела.*

*Доказательство.* Так как рассмотрение этих четырех случаев весьма похоже, покажем только, что $C_N^+(p)$ замкнуто в $M$. Пусть $q_n \in C_N^+(p)$ и $q_n \to q$. Ввиду того, что $(M, g)$ глобально гиперболично, $q \neq p$ и $q \in J^+(p)$. Из определения множества $C_N^+(p)$ видно, что $d(p, q_n) = 0$. Используя непрерывность лоренцева расстояния для глобально гиперболических пространственно-временных многообразий (лемма 3.5), получаем, что $d(p, q) = \lim d(p, q_n) = 0$. Пусть $\gamma$ — произвольная непространственноподобная геодезическая из $p$ в $q$. Равенство $d(p, q) = 0$ означает, что $\gamma$ является максимальной изотропной геодезической и что точка раздела для точки $p$ вдоль $\gamma$ не может появиться прежде $q$.

Возможны два случая. Либо бесконечно много точек $q_n$ являются непространственноподобно сопряженными точке $p$ в будущем, либо для больших $n$ точек, непространственноподобно сопряженных точке $p$ в будущем, среди $q_n$ нет. В первом случае, применяя лемму 8.27, находим, что если точка $q$ непространственноподобно сопряжена $p$ вдоль $\gamma$ в будущем, то $q$ является точкой раздела вдоль $\gamma$ потому, что точка раздела вдоль $\gamma$ либо совпадает с первой сопряженной точкой вдоль $\gamma$, либо появляется раньше. Если же $q$ непространственноподобно сопряжена $p$ в будущем вдоль некоторой другой непространственноподобной геодезической $\gamma'$, то $\gamma'$ должна быть изотропной. Из леммы 8.13 тогда вытекает, что $q$ — точка раздела и вдоль $\gamma$, и вдоль $\gamma'$.

Допустим теперь, что для всех достаточно больших $n$ точки $q_n$ не являются непространственноподобно сопряженными точке $p$ в будущем. В силу теоремы 8.15 для каждого большого $n$ существуют по меньшей мере две максимальные изотропные геодезические из $p$ в $q_n$. Тем самым для каждого большого $n$ найдутся

два направленных в будущее изотропных вектора $v_n$ и $w_n$, для которых $\exp_p(v_n) = \exp_p(w_n) = q_n$. Направленные в будущее непространственноподобные направления в точке $p$ образуют компактное множество направлений. Поэтому направления, определяемые последовательностями $\{v_n\}$ и $\{w_n\}$, имеют предельные $v$ и $w$ соответственно. Если $v$ и $w$ определяют различные направления, то, применяя лемму 8.14, получаем две максимальные изотропные геодезические из $p$ в $q$. В этом случае $q$ — точка раздела для $p$. С другой стороны, векторы $v$ и $w$ могут определять одно направление. Пусть это так. Прежде всего заметим, что существуют постоянные $a > 0$ и $b > 0$, такие, что $av = bw$ и $\exp_p(av) = \exp_p(bw) = q$. Из леммы 8.25 вытекает, что для некоторой подпоследовательности $\{m\}$ последовательности $\{n\}$ справедливы предельные соотношения $v_m \to av$ и $w_m \to av$. Однако в силу того, что $v_m \neq w_m$, а $\exp_p(v_m) = \exp_p(w_m)$, заключаем, что $(\exp_p)_*$ должно быть вырожденно в $av$. Поэтому $q$ сопряжена $p$ вдоль $\gamma(t) = \exp_p(tav)$, и в силу равенства $\mathrm{d}(p, q) = 0$ получаем, что $q$ — точка раздела для $p$ вдоль $\gamma(t)$. □

Интересно отметить, что полученный выше результат имеет место без каких бы то ни было предположений о времениподобной или изотропной геодезической полноте $(M, g)$. В частности, множество изотропного раздела и множество непространственноподобного раздела в глобально гиперболических пространственно-временных многообразиях, согласно предложению 8.29, замкнуты, даже если функция $s\colon T_{-1}M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ и не является полунепрерывной сверху.

Хорошо известно (см. Кобаяси (1967, с. 100—101)), как, используя множество раздела, можно показать, что компактное риманово многообразие является непересекающимся объединением открытой клетки и замкнутого подмножества (множества раздела фиксированной точки $p \in M$), представляющего собой непрерывный образ (при отображении $\exp_p$) $(n-1)$-мерной сферы. Таким образом, множества раздела наследуют многие из топологических свойств самого компактного многообразия. Для лоренцевых многообразий точки раздела можно определить (в крайнем случае используя лоренцево расстояние) только для непространственноподобных геодезических. Значит, соответствующий результат для пространственно-временных многообразий должен описывать топологию не всего многообразия $M$, а только множества $J^+(p)$ для произвольных $p \in M$. Чтобы получить это разложение, необходимо предположить, что $(M, g)$ времениподобно геодезически полно, равно как и глобально гиперболично для того, чтобы функция $s\colon T_{-1}M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, введенная в определении 8.3, была непрерывной, а не только полунепрерывной снизу (см. предложения 8.5 и 8.7).

Напомним, что контуром будущего $E^+(p)$ произвольной точки $p \in M$ называется $E^+(p) = J^+(p) \setminus I^+(p)$, а через $C^+(p)$ обозначается множество непространственноподобного раздела точки $p$ в будущем.

**Предложение 8.30.** *Пусть $(M, g)$ глобально гиперболично и времениподобно геодезически полно. Тогда для каждой точки $p \in M$ множество $J^+(p) \setminus [C^+(p) \cup E^+(p)]$ является открытой клеткой.*

*Доказательство.* Пусть $B = J^+(p) \setminus [C^+(p) \cup E^+(p)]$. Тогда $q \in B$ в том и только том случае, если существует максимальная направленная в будущее времениподобная геодезическая, которая начинается в $p$ и продолжаема за $q$. Тем самым $B = I^+(p) \setminus C^+(p)$, откуда следует, что $B$ открыто. Множество $T_{-1}M|_p = \{v \in T_pM$: $v$ направлен в будущее и $g(v, v) = -1\}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^{n-1}$. Пусть $H$: $T_{-1}M|_p \to \mathbb{R}^{n-1}$ — соответствующий гомеоморфизм. Определим $\bar{s}$: $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ по формуле $\bar{s} = s \circ H^{-1}$. Индуцированный гомеоморфизм $B$ на множество $\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}: 0 < t < \bar{s}(x)\}$ определяется по правилу $q \to (H(r), t)$, где $v$ — вектор в $T_{-1}M$, для которого $\exp_p(sv)$ является единственной (с точностью до перепараметризации) максимальной геодезической из $p$ в $q$ и $\exp_p(tv) = q$. Пусть $f$: $[0, \infty] \to [0, 1]$ — гомеоморфизм, причем $f(0) = 0$ и $f(\infty) = 1$. Тогда отображение $(x, t) \to (x, f(t)/f(\bar{s}(x)))$ показывает, что $B$ гомеоморфно $\mathbb{R}^{n-1} \times (0, 1)$. Утверждение доказано. □

**Замечание 8.31.** Из того, что $I^+(p) \subset J^+(p)$, доказанное предложение позволяет получить некоторую косвенную информацию о топологическом строении $I^+(p)$. Пример статической вселенной Эйнштейна показывает, что $I^+(p)$ не обязательно является открытой клеткой, даже если $(M, g)$ глобально гиперболично. В то же время из глобальной гиперболичности $(M, g)$ следует, что $(I^+(p), g | I^+(p))$ также является глобально гиперболическим. Поэтому $I^+(p)$ топологически можно представить в виде произведения $I^+(p) = S \times \mathbb{R}$, где $S$ есть $(n-1)$-мерное многообразие (см. теорему 2.13).

Глава 9

# ТЕОРИЯ МОРСА ОБ ИНДЕКСЕ ДЛЯ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Пусть $\gamma$: $[0, a) \to M$ есть заданная непространственноподобная геодезическая. Если $\gamma(t_0)$ — точка раздела в будущем для $\gamma(0)$ вдоль $\gamma$, то, как мы видели в гл. 8, для любого $t < t_0$ геодезический сегмент $\gamma \mid [0, t]$ является наидлиннейшей кривой среди *всех* непространственноподобных кривых многообразия $M$, идущих из $\gamma(0)$ в $\gamma(t)$. Можно несколько смягчить формулировку и поставить вопрос: выполняется ли неравенство $L(\gamma) \geqslant L(\sigma)$ в классе всех непространственноподобных кривых $\sigma$, проходящих из $\gamma(0)$ в $\gamma(t_0)$ достаточно «близко» к $\gamma$? Если это так, то $\gamma(t_0)$ либо совпадает с первой точкой, сопряженной $\gamma(0)$ вдоль $t$ в будущем, либо располагается перед ней. Главное различие здесь заключается между условием «среди всех из $M$» для точек раздела и условием «близко к $\gamma$» для сопряженных точек. Важность такого различия иллюстрируется тем фактом, что, хотя ни одно двумерное пространство-время не имеет изотропных сопряженных точек, все изотропные геодезические статической вселенной Эйнштейна обладают точками изотропного раздела и в прошлом, и в будущем.

Поскольку при изучении сопряженных точек рассматривается только поведение «близких» кривых, естественно применить к вычислению вариаций непространственноподобных геодезических в произвольных лоренцевых многообразиях технику, подобную той, которая применяется к геодезическим в произвольных римановых многообразиях. Чтобы показать особенности лоренцевой теории об индексе, коротко опишем теорию Морса об индексе для произвольного (не обязательно полного) риманова многообразия $(N, g_0)$. Пусть $c$: $[a, b] \to N$ — фиксированный геодезический сегмент. Рассмотрим однопараметрическое семейство кривых $\alpha_s$, начинающихся в $c(a)$ и заканчивающихся в $c(b)$. Более точно, пусть $\alpha$: $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$ есть непрерывное кусочно гладкое отображение, у которого $\alpha(t, 0) = c(t)$ для всех $t \in [a, b]$ и $\alpha(a, s) = c(a)$, $\alpha(b, s) = c(b)$ для всех $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Тогда каждая соседняя кривая $\alpha_s$: $t \to \alpha_s(t) = \alpha(t, s)$ является кусочно-гладкой. *Векторное поле вариации*

(или $s$-параметрическая производная) $V$ этой деформации задается правилом

$$V(t)=\frac{d}{ds}(s\longmapsto\alpha(t,\ s))|_{s=0}.$$

Так как $c$ — гладкая геодезическая, то путем прямых вычислений можно убедиться в том, что

$$\frac{d}{ds}(L_0(\alpha_s))|_{s=0}=0,$$

а вторая вариация имеет вид

$$\frac{d^2}{ds^2}(L_0(\alpha_s))|_{s=0}=$$
$$=\int_{t=a}^{b}[g_0(V',\ V')-g_0(R(V,\ c')c',\ V)-c'(g_0(V,\ c'))]|_t\,dt+$$
$$+g_0(\nabla_V V,\ c')|_a^b.$$

Эта формула второй вариации естественно предполагает определенной на бесконечномерном линейном пространстве $V_0^{\perp}(c)$ кусочно-гладких векторных полей $X$ вдоль $c$, ортогональных к $c$ и удовлетворяющих условию $X(a)=X(b)=0$, *индексную* форму

$$I(X,\ Y)=\int_a^b[g(X',\ Y')-g(R(X,\ c')c',\ Y)]|_t\,dt.$$

Затем показывается, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы $c$ была свободна от сопряженных точек, является выполнение неравенства $I(X,\ X)>0$ для всех нетривиальных $X\in V_0^{\perp}(c)$.

Это наводит на мысль, что для геодезической $c\colon [a,\ b]\to N$ с сопряженными точками индекс $\operatorname{Ind}(c)$ относительно формы $I\colon V_0^{\perp}(c)\times V_0^{\perp}(c)\to\mathbb{R}$ следует определять как точную верхнюю грань размерностей всевозможных линейных подпространств пространства $V_0^{\perp}(c)$, на которых форма $I$ отрицательно определена. Несмотря на то что $V_0^{\perp}(c)$ является бесконечномерным линейным пространством, теория Морса для произвольных римановых многообразий утверждает, что

(1) $\operatorname{Ind}(c)$ конечен;

(2) $\operatorname{Ind}(c)$ равен геодезическому индексу $c$, т. е. числу точек, сопряженных вдоль $c$, с учетом кратности. Более точно, если обозначить через $J_t(c)$ линейное пространство гладких векторных полей $Y$ вдоль $c$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению Якоби $Y''+R(Y,\ c')c'=0$ и краевым условиям $Y(a)=Y(t)=0$, то утверждение (2) эквивалентно формуле

(3) $\operatorname{Ind}(c)=\sum\limits_{t\in(a,\ b)}\dim J_t(c).$

Таким образом, у $c$ имеется лишь конечное число точек на $(a, b]$, сопряженных $c(a)$.

Теперь при помощи теоремы Морса об индексе можно вычислить гомотопический тип пространства путей для *полных* римановых многообразий геометрически (см. Милнор (1966, с. 107)). Получается следующий результат: если $(N, g_0)$ — полное риманово многообразие и $p, q \in N$ — произвольная пара точек, которые не сопряжены (какую бы геодезическую мы ни взяли), то пространство $\Omega_{(p,q)}$ всех возможных непрерывных путей из $p$ в $q$, наделенное компактно-открытой топологией, имеет гомотопический тип счетного клеточного комплекса, который содержит клетку размерности $\lambda$ для каждой геодезической из $p$ в $q$, имеющей индекс $\lambda$.

Целью разд. 9.1 и 9.3 является доказательство аналогов утверждений (1)—(3) для непространственноподобных геодезических в произвольных пространственно-временных многообразиях. Пусть $c$: $[a, b] \to M$ (соответственно $\beta$: $[a, b] \to M$) — произвольный времениподобный (соответственно изотропный) геодезический сегмент в многообразии $(M, g)$. Обозначим через $V_0^\perp(c)$ (соответственно через $V_0^\perp(\beta)$) бесконечномерное линейное пространство кусочно-гладких векторных полей $Y$ вдоль $c$ (соответственно вдоль $\beta$), ортогональных $c$ (соответственно $\beta$) и удовлетворяющих условию $Y(a) = Y(b) = 0$. По аналогии с римановой индексной формой времениподобную индексную форму $I$: $V_0^\perp(c) \times V_0^\perp(c) \to \mathbb{R}$ можно определить соотношением

$$I(X, Y) = -\int_a^b [g(X', Y') - g(R(X, c')c', Y)]\,dt.$$

Можно показать также, что геодезическая $c$: $[a, b] \to M$ не имеет на $(a, b)$ сопряженных точек в том и только том случае, когда форма $I$: $V_0^\perp(c) \times V_0^\perp(c) \to \mathbb{R}$ отрицательно определена.

Индексная форма $I$: $V_0^\perp(\beta) \times V_0^\perp(\beta) \to \mathbb{R}$ вводится аналогично:

$$I(X, Y) = -\int_a^b [g(X', Y') - g(R(X, \beta')\beta', Y)]\,dt.$$

Но так как $\beta$ — изотропная геодезическая, то $g(\beta', \beta') = 0$. Следовательно, векторные поля вида $V(t) = f(t)\,\beta'(t)$, где $f$: $[a, b] \to \mathbb{R}$ — кусочно-гладкая функция, подчиненная условию $f(a) = f(b) = 0$, всегда располагаются в нулевом пространстве формы $I$: $V_0^\perp(\beta) \times V_0^\perp(\beta) \to \mathbb{R}$, но тем не менее никогда не порождают изотропных сопряженных точек.

Обойти эту трудность можно путем рассмотрения фактор-пучка $\mathfrak{X}_0(\beta)$ пространства $V_0^\perp(\beta)$, который получается при отождествлении векторных полей $Y_1$ и $Y_2$ из $V_0^\perp(\beta)$, связанных равенством $Y_1 - Y_2 = f\beta'$, где $f$: $[a, b] \to \mathbb{R}$ — кусочно-гладкая функция. При этом индексная форма $I$: $V_0^\perp(\beta) \times V_0^\perp(\beta) \to \mathbb{R}$

проектируется в индексную фактор-форму $\overline{I}$: $\mathfrak{X}_0(\beta) \times \mathfrak{X}_0(\beta) \to \mathbb{R}$. Можно показать, что изотропный геодезический сегмент $\beta$: $[a, b] \to M$ не имеет на $[a, b]$ сопряженных точек тогда и только тогда, когда фактор-форма $\overline{I}$: $\mathfrak{X}_0(\beta) \times \mathfrak{X}_0(\beta) \to \mathbb{R}$ отрицательно определена (ср. Хокинг и Эллис (1977, § 4.5), Бёлтс (1977, ч. 2 и 4)).

Обозначим через $J_t(c)$ (соответственно $J_t(\beta)$) пространство полей Якоби вдоль $c$ (соответственно $\beta$), удовлетворяющих условию $Y(a) = Y(b) = 0$. Определим *индекс* Ind $(c)$ геодезической $c$ (соответственно Ind $(\beta)$ геодезической $\beta$) как точную верхнюю грань размерностей всех векторных подпространств пространства $V_0^{\perp}(c)$ (соответственно $\mathfrak{X}_0(\beta)$), на которых форма $I$ (соответственно $\overline{I}$) положительно определена. В разд. 9.1 и 9.3 мы докажем соответственно теорему Морса об индексе

$$\operatorname{Ind}(c) = \sum_{t \in (a, b)} \dim J_t(c)$$

для времениподобной геодезической $c$: $[a, b] \to M$ и теорему Морса об индексе

$$\operatorname{Ind}(\beta) = \sum_{t \in (a, b)} \dim J_t(\beta)$$

для изотропной геодезической $\beta$: $[a, b] \to M$. Причиной раздельного рассмотрения времениподобного и изотропного случаев является то обстоятельство, что для получения теоремы Морса об индексе изотропной, но не времениподобной геодезической необходимо использовать индексную фактор-форму $\overline{I}$: $\mathfrak{X}_0(\beta) \times \mathfrak{X}_0(\beta) \to \mathbb{R}$.

В разд. 9.2 мы займемся изучением теории пространств времениподобных путей для сильно гиперболического пространства-времени, подводя итог некоторым последним результатам Уленбека (1975). И здесь опять, поскольку для разработки теории римановых пространств путей необходима полнота, неудивительно, что для лоренцевой теории требуется глобальная гиперболичность.

Однако между лоренцевыми и римановыми пространствами путей имеется существенное различие. Пусть $(N, g_0)$ — полное риманово многообразие, кривизна Риччи которого положительна и отделена от нуля. По теореме Майерса $N$ компактно. В книге Милнора (1966, теорема 19.6) показано, что если в таком римановом многообразии точки $p$ и $q$ не сопряжены, то пространство путей $\Omega_{(p, q)}$ имеет гомотопический тип клеточного комплекса, у которого в каждой размерности лишь конечное число клеток. Тем не менее пространство путей, как видно на примере сферы $S^n$ с обычной полной метрикой постоянной секционной кривизны, может быть и *бесконечным* клеточным комплексом. Напротив, если

$(M, g)$ — *произвольное* глобально гиперболическое (следовательно, некомпактное) пространство-время и $p, q \in M$ — любые две его точки, удовлетворяющие условию $p \ll q$ (тем самым $p$ и $q$ не сопряжены), то времениподобное пространство путей $C_{(p, q)}$ имеет только *конечное* число клеток.

Это поразительное несходство между лоренцевым и римановым пространствами путей является результатом следующего фундаментального различия между лоренцевыми и римановыми многообразиями. Если $\gamma$ — произвольная непространственноподобная кривая из $p$ в $q$ в произвольном пространстве-времени и $d(p, q)$ конечно, то $\gamma$ имеет ограниченную лоренцеву длину вследствие того, что $L(\gamma) \leqslant d(p, q)$. С другой стороны, любая кривая $\sigma$ в римановом пространстве путей удовлетворяет условию $L_0(\sigma) \geqslant$ $\geqslant d(p, q)$ и, значит, имеет длину, ограниченную снизу, а не сверху.

## 9.1. Теория Морса для времениподобных геодезических

В этом разделе мы дадим подробное доказательство теоремы Морса об индексе для времениподобных геодезических в произвольном пространстве-времени. Несколько разных подходов к теории Морса для времениподобных геодезических при различных условиях причинности опубликовано в работах Уленбека (1975), Вудхауза (1976), Эверсона и Толбота (1976) и Бима и Эрлиха (1979в). Здесь мы предлагаем подход, который следует доказательству теоремы Морса об индексе для произвольного риманова многообразия, приведенному в книге Громола, Клингенберга и Мейера (1971, разд. 4.5 и 4.6). Похожее изложение результатов этого параграфа, включая теорему 9.22, дано Бёлтсом (1977).

Пусть $(M, g)$ — *произвольное* пространство-время размерности не меньшей двух. Лоренцеву метрику $g$ всюду в этом разделе будем обозначать через $\langle , \rangle$. Будем также предполагать, что все времениподобные геодезические $c: [a, b] \to M$ имеют единичную скорость, т. е. $\langle c'(t), c'(t) \rangle = -1$ для всех $t \in [a, b]$.

**Определение 9.1.** Непрерывное отображение $Y: [a, b] \to TM$ называется *кусочно-гладким векторным полем вдоль* (времениподобной геодезической) $c: [a, b] \to M$, если $Y(t) \in T_{c(t)}M$ для всех $t \in [a, b]$ и существует конечное разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ сегмента $[a, b]$, такое, что $Y|_{[t_i, t_{i+1}]}: [t_i, t_{i+1}] \to M$ — гладкое отображение для каждого $i = 0, 1, \ldots, k - 1$. Обозначим через $V^{\perp}(c)$ $\mathbb{R}$-линейное пространство всех кусочно-гладких векторных полей $Y$ вдоль $c$, для которых равенство $\langle Y(t), c'(t) \rangle = 0$ справедливо при любом $t \in [a, b]$. По-

ложим $V_0^\perp(c) = \{Y \in Y^\perp(c)\colon Y(a) = Y(b) = 0\}$ и $N(c(t)) = \{v \in T_{c(t)}M\colon \langle v, c'(t)\rangle = 0\}$.

Для данного $Y \in V^\perp(c)$ существует конечное множество точек $I_0 \subset (a, b)$, такое, что на $[a, b] \setminus I_0$ векторное поле $Y$ дифференцируемо. Построим отображение $Y'\colon [a, b] \to M$, полагая $Y'(t) = \nabla_{\gamma'} Y(t)$ для $t \in [a, b] \setminus I_0$ и доопределяя в точках $t_i \in I_0$ посредством соотношения

$$Y'(t_i) = \lim_{t \to t_i^-} Y'(t).$$

Тем самым $Y'$ продолжено на $[a, b]$ по левой непрерывности; однако оно не обязательно непрерывно в точках $I_0$.

**Замечание 9.2.** Поскольку вектор $c'(t)$ времениподобен, $N(c(t))$ представляет собой линейное пространство размерности $n-1$, состоящее из пространственноподобных касательных векторов, и потому множество $\{v \in N(c(t))\colon \langle v, v\rangle \leqslant 1\}$ компактно.

**Определение 9.3.** Пусть $c\colon [a, b] \to M$ — времениподобная геодезическая. Точки $t_1$ и $t_2 \in [a, b]$, $t_1 \neq t_2$, называются *сопряженными относительно* $c$, если существует не равное тождественно нулю векторное поле $J$ вдоль $c$, удовлетворяющее уравнению Якоби $J'' + R(J, c')c' = 0$ и условию $J(t_1) = J(t_2) = 0$. Здесь $J'$ обозначает ковариантную производную векторного поля $J$ вдоль $c$, индуцированную связностью Леви-Чивита метрики $\langle , \rangle$ на многообразии $M$. Точка $t_1 \in (a, b)$ называется *сопряженной точкой* геодезического сегмента $c\colon [a, b] \to M$, если точки $a$ и $t_1$ сопряжены вдоль $c$. Если же на полуинтервале $(a, b]$ нет точек, сопряженных $t = a$ вдоль $c$, то говорят, что геодезический сегмент *$c$ не имеет сопряженных точек*. Гладкое векторное поле $J$ вдоль $c$, удовлетворяющее дифференциальному уравнению $J'' + R(J, c')c' = 0$, называется *якобиевым полем вдоль $c$*.

Определим лоренцеву индексную форму.

**Определение 9.4.** *Индексной формой* $I\colon V^\perp(c) \times V^\perp(c) \to \mathbb{R}$ называется симметрическая билинейная форма, определяемая для любых векторных полей $X, Y \in Y^\perp(c)$ соотношением

$$I(X, Y) = -\int_a^b [\langle X', Y'\rangle - \langle R(X, c')c', Y\rangle]\,dt. \tag{9.1}$$

Если поле $X \in Y^\perp(c)$ гладкое, то

$$I(X, Y) = -\langle X', Y\rangle\Big|_a^b + \int_a^b [\langle X'' + R(X, c')c', Y\rangle]\,dt. \tag{9.2}$$

Таким образом, если $Y \in V_0^{\perp}(c)$ и $X$ — гладкое поле, получается формула

$$I(X, Y) = \int_a^b \langle X'' + R(X, c')c', Y\rangle\, dt, \tag{9.3}$$

связывающая индексную форму с якобиевыми полями.

**Замечание 9.5.** Для данного кусочно-гладкого векторного поля $X \in V^{\perp}(c)$ можно выбрать разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ так, чтобы сужение $X \mid [t_i, \; t_{i+1}]$ было гладким полем для каждого $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Положим

$$\Delta_{t_0}(X') = X'(a^+), \quad \Delta_{t_k}(X') = -X'(b^-)$$

и

$$\Delta_{t_i}(X') = \lim_{t \to t_i^+} X'(t) - \lim_{t \to t_i^-} X'(t)$$

для $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Применяя равенство (9.2) к каждому интервалу разбиения $(t_i, \; t_{i+1})$, нетрудно получить формулу второй вариации

$$I(X, Y) = \sum\nolimits_{i=0}^{k} \langle \Delta_{t_i}(X'), Y\rangle + \int_a^b \langle X'' + R(X, c')c', Y\rangle\, dt. \tag{9.4}$$

В таком виде формула второй вариации приведена в работах Хокинга и Эллиса (1977, с. 108) и Бёлтса (1977, с. 86—87) (см. Чигер и Эбин (1975, с. 21)).

Чтобы привести геометрические приложения индексной формы, полезно дать следующее (стандартное) определение.

**Определение 9.6.** Пусть $c\colon [a, b] \to M$ — гладкая кривая. *Вариацией* (или гладкой гомотопией) $c$ называется гладкое отображение $\alpha\colon [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ ($\varepsilon > 0$ — некоторое число), удовлетворяющее условию $\alpha(t, 0) = c(t)$ для всех $t \in [a, b]$. Вариация $\alpha$ называется *собственной*, если $\alpha(a, s) = c(a)$ и $\alpha(b, s) = c(b)$ для всех $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Непрерывное отображение $\alpha\colon [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ называется *кусочно-гладкой вариацией* $c$, если существует конечное разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ отрезка $[a, b]$, такое, что $\alpha \mid [tt, \; t_{i+1}] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ суть гладкая вариация $c \mid [tt, \; t_{i+1}]$ для каждого $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Если в определении 9.6 положить $\alpha_s(t) = \alpha(t, s)$, то для гладкой вариации $\alpha$ каждая кривая $\alpha_s\colon [a, b] \to M$ является гладкой, и, таким образом, отображение $s \to \alpha_s$ представляет собой деформацию кривой $c$ в «соседние кривые» $\alpha_s$. Если $\alpha$ — кусочно-гладкая вариация, то соседние кривые будут кусочно-гладкими. Если $\alpha$ — собственная вариация, то все соседние кривые начинаются в $c(a)$ и заканчиваются в $c(b)$. При определении вариаций времениподобных кривых обычно ограничиваются рассмотрением вариаций, обладающих дополнительным свойством, что

все соседние кривые $\alpha_s$: $[a, b] \to M$ времениподобны. Однако если пользоваться определением 9.6, то это ограничение оказывается излишним согласно следующей лемме.

**Лемма 9.7.** *Пусть* $\alpha$: $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ — *кусочно-гладкая вариация времениподобного геодезического сегмента* $c$: $[a, b] \to$ $\to M$. *Тогда существует положительная постоянная* $\delta$, *зависящая от* $\alpha$ *и такая, что соседние кривые* $\alpha_s$ *времениподобны для всех* $s$, *подчиняющихся условию* $|s| \leqslant \delta$.

*Доказательство.* Предположим сначала, что $\alpha$ — гладкая вариация. Выберем $\varepsilon_1$, удовлетворяющее условию $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, а в остальном произвольное. Тогда по определению 9.6 $\alpha$ дифференцируема на компактном множестве $[a, b] \times [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$. В силу определения дифференцируемости $\alpha$ продолжается до гладкого отображения открытого множества, содержащего прямоугольник $[a, b] \times [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$. Так как $c$ — времениподобная геодезическая, то векторы $c'(a^+)$ и $c'(b^-)$ времениподобны. Из этого и из возможности продолжения $\alpha$ на открытое множество, содержащее $[a, b] \times$ $\times [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$, вытекает существование постоянной $\delta_1 > 0$, такой, что касательные векторы $\alpha_s'(a^+)$ и $\alpha_s'(b^-)$ к соседним кривым $\alpha_s$ времениподобны для всех $s$, удовлетворяющих неравенству $|s| <$ $< \delta_1$.

Предположим теперь, что нельзя найти такое $\delta > 0$, чтобы все кривые $\alpha_s$ при $|s| < \delta$ были времениподобны. Тогда мы можем указать последовательность $s_n \to 0$, такую, что кривые $\alpha_{s_n}$ не являются времениподобными. Вследствие этого существует последовательность $t_n \in [a, b]$, для которой неравенство $g(\alpha_{s_n}'(t_n),$ $\alpha_{s_n}'(t_n)) \geqslant 0$ справедливо при любом $n$. Ввиду компактности прямоугольника $[a, b] \times [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ у последовательности $\{(t_n, s_n)\}$ есть точка накопления $(t, s)$. В силу того что $s_n \to 0$, точка накопления должна иметь вид $(t, 0)$; при этом из существования $\delta_1$ вытекает, что $t \neq a, b$. Переходя в неравенстве $g(\alpha_s'(t_n), \alpha_s'(t_n)) \geqslant$ $\geqslant 0$, справедливом при любом $n$, к пределу при $n \to \infty$, получим соотношение $g(c'(t), c'(t)) \geqslant 0$, которое противоречит тому, что $c$ — времениподобный геодезический сегмент. Таким образом, мы видим, что если $\alpha$: $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ — гладкая вариация времениподобной геодезической $c$: $[a, b] \to M$, то существует положительная постоянная $\delta$, такая, что $\alpha_s'(a^+)$ и $\alpha_s'(b^-)$ — времениподобные векторы, а $\alpha_s$ — времениподобные кривые для всех $|s| \leqslant \delta$.

Пусть теперь $\alpha$: $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ — кусочно-гладкая вариация времениподобной геодезической $c$: $[a, b] \to M$. По определению 9.6 найдется конечное разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots <$ $< t_k = b$ отрезка $[a, b]$, такое, что $\alpha \mid [t_i, t_{i+1}] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ является гладкой вариацией кривой $c\,[t_i, t_{i+1}]$. Из предыдущего

абзаца вытекает существование постоянной $\delta_i > 0$, такой, что для всех $s$, подчиненных условию $|s| \leqslant \delta_i$, касательные векторы $\alpha_s'(t_i^+)$ и $\alpha_s'(t_{i+1}^-)$ времениподобны и $\alpha_s \mid [t_i, t_{i+1}]$ — времениподобная кривая. Требуемое $\delta$ получаем, полагая $\delta = \min(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{k-1})$. $\square$

**Замечание 9.8.** Для вариаций изотропных геодезических результата, соответствующего лемме 9.7, не существует (см. определение 9.58 и далее).

Теперь индексную форму можно следующим образом связать с вариациями времениподобных геодезических сегментов $c\colon [a, b] \to M$. Для данного $Y \in V_0^\perp(c)$ определим *каноническую собственную вариацию* $\alpha\colon [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ геодезической $c$, положив

$$\alpha(t, s) = \exp_{c(t)}(sY(t)). \tag{9.5}$$

Прежде всего следует заметить, что так как $c([a, b])$ — компактное подмножество $M$, а дифференциал экспоненциального отображения $\exp_{p*}$ не имеет особенностей в начальной точке $T_pM$ для всех $p \in M$, то для данного $c([a, b])$ можно найти $\varepsilon > 0$, такое, что $\exp_{c(t)}(sY(t))$ определено для всех $s$, подчиненных условию $|s| \leqslant \varepsilon$, и для каждого $t \in [a, b]$. Во-вторых, из определения 9.1 вытекает, что $\alpha(t, s)$, определяемое формулой (9.5), является кусочно-гладкой вариацией $c$. Следовательно, для данного $Y \in V_0^\perp(c)$ в силу леммы 9.7 существует постоянная $\delta > 0$, такая, что соседние кривые $\alpha_s\colon t \to \alpha(t, s)$ времениподобны для всех $s$, удовлетворяющих условию $-\delta < s < \delta$.

Пусть $\alpha\colon [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ — произвольная гладкая вариация $c\colon [a, b] \to M$. Определим *векторное поле $V$ вариации $\alpha$* как векторное поле $V(t)$ вдоль $c$, задаваемое формулой

$$V(t) = \frac{d}{ds}(\alpha(t, s))\big|_{s=0}. \tag{9.6}$$

Более точно, пусть $\partial/\partial s$ — координатное векторное поле на прямоугольнике $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, соответствующее параметру $s$. Тогда векторное поле вариации задается формулой

$$V(t) = \alpha_* \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{(t, 0)}. \tag{9.7}$$

Для кусочно-гладкой вариации $\alpha\colon [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ непрерывное кусочно-гладкое векторное поле вариации получается следующим образом. Пусть $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ — разбиение отрезка $[a, b]$, такое, что $\alpha \mid [t_i, t_{i+1}] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ — гладкое отображение для всех $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Для данного

$t \in [a, b]$ выберем номер $i$ так, чтобы $t_i \leqslant t < t_{i+1}$, и положим

$$V(t) = [\alpha \mid [t_i, t_{i+1}] \times (-\varepsilon, \varepsilon)]_* \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{(t, 0)}.$$

Каноническая вариация (9.5) обладает следующим свойством: каждая кривая $s \to \alpha(t, s)$ суть геодезическая $s \to \exp_{c(t)}(sY(t))$, имеющая при $s = 0$ начальное направление $Y(t)$. Вследствие этого векторное поле канонической вариации (9.5) есть в точности векторное поле $Y \in V_0^{\perp}(c)$.

Если положить $L(s) := L(\alpha_s) = L(t \to \alpha(t, s))$, то $L'(0) = \frac{d}{ds} L(s)|_{s=0} = 0$ в силу того, что $c$ — гладкая времениподобная геодезическая, а

$$L''(0) = \frac{d^2}{ds^2} L(s)|_{s=0} = I(Y, Y). \tag{9.8}$$

Таким образом, если $I(Y, Y) > 0$ для некоторого $Y \in V_0^{\perp}(c)$, то каноническая собственная вариация $\alpha(t, s)$, определенная формулой (9.5), использующей $Y$, будет выдавать времениподобные соседние кривые $\alpha_s$, соединяющие $c(a)$ с $c(b)$ и такие, что $L(\alpha_s) > L(c)$ для достаточно малых $s$. Итак, если времениподобная геодезическая $c$: $[a, b] \to M$ максимальна (т. е. $L(c) = \mathrm{d}(p, q)$), то индексная форма $I$: $V_0^{\perp}(c) \times V_0^{\perp}(c) \to \mathbb{R}$ должна быть отрицательно полуопределенной. Прежде чем доказывать теорему Морса об индексе для времениподобных геодезических, необходимо установить следующую более четкую взаимосвязь между сопряженными точками, якобиевыми полями и индексной формой. Заметим, во-первых, что нулевое пространство индексной формы на $V_0(c)$ состоит из *гладких* якобиевых полей в $V_0(c)$ и, во-вторых, что $c$ свободна от сопряженных точек на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда индексная форма отрицательно определена на $V_0(c)$.

Прежде всего выведем из дифференциального уравнения Якоби простое, но важное следствие.

**Лемма 9.9.** *Пусть $c$ $[a, b] \to M$ — времениподобный геодезический сегмент и $Y$ — произвольное якобиево поле вдоль $c$. Тогда $\langle Y(t), c'(t)\rangle$ является линейной функцией $t$, т. е. $\langle Y(t), c'(t)\rangle = \alpha t + \beta$ для некоторых постоянных $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$.*

*Доказательство.* Вследствие того что $c$ — геодезическая, $\nabla_{c'} c' = 0$, и, значит, $\langle Y, c'\rangle' = \langle Y', c'\rangle + \langle Y, c''\rangle = \langle Y', c'\rangle$. Дифференцируя еще раз, в силу косой симметрии тензора Римана—Кристоффеля по первым двум индексам получаем, что

$$\langle Y, c'\rangle'' = \langle Y'', c'\rangle + \langle Y', c''\rangle = \langle Y'', c'\rangle = -\langle R(Y, c')c', c'\rangle = 0.$$

Таким образям, $\langle Y, c' \rangle$ — линейная функция.

**Следствие 9.10.** *Если $Y$ — произвольное якобиево поле вдоль времениподобной геодезической $c$: $[a, b] \to M$ и $Y(t_1) = Y(t_2) = 0$ для различных $t_1, t_2 \in [a, b]$, то $Y \in V^{\perp}(c)$.*

**Следствие 9.11.** *Если $Y \in V_0(c)$ — поле Якоби, то $Y' \in V^{\perp}(c)$.*

Используя теперь каноническую вариацию, мы можем из существования точки $t_0 \in (a, b)$, сопряженной $t = a$ вдоль $c$, вывести следующий геометрический факт.

**Предложение 9.12.** *Пусть времениподобная геодезическая $c$: $[a, b] \to M$ содержит точку $t_0 \in (a, b)$, сопряженную $t=a$ вдоль $c$. Тогда существует кусочно-гладкая собственная вариация $\alpha_s$ геодезической $c$, такая, что $L(\alpha_s) > L(c)$ для всех $s \neq 0$. Таким образом, геодезическая $c$: $[a, b] \to M$ не максимальна.*

*Доказательство.* В силу формул (9.5), (9.8) и леммы 9.7 достаточно построить кусочно-гладкое векторное поле $Y \in V_0^{\perp}(c)$, удовлетворяющее неравенству $I(Y, Y) > 0$, и взять в качестве $\alpha$ каноническую вариацию, ассоциированную с $Y$. С этой целью поступим следующим образом. Пусть $Y_1$ — не равное тождественно нулю якобиево поле вдоль $c$, подчиненное условию $Y_1(a) = Y_1(t_0) = 0$. Согласно следствию 9.10, $Y_1 \in V^{\perp}(c)$. Из равенства $Y_1(a) = Y_1(t_0) = 0$ в силу следствия 9.11 вытекает, что $Y_1' \in V^{\perp}(c)$. А из того, что $Y_1(t_0) = 0$ и $Y_1$ — не равное тождественно нулю якобиево поле, следует, что $Y_1'(t_0)$ — (ненулевой) пространственноподобный касательный вектор.

Обозначим через $I(\ ,\ )_a^s$ ограничение индексной формы на сегмент $c|_{[a, s]}$:

$$I(V, W)_a^s = -\int_a^s [\langle V', W' \rangle - \langle R(V, c')c', W \rangle]\, dt.$$

Так как $Y_1$ — якобиево поле, то из определения 9.4 (формула (9.2)) получаем, что

$$I(Y_1, Z)_a^s = -\langle Y_1', Z \rangle \big|_a^s \tag{9.9}$$

для любого $Z \in V^{\perp}(c)$.

Теперь можно построить кусочно-гладкое векторное поле $Y \in V_0^{\perp}(c)$ так, чтобы $I(Y, Y) > 0$. Пусть $\psi$: $[a, b] \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, удовлетворяющая условию $\psi(a) = \psi(b) = 0$ и $\psi(t_0) = 1$. Пусть $Z_1$ — единственное гладкое векторное поле, параллельное вдоль $c$ и такое, что $Z_1(t_0) = -Y_1'(t_0)$. Тогда $Z = \psi Z_1 \in V_0^{\perp}(c)$. Определим однопараметрическое семейство $Y_\varepsilon \in V_0^{\perp}(c)$, полагая

$$Y_\varepsilon = \begin{cases} Y_1(t) + \varepsilon Z(t), & \text{если} \quad a \leqslant t \leqslant t_0, \\ \varepsilon Z(t), & \text{если} \quad t_0 \leqslant t \leqslant b, \end{cases}$$

Тогда, используя формулу (9.9), получаем

$$\begin{aligned} I(Y_\varepsilon, Y_\varepsilon) &= I(Y_\varepsilon, Y_\varepsilon)_a^{t_0} + I(Y_\varepsilon, Y_\varepsilon)_{t_0}^b = \\ &= I(Y_1+\varepsilon Z, Y_1+\varepsilon Z)_a^{t_0} + I(\varepsilon Z, \varepsilon Z)_{t_0}^b = \\ &= I(Y_1, Y_1)_a^{t_0} + 2\varepsilon I(Y_1, Z)_a^{t_0} + \varepsilon^2 I(Z, Z)_a^{t_0} + \varepsilon^2 I(Z, Z)_{t_0}^b = \\ &= -\langle Y_1', Y_1\rangle\Big|_a^{t_0} - 2\varepsilon\langle Y_1', Z\rangle\Big|_a^{t_0} + \varepsilon^2 I(Z, Z). \end{aligned}$$

Ввиду того что $Y_1(a) = Y_1(t_0) = 0$, последнее выражение можно упростить:

$$I(Y_\varepsilon, Y_\varepsilon) = -2\varepsilon\langle Y_1'(t_0), Z(t_0)\rangle + \\ + \varepsilon^2 I(Z, Z) = 2\varepsilon\|Y_1'(t_0)\|^2 + \varepsilon^2 I(Z, Z).$$

Из того, что $Y_1'(t_0)$ — (ненулевой) пространственноподобный касательный вектор, и из ограниченности величины $I(Z, Z)$ вытекает существование некоторого $\varepsilon > 0$, такого, что $I(Y_\varepsilon, Y_\varepsilon) > 0$. Векторное поле $Y = Y_\varepsilon$, отвечающее этому значению $\varepsilon$, является искомым. $\square$

Обратимся теперь к весьма важному описанию якобиевых полей при помощи индексной формы. Это описание то же, что и для римановых пространств, и с такими же доказательствами. Важно заметить, что индексная форма выделяет якобиевы поля среди всех кусочно-гладких векторных полей в $V_0^\perp(c)$, а не только в классе всевозможных гладких полей в $V_0^\perp(c)$.

**Предложение 9.13.** *Пусть $c$: $[a, b] \to M$ — времениподобный геодезический сегмент. Тогда для $Y \in V_0^\perp(c)$ следующие высказывания эквивалентны*

(а) *$Y$ — (гладкое) якобиево поле вдоль $c$.*

(б) *$I(Y, Z) = 0$ для всех $Z \in V_0^\perp(c)$.*

*Доказательство.* Заметим прежде всего, что (б) непосредственно вытекает из (а) вследствие того, что для гладких векторных полей $Y$ и произвольного поля $Z$ индексную форму $I$ можно записать в следующем виде:

$$I(Y, Z) = -\langle Y', Z\rangle\Big|_a^b + \int_a^b \langle Y'' + R(Y, c')c', Z\rangle\, dt.$$

Если $Y$ — якобиево поле, то $I(Y, Z) = -\langle Y', Z\rangle\big|_a^b$. Поэтому $I(Y, Z)$ обращается в нуль для любого $Z \in V_0^\perp(c)$.

Чтобы показать, как из (б) следует (а), заметим сначала, что из того, что $c$ — времениподобный геодезический сегмент и $Y \in V_0^\perp(c)$, вытекают равенства $\langle Y', c'\rangle = 0$ и $\langle Y'' + R(Y, c')c', c'\rangle = 0$, справедливые во всех точках, где $Y$ дифференцируемо. Вычисляя левосторонние пределы, получаем также, что $\langle Y'(t_i), c'(t_i)\rangle = 0$ в конечном множестве точек разрыва $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ поля $Y$. По непрерывности правосторонние пре-

делы $\lim\limits_{t \to t_i^+} \langle Y'(t), c'(t) \rangle$ также равны нулю. Следовательно, векторы $\Delta_{t_i}(Y')$, определенные в замечании 9.5, удовлетворяют соотношению $\langle \Delta_{t_i}(Y'), c'(t_i) \rangle = 0$. Согласно формуле (9.4) замечания 9.5, индексную форму можно вычислить следующим образом:

$$I(Y, Z) = \sum_{i=0}^{k} \langle \Delta_{t_i}(Y'), Z(t_i) \rangle + \int_a^b \langle Y'' + R(Y, c')c', Z \rangle \, dt. \tag{9.10}$$

Пусть $\varphi$: $[a, b] \to [0, 1]$ — гладкая функция, у которой $\varphi(t_0) = \varphi(t_1) = \ldots = \varphi(t_k) = 0$ и $\varphi(t) > 0$ во всех других точках. Тогда векторное поле $Z_1 = \varphi(Y'' + R(Y, c')c')$ лежит в $V_0^\perp(c)$ и $Z_i(t_i) = 0$ для всех $i$. Ввиду того что равенство $I(Y, Z) = 0$ предполагается выполненным для всех $Z \in V_0^\perp(c)$, из формулы (9.10) получаем

$$0 = I(Y, Z_1) = \int_a^b \varphi(t) \| Y'' + R(Y, c')c' \|^2 \Big|_t \, dt.$$

Так как $Z_1$ — пространственноподобное векторное поле, гладкое, всюду, кроме точек $t_i$, и $\varphi(t) > 0$ при $t \notin \{t_i\}$, то $Y''(t) + R(Y(t), c'(t)), c'(t) = 0$, если $t \notin \{t_i\}$. Таким образом, $Y$ — кусочно якобиево поле, и формула (9.10) сводится к следующей:

$$I(Y, Z) = \sum_{i=0}^{k-1} \langle \Delta_{t_i}(Y'), Z(t_i) \rangle. \tag{9.11}$$

Вспоминая, что $\langle \Delta_{t_i}(Y'), c'(t_i) \rangle = 0$ для каждого $i$, можно построить векторное поле $Z_2 \in V_0^\perp(c)$, у которого $Z_2(t_i) = \Delta_{t_i}(Y')$ для $i = 1, \ldots, k-1$. Тогда будем иметь

$$0 = I(Y, Z_2) = \sum_{i=1}^{k} \| \Delta_{t_i}(Y') \|^2.$$

Из того, что все касательные векторы в этой сумме пространственноподобны, вытекает, что $\Delta_{t_i}(Y') = 0$ для $i = 1, \ldots, k-1$. Это означает, что $Y'$ не имеет разрывов в точках $t_i$. Вследствие того что для любого $t \in [a, b]$ существует единственное якобиево поле вдоль $c$, для которого $Y(t) = v$, $Y'(t) = w$, получаем, что требуемое гладкое якобиево поле получается, если собрать вместе якобиевы поля $Y \mid [t_i, t_{i+1}]$. □

Ввиду предложений 9.12 и 9.13 не вызывает удивления тот факт, что отрицательную определенность лоренцевой индексной формы следует связывать с отсутствием сопряженных точек в точности так же, как положительная определенность римановой индексной формы гарантируется отсутствием сопряженных точек

(Громол, Клингенберг и Мейер (1971, с. 164)). Отрицательная полуопределенность индексной формы в отсутствие сопряженных точек доказана Хокингом и Эллисом (1977, лемма 4.5.8). Бёлтсом (1977, предложение 4.4.5) и Бимом и Эрлихом (1979в, с. 376) было замечено, что отрицательная определенность индексной формы в отсутствии сопряженных точек «алгебраически» вытекает из полуопределенности так же, как и в доказательстве положительной определенности для римановой индексной формы. Чтобы привести доказательство отрицательной полуопределенности лоренцевой индексной формы в отсутствие сопряженных точек, нам необходимо получить лоренцевы аналоги нескольких важных результатов из римановой геометрии (см. Громол, Клингенберг и Мейер (1971, с. 151, 155—158)).

Для удобства конструирования якобиевых полей полезно ввести некоторые обозначения для отождествления касательного пространства $T_v(T_pM)$ с самим $T_pM$ при помощи «параллельного переноса в $T_pM$».

**Определение 9.14.** Для любых заданных $p \in M$ и $v \in T_pM$ *касательное пространство* $T_v(T_pM)$ *к касательному пространству* $T_pM$ *в* $v$ задается по правилу

$$T_v(T_pM) = \{\varphi_w \colon \mathbb{R} \to T_pM\},$$

где

$$\varphi_w(t) = v + tw.$$

Тогда $T_v(T_pM)$ интуитивно можно отождествить с $T_pM$ путем отождествления образа отображения $\varphi_w$ в $T_pM$ с вектором $w$. Более формально, пусть на $\mathbb{R}$ задана стандартная карта многообразия: $x(r) = r$ для всех $r \in \mathbb{R}$, т. е. $x = \mathrm{id}$. Тогда $\partial/\partial x$ — векторное поле на $\mathbb{R}$. Поскольку $\varphi_w \colon \mathbb{R} \to T_pM$ и $\varphi_w(0) = v$, имеем $\varphi_{w*} \colon T_0\mathbb{R} \to T_v(T_pM)$. Теперь можно дать следующее определение.

**Определение 9.15.** *Канонический изоморфизм* $\tau_v \colon T_pM \to T_v \times$ $\times (T_pM)$ задается по правилу

$$\tau_v(w) := \varphi_{w*} \frac{\partial}{\partial x}\bigg|_0 = \varphi'(0),$$

где

$$\varphi_w(t) = v + tw.$$

В частности, пусть $v = 0_p$ — нулевой вектор в касательном пространстве $T_pM$. Тогда $\varphi_w \colon \mathbb{R} \to T_pM$ — кривая $\varphi_w(t) = tw$ в $T_{0_p}(T_pM)$, и мы получаем, что $\tau_{0_p}(w) = \varphi_w$. Поэтому $T_{0_p}(T_pM)$ часто канонически отождествляют с самим $T_pM$, не делая различия между вектором $w \in T_pM$ и отображением $\varphi_w$. Если $p \in M$

и $v \in T_pM$, то по определению дифференциала получаем для экспоненциального отображения $\exp_p$: $T_pM \to M$ следующее правило:

$$\exp_{p_*}: T_v(T_pM) \to T_{\exp_p(v)}M.$$

В частности, для $v = 0_p$ имеем

$$\exp_{p_*}: T_{0_p}(T_pM) \to T_pM,$$

ввиду того что $\exp_p(0_p) = p$. Если $b = \tau_{0_p}(v) \in T_{0_p}(T_pM)$, а отображение $\varphi$: $\mathbb{R} \to T_pM$ определено по правилу $\varphi(t) = tv$, то $\exp_{p_*}(b) = \exp_{p_*}(\varphi_* \partial/\partial x|_0)$, где $\partial/\partial x$ — стандартное базисное векторное поле для $T\mathbb{R}$, определенное выше. Тем самым получим

$$\exp_{p_*}(b) = (\exp_{p_*} \circ \varphi_*)\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_0\right) = (\exp_p \circ \varphi)_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_0\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}(t \to \exp_p(tv))\,|_{t=0} = v.$$

Откуда $\exp_{p_{*0_p}} \circ \tau_v = \mathrm{id}_{T_pM}$. Этот факт просто устанавливает, что «дифференциал экспоненциального отображения в начальной точке пространства $T_pM$ является тождественным отображением».

Следующее предложение показывает, как дифференциал экспоненциального отображения можно использовать для построения якобиевых полей.

**Предложение 9.16.** *Пусть $c$: $[0, b] \to M$ — геодезическая, у которой $c(0) = p$, и вектор $w \in T_pM$ произволен. Тогда единственное якобиево поле $J$ вдоль $c$, удовлетворяющее условиям $J(0)=0$ и $J'(0) = w$, задается по формуле*

$$J(t) = \exp_{p_*}(t\tau_{tc'(0)}w).$$

*Доказательство.* Пусть $v = c'(0)$. Можно указать $\varepsilon > 0$ так, чтобы была определена гладкая вариация $\alpha$: $[0, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ геодезической $c$: $[0, b] \to M$, задаваемая посредством формулы $\alpha(t, s) = \exp_p(t(v + sw))$. Из того, что это вариация кривой $c$, у которой $s$-параметрические кривые $t \to \alpha(t, s)$ являются геодезическими, вытекает, что векторное поле вариации для этой деформации якобиево. Вследствие того что $\alpha_* \partial/\partial s|_{(t,s)} = \exp_{p_*}(\tau_{t(v+sw)}(w))$, векторное поле вариации есть в точности $J(t) = \exp_{p_*}(\tau_{tv}tw) = \exp_{p_*}(t\tau_{tv}w)$. Ввиду того что $\alpha(0, s) = c(0)$ для всех $s$, имеем $J(0) = 0$; путем прямых вычислений получаем второе соотношение $J'(0) = w$ (см. Громол, Клингенберг и Мейер (1971, с. 151)). □

Как и в римановой теории, теперь при помощи предложения 9.16 возможно доказать лемму Гаусса. Но сначала необходимо

ввести на $T_v(T_pM)$ естественное скалярное произведение $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$, используя для этого заданную на $T_pM$ лоренцеву метрику $\langle\ ,\ \rangle$ и канонический изоморфизм.

**Определение 9.17.** Скалярное произведение $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$: $T_v(T_pM) \times \times T_v(T_pM) \to \mathbb{R}$, ассоциированное с лоренцевой метрикой $\langle\ ,\ \rangle$ для $M$ задается по правилу $\langle\langle a,\ b\rangle\rangle = \langle\tau_v^{-1}(a),\ \tau_v^{-1}(b)\rangle$ для любых $a,\ b \in T_v(T_pM)$.

Теперь мы готовы доказать следующее утверждение.

**Теорема 9.18.** (лемма Гаусса). *Пусть $v \in T_pM$ — касательный вектор в области определения экспоненциального отображения и $a := t_v(v) \in T_v(T_pM)$. Тогда для любого $b \in T_v(T_pM)$ имеем*

$$\langle\langle a,\ b\rangle\rangle = \langle \exp_{p*} a,\ \exp_{p*} b\rangle. \tag{9.12}$$

*Таким образом, экспоненциальное отображение является «радиальной изометрией».*

*Доказательство.* Если $\varphi(t) = tv$, то $a = \varphi'(1)$. Если $c$ — геодезическая, $c(t) = \exp_p(tv) = \exp_p \circ \varphi(t)$, то $\exp_{p*} a = c'(1)$. Положим $w := \tau_v^{-1}(b) \in T_pM$. Пусть $Y$ — однозначно определенное якобиево поле вдоль $c$, у которого $Y(0) = 0$ и $Y'(0) = w$. Согласно предложению 9.16, мы знаем, что $Y(t) = \exp_{p*}(t\tau_{tv}w)$. В частности, $Y(1) = \exp_{p*}(\tau_v w) = \exp_{p*}(b)$.

Из определения 9.17 получаем, что $\langle\langle a,\ b\rangle\rangle = \langle\tau_v^{-1}(a),\ \tau_v^{-1}(b)\rangle = = \langle v,\ w\rangle$. Следовательно, лемма Гаусса будет доказана, если мы покажем, что $\langle v,\ w\rangle = \langle c'(1),\ Y(1)\rangle$. Но по лемме 9.9 функция $f(t) = \langle c'(t),\ Y(t)\rangle = \alpha t + \beta$ для некоторых постоянных $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Из того, что $Y(0) = 0$, вытекает, что $\beta = 0$ и $f(t) = = tf'(0) = t\langle c'(0)\, Y(0)\rangle = t\langle v,\ w\rangle$. В частности, $\langle c'(1),\ Y(1)\rangle = = f(1) = \langle v,\ w\rangle$, как и требовалось. □

Лемма Гаусса имеет интересные геометрические следствия. Доказательство этих следствий, которые можно провести в полной аналогии с соответствующими доказательствами Громола, Клингенберга и Мейера (1971, с. 156—159) (см. Бёлтс (1977, с. 75—77), будут опущены. У Пенроуза (1972a, с. 53) вместо леммы Гаусса используется синхронная координатная система.

**Следствие 9.19.** *Пусть $U$ — выпуклая нормальная окрестность в $M$, а $c$: $[0,\ 1] \to U$ — направленный в будущее времениподобный геодезический сегмент, идущий из $p = c(0)$ в $q = c(1)$ в $U$. Тогда если $\beta$: $[0,\ 1] \to U$ — любая направленная в будущее времениподобная кусочно-гладкая кривая из $p$ в $q$, то $L(\beta) \leqslant \leqslant L(c)$ и $L(\beta) < L(c)$, если $\beta$ нельзя получить из $c$ перепараметризацией.*

Основная идея доказательства состоит в том, что ввиду выпуклости $U$ кривые $\beta$ и $c$ можно поднять до лучей $\tilde{\beta}$: $[0, 1] \to T_pM$, $\tilde{c}$: $[0, 1] \to T_pM$, где $\tilde{c}(t) = tc'(0)$. Затем для сравнения $\beta' = \exp_{p*} \circ \tilde{\beta}$ и $c' = \exp_{p*} \circ \tilde{c}$, а следовательно, и длин кривой $\beta$ и геодезической $c$ можно применить лемму Гаусса.

Другая формулировка следствия 9.19, также приведенная у Бёлтса (1977, с. 75—77)), такова.

**Следствие 9.20.** *Пусть $v \in T_pM$ — времениподобный касательный вектор в области определения $\exp_p$ и $\varphi$: $[0, 1] \to T_pM$, $\varphi(t) = tv$, — кривая. Пусть далее $\psi$: $[0, 1] \to T_pM$ — кусочно-гладкая кривая, такая, что $\psi(0) = \varphi(0)$, $\psi(1) = \varphi(1)$ и $\exp_p \circ$ $\circ\, \psi$: $[0, 1] \to M$ является направленной в будущее непространственноподобной кривой. Тогда $L(\exp \circ \psi) \leqslant L(\exp \circ \varphi)$ и, более того,*

$$L(\exp \circ \psi) < L(\exp \circ \varphi)$$

*при условии, что существует $t_0 \in (0, 1)$, для которого компонента $b$ вектора $\psi'(t_0)$, ортогональная вектору $\tau_{\psi(t_0)}(\psi(t_0))/\|\psi(t_0)\|$, не переводится в нуль отображением $\exp_{p*}$.*

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы показать, что если времениподобный геодезический сегмент $c$ не имеет сопряженных точек (вспомните определение 9.3), то длина сегмента $c$ является локальным максимумом.

**Предложение 9.21.** *Пусть $c$: $[a, b] \to M$ — направленный в будущее времениподобный геодезический сегмент без сопряженных точек и $\alpha$: $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ — любая собственная кусочно-гладкая вариация сегмента $c$. Тогда существует положительная постоянная $\delta > 0$, такая, что соседние кривые $\alpha_s$: $[a, b] \to M$, задаваемые по правилу $\alpha_s(t) = \alpha(t, s)$, удовлетворяют неравенству $L(\alpha_s) \leqslant L(c)$, справедливому для всех $s$, подчиненных условию $|s| < \delta$. Если же $0 < |s| < \delta$ и кривую $\alpha_s$ нельзя получить из $c$ простой перепараметризацией, то $L(\alpha_s) < L(c)$.*

*Доказательство.* Перепараметризуем $\alpha$ в вариацию $\alpha$: $[0, \beta] \times$ $\times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$. Согласно лемме 9.7, найдется $\varepsilon_1 > 0$, такое, что все соседние кривые $\alpha_s$ вариации $\alpha \mid [0, \beta] \times (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ времениподобны. Поэтому можно ограничить внимание рассмотрением $\alpha \mid [0, \beta] \times (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$.

Положим $p = c(0)$. Пусть $\varphi$: $[0, \beta] \to T_pM$ — луч $\varphi(t) = tc'(0)$. Ввиду того что у $c$ нет сопряженных точек, $\exp_p$ имеет в $\varphi(t) \in T_pM$ максимальный ранг для любого $t \in [0, \beta]$. По теореме об обратной функции существует окрестность точки $\varphi(t)$ в $T_pM$, которую $\exp_p$ диффеоморфно отображает на окрестность точки $c(t)$ в $M$. В силу того что $\varphi([0, \beta])$ компактно в $T_pM$, можно найти конечное разбиение $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \beta$

и окрестность $U_j \supset \varphi([t_j, t_{j+1}])$ в $T_pM$, где $j = 0, 1, \ldots, k-1$, такую, что $h_j = \exp_p | U_j$: $U_j \to M$ является диффеоморфизмом окрестности $U_j$ на ее образ. По непрерывности можно найти постоянную $\delta_j > 0$, для которой $\alpha([t_j, t_{j+1}]) \times (-\delta_j, \delta_j)(\exp_p(U_j)$, где $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Положим $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_k\}$.

Кусочно-гладкое отображение $\Phi$: $[0, \beta] \times (-\delta, \delta) \to T_pM$, удовлетворяющее условиям $\exp_p \circ \Phi = \alpha$ и $\Phi(t, 0) = \varphi(t)$ для всех $t \in [0, \beta]$, можно определить теперь следующим образом. Для данной пары $(t, s) \in [0, \beta] \times (-\delta, \delta)$ выберем $j$ так, чтобы $t \in [t_j, t_{j+1}]$, и положим $\Phi(t, s) = (h_j)^{-1}(\alpha(t, s))$.

Следствие 9.20 позволяет утверждать, что $L(\alpha_s) = L(\exp_p \circ \circ \Phi) \leqslant L(\exp_p \circ \varphi) = L(c)$ для каждого $s$, удовлетворяющего условию $|s| \leqslant \delta$, причем равенство имеет место лишь в том случае, когда $\alpha_s$ — перепараметризация кривой $c$. □

При помощи предложения 9.21 можно показать, что отрицательная определенность индексной формы на $V_0^\perp(c)$ эквивалентна допущению, что $c$ не имеет на $[a, b]$ точек, сопряженных $t = a$ вдоль $c$.

**Теорема 9.22.** *Для направленного в будущее времениподобного геодезического сегмента $c$: $[a, b] \to M$ следующие высказывания равносильны:*

(а) *$c$ не имеет на $(a, b]$ сопряженных точек.*

(б) *$I$: $V_0^\perp(c) \times V_0^\perp(c) \to \mathbb{R}$ отрицательно определена.*

*Доказательство.* (а) $\Rightarrow$ (б) Предположим, что в $V_0^\perp(c)$ существует $Y \neq 0$, для которого $I(Y, Y) > 0$. Пусть $\alpha(t, s) = \exp_{c(t)} \times \times (sY(t))$ — каноническая вариация, ассоциированная с $Y$. Тогда $L'(0) = 0$, $L''(0) = I(Y, Y) > 0$, так что для всех достаточно малых $s \neq 0$ выполняется неравенство $L(\alpha_s) > L(c)$. Но это противоречит предложению 9.21. Следовательно, $I(Y, Y) \leqslant 0$, если $Y \neq 0$, так что индексная форма отрицательно полуопределена.

Остается показать, что если $Y \in V_0^\perp(c)$ и $I(Y, Y) = 0$, то $Y = 0$. Возьмем для этого произвольное $Z \in V_0^\perp(c)$. Согласно замечанию 9.2, $Y - tZ \in V_0^\perp(c)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Значит, $I(Y - - tZ, Y - tZ) \leqslant 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$ вследствие уже установленной выше отрицательной полуопределенности индексной формы. Из равенства $I(Y - tZ, Y - tZ) = -2tI(Y, Z) + t^2 I(Z, Z)$ вытекает, что $I(Y, Z) = 0$. Так как $Z$ было взято произвольным, то отсюда, применяя предложение 9.13 (б), получаем, что $Y$ — якобиево поле. Ввиду того что $c$ свободна от сопряженных точек, имеем $Y = 0$.

(б) $\Rightarrow$ (а) Предположим, что $Y$ — якобиево поле, удовлетворяющее условию $Y(a) = Y(t_1) = 0$, $a < t_1 \leqslant b$. Согласно след-

ствию 9.10, $Y \in V^{\perp}(c)$. Продолжим $Y$ до нетривиального векторного поля $Z \in V_0^{\perp}(c)$, полагая

$$Z(t) = \begin{cases} Y(t), & \text{если } a \leqslant t \leqslant t_1, \\ 0, & \text{если } t_1 \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

Тогда $I(Z, Z) = I(Z, Z)_a^{t_1} + I(Z, Z)_{t_1}^b = -\langle Z', Z\rangle\big|_a^{t_1} + 0 = 0$. □

Следствием из теоремы 9.22, весьма существенно используемым при доказательстве теоремы Морса о времениподобном индексе, является нижеследующее свойство максимальности якобиевых полей относительно индексной формы для времениподобных геодезических без сопряженных точек. Этот результат двойственен минимальности якобиевых полей по отношению к индексной форме для геодезических без сопряженных точек в римановых многообразиях.

**Теорема 9.23** (максимальность якобиевых полей). *Пусть $c$: $[a, b] \to M$ — времениподобный геодезический сегмент без сопряженных точек и $J \in V^{\perp}(c)$ — произвольное якобиево поле. Тогда для всякого векторного поля $Y \in V^{\perp}(c)$, отличного от $J$ и такого, что*

$$Y(a) = J(a), \qquad Y(b) = J(b), \tag{9.13}$$

*выполняется неравенство*

$$I(J, J) > I(Y, Y). \tag{9.14}$$

*Доказательство.* Векторное поле $W = J - Y \in V_0^{\perp}(c)$ по условию (9.13), и $W \neq 0$, так как по предположению $Y \neq J$. Тогда, согласно теореме 9.22, имеем $I(W, W) < 0$. Вычисляя $I(W, W)$, получаем, что

$$I(W, W) = I(Y, Y) - 2I(J, Y) + I(J, J) =$$
$$= I(Y, Y) + 2\langle J', Y\rangle\big|_a^b - \langle J', J\rangle\big|_a^b.$$

Ввиду того что $Y(a) = J(a)$ и $Y(b) = J(b)$, имеем $\langle J', Y\rangle\big|_a^b = \langle J', J\rangle\big|_a^b$. Таким образом,

$$I(W, W) = I(Y, Y) + 2\langle J', J\rangle\big|_a^b - \langle J', J\rangle\big|_a^b =$$
$$= I(Y, Y) + \langle J', J\rangle\big|_a^b = I(Y, Y) - I(J, J).$$

Так как $I(W, W) < 0$, то требуемое неравенство (9.14) доказано. □

Теперь после того, как доказана теорема 9.23, можно приступать к рассмотрению теоремы Морса об индексе. Но сначала нам нужно определить индекс для произвольной времениподобной геодезической $c$: $[a, b] \to M$. Приводимое ниже определение имеет смысл ввиду того, что $V_0^{\perp}(c)$ — линейное пространство.

**Определение 9.24.** *Квазииндекс* $\mathrm{Ind}_0(c)$ и *индекс* $\mathrm{Ind}(c)$ времениподобной геодезической $c$: $[a, b] \to M$ определяются следующими правилами:

$\mathrm{Ind}_0(c) = \sup\{\dim A$: $A$ — линейное подпространство пространства $V_0^\perp(c)$ и форма $I \mid A \times A$ положительно полуопределена$\}$ и

$\mathrm{Ind}(c) = \sup\{\dim A$: $A$ — линейное подпространство пространства $V_0^\perp(c)$ и форма $I \mid A \times A$ положительно определена$\}$.

Через $J_t(c)$ будем обозначать $\mathbb{R}$-линейное пространство гладких якобиевых полей $Y$ вдоль $c$, подчиненных условию $Y(a) = Y(t) = 0$, $a < t \leqslant b$.

В предложении 9.25 мы установим связь между $\mathrm{Ind}(c)$ и $\mathrm{Ind}_0(c)$ и докажем их конечность. Решающую роль в доказательстве этого предложения играет максимальность якобиевых полей относительно индексной формы для времениподобных геодезических без сопряженных точек. Основные идеи, положенные в основу доказательства предложения 9.25 и теоремы 9.27, восходят к Морсу (1934).

**Предложение 9.25.** *Пусть* $c$: $[a, b] \to M$ — *направленный в будущее времениподобный геодезический сегмент. Тогда индекс* $\mathrm{Ind}(c)$ *и квазииндекс* $\mathrm{Ind}_0(c)$ *конечны и*

$$\mathrm{Ind}_0(c) = \mathrm{Ind}(c) + \dim J_b(c). \tag{9.15}$$

*Доказательство.* Применим стандартный метод аппроксимации пространства $V_0^\perp(c)$ конечномерными линейными пространствами кусочно-гладких якобиевых полей. Возьмем для этого конечное разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ так, чтобы $c \mid [t_i, t_{i+1}]$ не имела сопряженных точек для каждого $i$, удовлетворяющего условию $0 \leqslant i \leqslant k-1$. Обозначим через $J\{t_i\}$ подпространство пространства $V_0^\perp(c)$, состоящее из всех $Y \in V_0^\perp(c)$, таких, что $Y \mid [t_i, t_{i+1}]$ — якобиево поле, где $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Из того, что $c \mid [t_i, t_{i+1}]$ не содержит сопряженных точек, вытекает, что для любого $i$ $\dim J\{t_i\} = (n-1)(k-1)$.

Аппроксимацию $\varphi$: $V_0^\perp(c) \to J\{t_i\}$ пространства $V_0^\perp(c)$ подпространством $J\{t_i\}$ определим следующим образом. Пусть $X \in V_0^\perp(c)$. Для каждого $i$, подчиненного условию $0 \leqslant i \leqslant k-1$, построим (единственное) якобиево поле $(\varphi X) \mid [t_i, t_{i+1}]$ вдоль $c \mid [t_i, t_{i+1}]$, удовлетворяющее условиям $(\varphi X)(t_i) = X(t_i)$ и $(\varphi X)(t_{i+1}) = X(t_{i+1})$. Тем самым $X$ аппроксимируется кусочно-гладким якобиевым полем $\varphi X$, у которого $(\varphi X)(t_i) = X(t_i)$ для каждого $t_i$, $0 \leqslant i \leqslant k$. Эта аппроксимация полезна еще и тем, что $\varphi$ не уменьшает индекса. Более точно, $\varphi \mid J\{t_i\}$ является тождественным отображением, так что $I(X, X) = I(\varphi X, \varphi X)$, если $X \in J\{t_i\}$. С другой стороны, если $X \notin J\{t_i\}$, то

$$I(X, X) < I(\varphi X, \varphi X), \tag{9.16}$$

в чем легко убедиться, применив теорему 9.23 к каждому частичному сегменту разбиения и просуммировав полученные неравенства.

Следующее вспомогательное утверждение показывает конечность индекса $\operatorname{Ind}(c)$ и квазииндекса $\operatorname{Ind}_0(c)$ и позволяет при вычислении этих индексов заменять $V_0^{\perp}(c)$ на $J\{t_i\}$.

**Лемма 9.26.** *Пусть* $\operatorname{Ind}_0'(c)$ *и* $\operatorname{Ind}'(c)$ — *соответственно квазииндекс и индекс формы* $I \mid J\{t_i\} \times J\{t_i\}$. *Тогда*

$$\operatorname{Ind}_0(c) = \operatorname{Ind}_0'(c), \quad \operatorname{Ind}(c) = \operatorname{Ind}'(c).$$

*Следовательно,* $\operatorname{Ind}_0(c)$ *и* $\operatorname{Ind}(c)$ *конечны.*

*Доказательство.* Вследствие единственности якобиева поля $J$ вдоль $c \mid [t_i, t_{i+1}]$, удовлетворяющего условиям $J(t_i) = v$ и $J(t_{i+1}) = w$, легко видеть, что отображение $\varphi\colon V_0^{\perp}(c) \to J\{t_i\}$ является $\mathbb{R}$-линейным, т. е. если $X_1, X_2 \in V_0^{\perp}(c)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\varphi(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha\varphi(X_1) + \beta\varphi(X_2)$. Поэтому $\varphi$ отображает линейное подпространство пространства $V_0^{\perp}(c)$ в линейное подпространство пространства $J\{t_i\}$.

Чтобы убедиться в справедливости леммы, покажем сначала, что если $A$ — подпространство пространства $V_0^{\perp}(c)$, на котором форма $I \mid A \times A$ положительно полуопределена, то отображение $\varphi \mid A \times A\colon A \times A \to J\{t_i\}$ инъективно. Пусть $X \in A$ и $\varphi(X) = 0$. Если $X \in J\{t_i\}$, то $\varphi(X) = X$, и, следовательно, $X = 0$. Если же $X \notin J\{t_i\}$, то, согласно формуле (9.16), $I(\varphi(X), \varphi(X)) > I(X, X)$. Тем самым условие $\varphi X = 0$ приводит к неравенству $I(X, X) < 0$, которое противоречит положительной полуопределенности формы $I \mid A \times A$. Таким образом, если $\varphi X = 0$, то $X = 0$.

Теперь, зная, что отображение $\varphi$ инъективно на тех подпространствах пространства $V_0^{\perp}(c)$, где форма $I$ положительно полуопределена, можно завершить доказательство леммы. Пусть $A$ — подпространство пространства $V_0^{\perp}(c)$, на котором форма $I \mid A \times A$ положительно полуопределена. Тогда из неравенства (9.16) получаем, что индексная форма пространства $J\{t_i\}$ является положительно полуопределенной на подпространстве $\varphi(A) \subset J\{t_i\}$. Вследствие того что $\varphi$ инъективно на каждом таком подпространстве (см. выше), получим равенство $\dim A = \dim \varphi(A)$. Значит, $\operatorname{Ind}_0'(c) \geqslant \operatorname{Ind}_0(c)$. С другой стороны, из того, что $J\{t_i\}$ является линейным подпространством $V_0^{\perp}(c)$, имеем $\operatorname{Ind}_0'(c) \leqslant \operatorname{Ind}_0(c)$. Тем самым $\operatorname{Ind}_0(c) = \operatorname{Ind}_0'(c)$. Те же самые доводы показывают, что $\operatorname{Ind}(c) = \operatorname{Ind}'(c)$. $\square$.

Чтобы завершить доказательство предложения 9.25, мы должны установить справедливость равенства $\operatorname{Ind}_0(c) = \operatorname{Ind}(c) + \dim J_b(c)$. Возьмем для этого второе разбиение $a = s_0 < s_1 < \ldots$

$< s_m = b$ так, чтобы $\{s_1, \ldots, s_{m-1}\} \cap \{t_1, \ldots, t_{k-1}\} = \varnothing$ и $c \mid [s_i, s_{i+1}]$ не имела сопряженных точек для каждого $i$, удовлетворяющего условию $0 \leqslant i \leqslant m - 1$. Обозначим через $J\{s_i\}$ линейное подпространство $V_0^\perp(c)$, состоящее из всех векторных полей $Y$, таких, что $Y \mid [s_i, s_{i+1}]$ — якобиево поле для каждого $i = 0, 1, \ldots, m - 1$. Из того, что разбиения $\{s_i\}$ и $\{t_i\}$ различны, за исключением точек $a = s_0 = t_0$ и $b = s_m = t_k$, вытекает, что

$$J\{t_i\} \cap J\{s_i\} = J_b(c),$$

где через $J_b(c)$ обозначено линейное пространство всех (гладких) якобиевых полей $J$ вдоль $c$, подчиненных условию $J(a) = J(b) = 0$. Согласно следствию 9.10, имеем $J_b(c) \subset V_0^\perp(c)$. Кроме того, если $X \in J\{s_i\}$, но $X \notin J_b(c)$, то в силу неравенства (9.16) получаем

$$I(X, X) < I(\varphi X, \varphi X). \tag{9.17}$$

Применяя доказательство леммы 9.26 к разбиению $\{s_i\}$ отрезка $[a, b]$, выберем линейное подпространство $B_0'$ пространства $J\{s_i\}$ так, чтобы форма $I \mid B_0' \times B_0'$ была положительно полуопределена и $\mathrm{Ind}_0(c) = \dim B_0'$. Из того, что $\dim B_0' = \mathrm{Ind}_0(c) < \infty$, вытекает, что $J_b(c)$ является линейным подпространством $B_0'$. Согласно неравенству (9.17), в соответствии с доказательством леммы 9.26 отображение

$$\varphi \mid B_0'\colon B_0' \to J\{t_i\}$$

инъективно. Поэтому, положив $B_0 = \varphi(B_0')$, получаем, что $\dim B_0 = \dim B_0' = \mathrm{Ind}_0(c)$. Так как $B_0$ — конечномерное линейное пространство и $J_b(c)$ — его подпространство, то можно указать линейное подпространство $B$ пространства $B_0$, такое, что $B_0 = B \oplus J_b(c)$, где знак $\oplus$ обозначает прямую сумму линейных пространств.

Покажем теперь, что форма $I \mid B \times B$ положительно определена. По построению известно, что форма $I \mid B_0' \times B_0'$ положительно полуопределена. Далее, представляя $0 \neq Z \in B$ в виде $Z = \varphi(X)$, где $X \in B_0'$, заключаем, что $X \notin J_b(c)$. (Если $X \in J_b(c)$, то $\varphi(X) = X$, так что $Z = \varphi(X) = X \in J_b(c)$; последнее невозможно ввиду того, что по построению $B \cap J_b(c) = \{0\}$.) Следовательно, $I(Z, Z) = I(\varphi X, \varphi X) > I(X, X)$ (последнее неравенство получаем согласно формуле (9.17)). Ввиду того что форма $I \mid B_0' \times B_0'$ положительно полуопределена, получаем, что $I(Z, Z) > I(X, X) \geqslant 0$, так что $I(Z, Z) > 0$. Это рассуждение показывает, что форма $I \mid B \times B$ положительно определена. В обозначениях леммы 9.26 имеем $\mathrm{Ind}'(c) \geqslant \dim B$.

Из разложения $B_0$ в прямую сумму $B_0 = B \oplus J_b(c)$ получаем равенство

$$\mathrm{Ind}_0(c) = \dim B_0 = \dim B + \dim J_b(c);$$

и, кроме того, известно, что $\mathrm{Ind}'(c) \geqslant \dim B$. Поэтому доказательство предложения 9.25 будет завершено, если мы покажем, что $\mathrm{Ind}'(c) \leqslant \dim B$.

Чтобы установить это неравенство, предположим, что $B' \subset J\{t_i\}$ — линеное подпространство, для которого форма $I \mid B' \times B'$ положительно определена и $\dim B' = \mathrm{Ind}'(c)$. Допустим, что $\dim B' > \dim B$. Тогда форма $I$ положительно полуопределена на $B' \oplus J_b(c)$, так что $\dim(B' \oplus J_b(c)) \leqslant \mathrm{Ind}_0(c)$. С другой стороны, вследствие неравенства $\dim B' > \dim B$ получаем, что

$$\dim(B' \oplus J_b(c)) > \dim(B \oplus J_b(c)) = \mathrm{Ind}_0(c).$$

Это противоречие показывает, что $\dim B' \leqslant \dim B$. Откуда $\mathrm{Ind}'(c) \leqslant \dim B$, как и требовалось. □

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы доказать теорему Морса об индексе для времениподобных геодезических сегментов. Доказательство, которое мы здесь приведем, основывается на доказательстве Громола, Клингенберга и Мейера (1971, с. 168—171) для римановых пространств.

**Теорема 9.27** (теорема Морса о времениподобном индексе). *Пусть $c\colon [a, b] \to M$ — времениподобный геодезический сегмент. Обозначим через $J_t(c)$, $t \in [a, b]$, $\mathbb{R}$-линейное пространство гладких якобиевых полей $Y$ вдоль $c$, удовлетворяющих условию $Y(a) = Y(b) = 0$. Тогда* 1) *число сопряженных точек геодезической $c$ конечно и* 2) *индекс* $\mathrm{Ind}(c)$ и *квазииндекс* $\mathrm{Ind}_0(c)$ *формы $I\colon V_0^\perp(c) \times V_0^\perp(c) \to \mathbb{R}$ вычисляются по формулам*

$$\mathrm{Ind}(c) = \sum_{t \in (a, b]} \dim J_t(c) \tag{9.18}$$

*и*

$$\mathrm{Ind}_0(c) = \sum_{t \in (a, b]} \dim J_t(c) \tag{9.19}$$

*соответственно.*

*Доказательство*. Покажем, что сумма $\sum_{t \in (a, b]} \dim J_t(c)$ конечна. Мы знаем, что $\dim J_t(c) \geqslant 1$ тогда и только тогда, когда точка $c(t)$ сопряжена $t = a$ вдоль $c$. Вложения

$$i\colon J_t(c) \to V_0^\perp(c)$$

можно определить для каждого $t \in [a, b]$ при помощи формул

$$i(Y)(s) = \begin{cases} Y(s) & \text{для } a \leqslant s \leqslant t, \\ 0 & \text{для } t \leqslant s \leqslant b. \end{cases}$$

Ясно, что $\dim J_t(c) = \dim i(J_t(c))$ для любого $t \in (a, b]$.

Напомним, что, согласно предложению 9.25, индекс $\operatorname{Ind}_0(c)$ конечен. Тем самым, для того чтобы показать, что у $c$ лишь конечное число сопряженных точек, достаточно убедиться в том, что если $\{t_1, \ldots, t_k\}$ — любое множество попарно различных точек, сопряженных $t = a$ вдоль $c$, то $k \leqslant \operatorname{Ind}_0(c)$. Положим $A_j = i(J_{t_j}(c))$, где $t = 1, 2, \ldots, k$. Тогда $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$ является линейным подпространством $V_0^\perp(c)$, и, раскладывая $Z \in A$ в сумму $Z = \sum_{j=1}^k \lambda_j Z_j$, где $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $Z_j \in A_j$, получаем, что $I(Z, Z) = \sum_{j,l} \lambda_j \lambda_l I(Z_j, Z_l)$. Если $t_j \leqslant t_l$, то, используя формулу (9.2), включение $Z_l \in A_l$ и равенства $Z_j(a) = Z_j(t_l) = 0$, получаем, что $I(Z_j, Z_l) = I(Z_j, Z_l)_a^{t_l} + I(Z_j, Z_l)_{t_l}^b = -\langle Z_l', Z_j\rangle\big|_a^{t_l} + I(0, Z_l)_{t_l}^b = 0$. В силу симметричности индексной формы $I(Z, Z) = 0$. Поэтому форма $I \mid A \times A$ положительно полуопределена. Следовательно,

$$k \leqslant \dim A = \dim A_1 + \cdots + \dim A_k \leqslant \operatorname{Ind}_0(c),$$

как и требовалось. Таким образом, $c\colon [a, b] \to M$ имеет лишь конечное число сопряженных точек. Обозначим их через $t_1 < t_2 < \cdots < t_r$, $t_m \in (a, b]$. Для всех $t \in (a, b]$, кроме $t \in \{t_1, t_2, \ldots, t_r\}$, имеем $\dim J_t(c) = 0$, и поэтому сумма $\sum_{t \in (a, b]} \dim J_t(c)$ конечна.

Ввиду того что, согласно предложению 9.25, $\operatorname{Ind}_0(c) = \operatorname{Ind}(c) + \dim J_b(c)$, для доказательства теоремы 9.27 достаточно установить справедливость равенства

$$\operatorname{Ind}_0(c) = \sum_{t \in (a, b]} \dim J_t(c). \tag{9.20}$$

Обозначим через $\mathbb{Z}$, как обычно, множество целых чисел с дискретной топологией и определим отображения $f, f_0\colon (a, b] \to \mathbb{Z}$ по правилам $f(t) = \operatorname{Ind}(c \mid [0, t])$ и $f_0(t) = \operatorname{Ind}_0(c \mid [0, t])$. Покажем, что соотношение (9.20) будет выполнено, если отображение $f$ непрерывно слева, а отображение $f_0$ непрерывно справа, т. е. $\lim_{t_n \uparrow t} f(t_n) = f(t)$, $\lim_{t_n \downarrow t} f_0(t_n) = f_0(t)$. Из соотношения (9.15) вытекает, что $f(t) - f_0(t) = -\dim J_t(c) = 0$, если $t \notin \{t_1, \ldots, t_r\}$. Допуская, что $f$ непрерывно слева и $f_0$ непрерывно справа, имеем также, что $f(t_{j+1}) = f_0(t_j)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, r - 1$. Тем самым

$$\sum_{t \in (a, b]} \dim J_t(c) = \sum_{t \in (a, b]} [f_0(t) - f(t)] =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} [f_0(t_j) - f(t_j)] = f_0(t_r) - f(t_1).$$

Согласно теореме 9.22, индексная форма отрицательно определена в том случае, если $c$ свободна от сопряженных точек, так что $f(t) = 0$ для всех $t < t_1$. Отсюда в силу непрерывности $f$ слева получаем, что $f(t_1) = 0$. Поэтому $\sum_{t \in (a, b]} \dim J_t(c) = f_0(t_r)$. Из того, что $f_0$ постоянно на $[t_r, b]$, имеем $f_0(t_r) = f_0(b)$. Следовательно,

$$\sum_{t \in (a, b]} \dim J_t(c) = f_0(t_r) = f_0(b) = \mathrm{Ind}_0(c \mid [a, b]),$$

что и доказывает равенство (9.20).

Таким образом, доказательство теоремы Морса об индексе свелось к установлению непрерывности отображения $f$ слева, а отображения $f_0$ справа. Заметим прежде всего, что функции $f$ и $f_0$ являются неубывающими (т. е. $f(t) \geqslant f(s)$, $f_0(t) \geqslant f_0(s)$, если $t \geqslant s$). Зафиксируем для этого $t_1, t_2 \in (a, b]$, $t_1 \leqslant t_2$. Пусть $c_1 = c \mid [0, t_1]$ и $c_2 = c \mid [0, t_2]$. Вложение $i$: $V_0^{\perp}(c_1) \to V_0^{\perp}(c_2)$, задаваемое формулой

$$i(Y)(t) = \begin{cases} Y(t) & \text{для} \quad a \leqslant t \leqslant t_1, \\ 0 & \text{для} \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \end{cases}$$

$\mathbb{R}$-линейно. Это отображение обладает следующим свойством: $I(Y, Y) = I(i(Y), i(Y))$, где индексы вычисляются относительно $c_1$ и $c_2$ соответственно. Поэтому, если $A \subset V_0^{\perp}(c_1)$ — линейное подпространство, на котором индексная форма геодезической $c_1$ положительно (полу)определена, то $i(A)$ — линейное подпространство пространства $V_0^{\perp}(c_2)$, на котором индексная форма геодезической $c_2$ положительно (полу)определена и $\dim A = \dim i(A)$. Тем самым $f(t_1) = \mathrm{Ind}(c \mid [0, t_1]) \leqslant \mathrm{Ind}(c \mid [0, t_2]) = f(t_2)$. Неравенство $f_0(t_1) \leqslant f_0(t_2)$ доказывается аналогично. Таким образом, $f_0$ и $f$ не возрастают.

Чтобы исследовать свойства непрерывности функций $f$ и $f_0$, зафиксируем произвольное $\tilde{t} \in (a, b]$ и изучим непрерывность $f$ и $f_0$ в $\tilde{t}$, используя тот же прием аппроксимации, что и в доказательстве леммы 9.26. Из того, что $c([a, b])$ — компактное подмножество многообразия $M$, вытекает существование положительной постоянной $\delta > 0$, такой, что для любых $s_1, s_2 \in [a, b]$, связанных соотношениями $|s_1 - s_2| < \delta$ и $s_1 \leqslant s_2$, геодезический сегмент $c \mid [s_1, s_2]$ свободен от сопряженных точек. Выберем разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \tilde{t}$ так, чтобы $|t_i - t_{i+1}| < \delta$ для любого $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Пусть $J \subset [a, b]$ — открытый промежуток, содержащий $\tilde{t}$, для всех точек $t$ которого выполняется неравенство $|t - t_{k-1}| < \delta$. Обозначим через $\tilde{J}(c_t)$ конечномерное $\mathbb{R}$-линейное подпространство $V_0^{\perp}(c \mid [0, t])$, состоящее из всевозможных векторных полей $Y$, для которых $Y \mid [t_j, t_{j+1}]$, где $j = 0, 1, \ldots, k-2$, и $Y \mid [t_{k-1}, t]$ — якобиевы поля. Согласно

лемме 9.26, $f(t)$ равно индексу формы $I$, ограниченной на $\tilde{J}(c_t) \times \tilde{J}(c_t)$, а $f_0(t)$ — квазииндексу формы $I$, ограниченной на $\tilde{J}(c_t) \times \tilde{J}(c_t)$.

Положим $E = N(c(t_1)) \times \cdots \times N(c(t_{k-1}))$. Множество $E$ замкнуто вследствие того, что каждое $N(c(t_i)) = \{v \in T_{c(t_i)}M: \langle v, c'(t_i)\rangle = 0\}$ является замкнутым подмножеством пространственноподобных касательных векторов. Полагая $\langle\langle v, w\rangle\rangle = \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_i, w_i\rangle$ для $v = (v_1, \ldots, v_{k-1})$, $w = (w_1, \ldots, w_{k-1}) \in E$, определяем евклидову метрику произведения $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle: E \times E \to \mathbb{R}$. Тогда, согласно замечанию 9.2, $S = \{v \in E: \|v\| = 1\}$ компактно.

Если $Y \in \tilde{J}(c_t)$, то по определению имеем $Y(0) = Y(t) = 0$. Ввиду того что $c \mid [t_i, t_{i+1}]$ не содержит сопряженных точек, для любых $v \in N(c(t_i))$ и $w \in N(c(t_{i+1}))$ существует единственное якобиево поле $Y$ вдоль $c$, удовлетворяющее условиям $Y(t_i) = v$ и $Y(t_{i+1}) = w$. Так как $\langle Y, c'\rangle|_t$ является линейной функцией переменной $t$ и $\langle v, c'(t_i)\rangle = \langle w, c'(t_{i+1})\rangle = 0$, то $\langle Y, c'\rangle|_t = 0$ для всех $t$. Следовательно, отображение

$$\varphi_t: \tilde{J}(c_t) \to E,$$

определенное для $t \in J$ по правилу

$$\varphi_t(Y) = (Y(t_1), \ldots, Y(t_{k-1})),$$

является изоморфизмом. Для каждого $t \in J$ квадратичная форма $Q_t$: $E \times E \to \mathbb{R}$ определяется следующим образом: $Q_t(u, v) = I(\varphi_t^{-1}(u), \varphi_t^{-1}(v))$. Согласно лемме 9.26, для каждого $t \in J$ $f_0(t)$ равно квазииндексу квадратичной формы $Q_t$ на $E \times E$, а $f(t)$ — индексу квадратичной формы $Q_t$ на $E \times E$.

Определим отображение $Q: E \times E \times J \to \mathbb{R}$, применяя построенную выше форму $Q_t$: $Q(u, v, t) = Q_t(u, v)$. Чтобы доказать объявленные выше свойства непрерывности отображений $f$ и $f_0$, убедимся сначала в том, что непрерывно отображение $Q$. Положим $B = \{Y \mid [0, t_{k-1}]: Y \in J(c_t)\}$. Множество $B$ изоморфно $E$; соответствующий изоморфизм $\varphi$: $B \to E$ задается по правилу

$$\varphi(Y) = (Y(t_1), \ldots, Y(t_{k-1})).$$

Тогда

$$Q(u, v, t) = I(\varphi_t^{-1}(u), \varphi_t^{-1}(v)) = I(\varphi^{-1}u, \varphi^{-1}v) - \langle X_{u,t}, Y'_{v,t}\rangle_{t_{k-1}}^{t},$$

где $X_{u,t}$ и $Y_{v,t}$ — якобиевы поля вдоль $c$:

$$X_{u,t} = \varphi_t^{-1}(u) \mid [t_{k-1}, t]$$

и

$$Y_{v,t} = \varphi_t^{-1}(v) \mid [t_{k-1}, t].$$

Вследствие того что отображение $(u, v) \to I(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v))$, переводящее $E \times E$ в $\mathbb{R}$, является билинейной формой, получаем, что отображение $(u, v, t) \to I(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v))$ безусловно непрерывно. Согласно предложению 9.16, отображение $(u, v, t) \to$ $\to \langle X_{u,t}, Y'_{v,t}\rangle \Big|_{t_{k-1}}^{t}$ также непрерывно. Тем самым непрерывность отображения $Q: E \times E \times J \to \mathbb{R}$ установлена.

Наконец, мы готовы показать, что функция $f_0$ непрерывна справа, а функция $f$ непрерывна слева для любого $\bar{t} \in (a, b]$. Ввиду того что отображение $f$, согласно лемме 9.26, является конечнозначным, можно выбрать подпространство $A$ пространства $E$, у которого $\dim A = f(t)$ и $Q(u, u, \bar{t}) > 0$ для всех $u \in A$, $u \neq 0$. Так как $Q: E \times E \times J \to \mathbb{R}$ непрерывно, а $S = \{u \in$ $\in A: \|u\| = 1\}$ компактно, то в $J$ существует окрестность $J_0$ точки $\bar{t}$, такая, что $Q(u, u, t) > 0$ для всех $t \in J_0$ и $u \in S$. Следовательно, форма $Q_t \mid A \times A$ положительно определена для любого $t \in J_0$. Тем самым $f(t) \geqslant f(\bar{t})$ для всех $t \in J_0$. Из того, что функция $f$ неубывающая, вытекает, что $f(t) = f(\bar{t})$ для всех $t \in$ $\in J_0$, подчиненных условию $t \leqslant \bar{t}$. Таким образом, функция $f$ непрерывна слева.

Остается показать непрерывность $f_0$ в $\bar{t}$ справа. Пусть $\{s_n\}$ — последовательность в $J$, такая, что $s_n > t$ для всех $n$ и $s_n \to \bar{t}$. В силу того что $f_0$ не убывает и принимает только целые значения, можно считать, что $f_0(s_n) = k$ для всех $n$. Тогда вследствие монотонности функции $f_0$ имеем $f_0(\bar{t}) \leqslant k$. Поэтому остается показать, что $f_0(\bar{t}) \geqslant k$. Чтобы убедиться в этом, выберем для каждого $n$ $k$-мерное подпространство $A_n$ пространства $E$ так, чтобы форма $Q_{s_n} \mid A_n \times A_n$ была положительно полуопределена. Пусть $\{a_1(n), \ldots, a_k(n)\}$ — ортонормированный базис подпространства $A_n$. Поэтому $\{a_1(n), \ldots, a_k(n)\}$ содержится в компактном подмножестве $S$ пространства $E$. Вследствие компактности $S$ можно предполагать, что $a_j(n) \to a_j \in S$ для каждого $j$. Из непрерывности скалярного произведения вытекает, что векторы $\{a_1, \ldots, a_k\}$ образуют ортонормированное подмножество $S$. Тогда $A =$ $= \mathrm{Lin}\{a_1, \ldots, a_k\}$ — $k$-мерное подпространство пространства $E$, причем для любого $u \in A$ справедливо разложение $u = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j$. Положим $u(n) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j(n)$. Ясно, что $u(n) \to u$ при $n \to \infty$. Поэтому, используя непрерывность отображения $Q: E \times E \times J \to$ $\to \mathbb{R}$, из положительной полуопределенности $Q_{s_n} \mid A_n \times A_n$ для любого $n$ получаем, что

$$Q_{\bar{t}}(u, n) = \lim_{n \to \infty} Q(u(n), u(n), s_n) \geqslant 0.$$

Таким образом, форма $Q_{\bar{t}} \mid A \times A$ является положительно полуопределенной. Таким образом, $f_0(\bar{t}) \geqslant \dim A = k$, как и требовалось. □

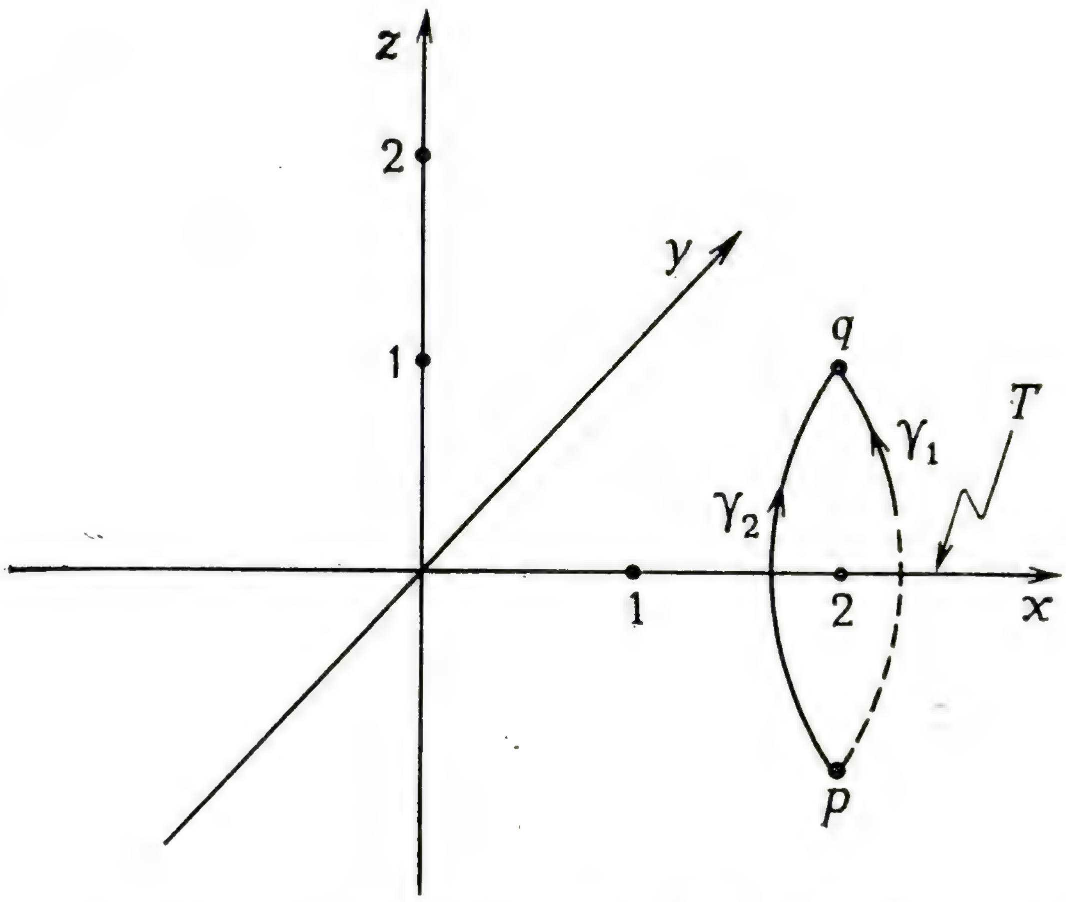



Рис. 9.1. Показано пространство-время $M = \mathbb{R}^3 \setminus T$, которое является односвязным и тем не менее неодносвязно в будущем. Направленные в будущее времениподобные кривые $\gamma_1$ и $\gamma_2$ из $p$ в $q$ не гомотопны в классе времениподобных кривых с концами $p$ и $q$.

Мы заключим этот раздел одним приложением теоремы Морса о времениподобном индексе к исследованию структуры множества раздела односвязных в будущем глобально гиперболических пространственно-временны́х многообразий (см. Бим и Эрлих (1979в, разд. 8)).

**Определение 9.28.** Пространство-время $(M, g)$ называется *односвязным в будущем*, если для любых произвольных $p, q \in M$ любые две направленные в будущее времениподобные кривые из $p$ в $q$ гомотопны в классе гладких направленных в будущее времениподобных кривых с фиксированными концами $p$ и $q$.

Это понятие, являющееся лоренцевым аналогом простой односвязности, изучалось Авезом (1963), Смитом (1960а) и Флаэрти (1975а, с. 395). Обращение в нуль лоренцевой фундаментальной группы означает, что многообразие $(M, g)$ односвязно в будущем. Однако односвязность $M$ как топологического пространства не влечет за собой, как показывает приводимый ниже пример Герока, односвязности $(M, g)$ в будущем. Рассмотрим $\mathbb{R}^3$ с координатами $(x, y, t)$ и лоренцевой метрикой $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2$. Пусть $T = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \geqslant 0\}$. Рассмотрим $M = \mathbb{R}^3 \setminus T$ с лоренцевой метрикой, индуцированной из $(\mathbb{R}^3, ds^2)$. Легко видеть, что $M$ односвязно. Точки $p = (2, 0, -1)$ и $q = (2, 0, 1)$ можно соединить направленными в будущее времениподобными кривыми $\gamma_1$ и $\gamma_2$, проходящими по разные стороны от оси $Ox$ (рис. 9.1). Однако $\gamma_1$ и $\gamma_2$ не гомотопны в классе направленных в будущее времениподобных кривых, начинающихся в $p$ и заканчивающихся в $q$, ввиду

того что такая гомотопия должна была бы огибать точку (0, 0, 0) и, значит, включать и пространственноподобные кривые.

Заметим, что если $(M, g)$ односвязно в будущем, то пространство путей гладких времениподобных кривых из $p$ в $q$ связно. Тем самым, привлекая лемму 4.11 Чигера и Эбина (1975, с. 85) и стандартную теорию Морса для пространства путей (см. Эверсон и Толбот (1976), Уленбек (1975), Вудхауз (1976)), получаем следующее утверждение.

**Предложение 9.29.** *Пусть $(M, g)$ — односвязное в будущем и глобально гиперболическое пространство-время. Зафиксируем $p \in M$ и предположим, что каждая направленная в будущее времениподобная геофизическая, исходящая из $p$, имеет либо нулевой индекс, либо не меньший двух. Тогда для данной точки $q \in I^+(p)$, такой, что $p$ и $q$ времениподобно не сопряжены, существует в точности одна направленная в будущее времениподобная геодезическая нулевого индекса, идущая из $p$ в $q$, а именно единственная максимальная геодезическая из $p$ в $q$.*

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы доказать лоренцев аналог для глобально гиперболических односвязных в будущем пространственно-временны́х многообразий — теорему Чигера и Эбина (1975, теорема 5.11) о множестве раздела полного риманова многообразия, являющуюся обобщением теоремы Криттендена (1962) для односвязных групп Ли с биинвариантными римановыми метриками. Глобальная гиперболичность используется в теореме 9.30 для того, чтобы гарантировать наличие максимальных геодезических сегментов, соединяющих хронологически связанные точки.

**Теорема 9.30.** *Пусть $(M, g)$ — односвязное в будущем глобально гиперболическое пространство-время. Предположим, что для точки $p \in M$ первая точка, сопряженная $p$ в будущем вдоль каждой времениподобной геодезической $\gamma$, $\gamma(0) = p$, является точкой порядка $\geqslant 2$. Тогда множество времениподобного раздела точки $p$ в будущем и множество первых сопряженных $p$ точек в будущем совпадают. Тем самым все, исходящие из $p$ геодезические являются максимальными вплоть до первой сопряженной точки.*

*Доказательство.* В ходе этого доказательства все геодезические будут времениподобными, нормальными и направленными в будущее. Достаточно показать, что если $\gamma\colon [0, t] \to M$, $\gamma(0) = p$, имеет нулевой индекс и точка $\gamma(t)$ не сопряжена $p$ вдоль $\gamma \mid [0, t]$, то $\gamma$ максимальна. Вследствие замкнутости множества вырожденных точек отображения $\exp_p$ из теоремы 9.27 вытекает существование положительных чисел $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, таких, что если $\measuredangle(v, \gamma'(0)) < \varepsilon_1$ и $\varepsilon < \varepsilon_2$, то направленная в будущее времени-

подобная геодезическая $\sigma$: $[0, t+\varepsilon] \to M$, у которой $\sigma'(0) = v$, имеет нулевой индекс. Здесь символ $\measuredangle$ обозначает угол, измеренный при помощи произвольной вспомогательной римановой метрики.

Согласно теореме Сарда, найдется последовательность точек $\{p_i\} \subset I^+(p)$, сходящаяся к $\gamma(t)$ и такая, что всякий времениподобный геодезический сегмент из $p$ в $p_i$ имеет несопряженные концевые точки. По предположению каждый такой сегмент имеет либо нулевой индекс, либо индекс не меньший двух. Согласно предложению 9.29, существует единственный времениподобный максимальный геодезический сегмент $\gamma_i$ из $p$ в $p_i$ индекса 0.

Вследствие того что $(\exp_p)_*$ неособенно в $t'_\gamma(0)$, для достаточно больших $i$ существуют геодезические сегменты $\bar{\gamma}_i$ из $p$ в $p_i$, сходящиеся к $\gamma$, $\bar{\gamma}_i \to \gamma$. Так как $\measuredangle(\bar{\gamma}'_i(0), \gamma'(0)) \to 0$, то для больших $i$ эти сегменты имеют нулевой индекс. Отсюда вытекает, что $\bar{\gamma}_i = \gamma_i$ для достаточно больших $i$ и, следовательно, $\bar{\gamma}_i$ максимален. Поэтому сегмент $\gamma$ как предел максимальных геодезических является максимальным. $\square$

## 9.2. Пространство времениподобных путей глобально гиперболического пространства-времени

В этом разделе, следуя Уленбеку (1975) (см. также Вудхауз (1976)), мы рассмотрим теорию Морса для пространства путей направленных в будущее времениподобных кривых, соединяющих две хронологически связанные точки в глобально гиперболическом пространстве-времени. Оба подхода основываются на изложении теории Морса для пространства путей полного риманова многообразия, предложенном Милнором (1966, с. 100—109), в котором полное пространство путей аппроксимируется кусочно-гладкими геодезическими. Другой подход к теории Морса для непространственноподобных кривых в глобально гиперболических пространствах предложен Эверсоном и Толботом (1976, 1978). Они воспользовались результатом Кларке (1970) о том, что всякое четырехмерное глобально гиперболическое пространство-время можно изометрично вложить в пространство-время Минковского высокой размерности, задавая тем самым на подклассе времениподобных кривых в $M$ структуру гильбертова многообразия.

Однако вернемся к обобщению теории Морса для пространства путей кусочно-гладких времениподобных кривых, соединяющих точки $p \ll q$ в произвольном глобально гиперболическом пространстве-времени $(M, g)$ размерности $\geqslant 2$, предложенному Уленбеком.

**Определение 9.31.** Обозначим через $C_{(p, q)}$, где $p, q \in M$ — заданные точки, связанные отношением $p \ll q$, пространство

направленных в будущее кусочно-гладких времениподобных кривых, соединяющих $p$ с $q$, где отождествляются любые две кривые, отличающиеся лишь параметризацией.

Хотя $C_{(p,\,q)}$ можно превратить в бесконечномерное многообразие только после надлежащего пополнения, оно тем не менее обладает касательными пространствами, состоящими из кусочно-гладких векторных полей вдоль заданной кусочно-гладкой кривой, которая предполагается в свою очередь параметризованной длиной дуги. Поэтому функционалы $F\colon C_{(p,\,q)} \to \mathbb{R}$ можно рассматривать с позиций вариационного исчисления. Таким образом, *критическая точка* функционала $F$ — это точка, в которой все первые производные обращаются в нуль, а *критическое значение* — это образ критической точки при отображении $F$. Функционал $F$ на $C_{(p,\,q)}$ называется *гомотопической функцией Морса*, если для любого некритического значения $b$ функционала $F$, $b > a$, топологическое пространство $F^{-1}(-\infty, b)$ гомотопически эквивалентно пространству $F^{-1}(-\infty, a)$ с присоединенными клетками, так что каждой критической точке функционала $F$ с критическим значением из интервала $(a, b)$ соответствует одна клетка, размерность которой равна индексу этой критической точки.

В этом разделе мы покажем, что функционал лоренцевой длины дуги является гомотопической функцией Морса для $C_{(p,\,q)}$ при условии, что точки $p$ и $q$ непространственноподобно не сопряжены. Этот результат аналогичен соответствующему результату теории Морса для полных римановых многообразий (см. Милнор (1966, теоремы 16.3 и 17.3)). Именно, если $p$ и $q$ — любые две различные несопряженные точки, то пространство $\Omega_{(p,\,q)}$ кусочно-гладких кривых из $p$ в $q$ имеет гомотопический тип счетного клеточного комплекса, в котором каждой геодезической из $p$ в $q$ индекса $\lambda$ отвечает одна клетка размерности $\lambda$.

Для того чтобы $L$ была функцией Морса, необходимо, чтобы точки $p$ и $q$ были не сопряжены (какую бы геодезическую из $p$ в $q$ мы ни взяли). Поэтому интересно знать, существуют ли такие пары точек. Как и для римановых пространств, сопряженные точки в произвольном лоренцевом многообразии можно рассматривать как особенности дифференциала экспоненциального отображения. Следовательно, можно применить теорему Сарда (см. Хирш (1976, с. 69)). Подмножество $X$ многообразия $M$ называется здесь имеющим *меру нуль*, если для каждой карты $(U, \varphi)$ множество $\varphi(U \cap X) \subset \mathbb{R}^n$ имеет в $\mathbb{R}^n$ лебегову меру нуль, $n = \dim M$. Подмножество многообразия называется множеством *второй категории*, если оно содержит пересечение счетного семейства всюду плотных открытых множеств. Подмножество второй категории полного метрического пространства является всюду плотным в $M$ по теореме Бэра о множествах второй категории (см. Келли (1981, с. 264)). Из теоремы Сарда вытекает следующий результат,

**Теорема 9.32.** *Пусть $(M, g)$ — глобально гиперболическое пространство-время и $p$ — произвольная точка из $M$. Тогда множество точек из $M$, сопряженных $p$ вдоль некоторой геодезической, имеет меру нуль. Поэтому для множества точек $q \in M$ второй категории $p$ и $q$ не являются сопряженными* (*какую бы геодезическую, их соединяющую, мы ни взяли*).

Напомним некоторые свойства функционала лоренцевой длины дуги $L: C_{(p, q)} \to \mathbb{R}$. Во-первых, из вариационного исчисления следует, что критические точки $L$ на $C_{(p, q)}$ являются в точности направленными в будущее времениподобными геодезическими сегментами из $p$ в $q$, параметр на которых пропорционален длине дуги. Во-вторых, из теоремы 9.27 о времениподобном индексе Морса вытекает, что индекс критической точки функционала $L$ равен ее индексу как геодезической, т. е. числу точек, сопряженных $p$ вдоль геодезической из $p$ в $q$ с учетом кратности (сама точка $q$ исключается).

Чтобы показать, что $L$ является гомотопической функцией Морса, необходимо аппроксимировать $C_{(p, q)}$ подмножеством $M_{(p, q)}$, определяемым следующим условием: существует ретракция $C_{(p, q)}$ на $M_{(p, q)}$, увеличивающая функционал длины $L$. Это соответствует конечномерной аппроксимации пространства путей в римановой теории Морса. Соответствующая лоренцева аппроксимация, как будет ясно из приводимой ниже леммы 9.34, делает решающим использование глобальной гиперболичности $(M, g)$. Но сначала полезно дать следующее определение.

**Определение 9.33.** Пусть $p, q \in (M, g)$ и связаны отношением $p \ll q$. Конечный набор $\{x_1, \ldots, x_j\}$ точек из $M$ называется *времениподобной цепью из $p$ в $q$*, если $p \ll x_1 \ll \cdots \ll x_j \ll q$.

Следующая лемма вытекает из существования выпуклых нормальных окрестностей (см. разд. 2.2), компактности $J^+(p) \cap J^-(q)$ в глобально гиперболическом пространстве-времени и теоремы 5.1.

**Лемма 9.34.** *Пусть $(M, g)$ — глобально гиперболическое пространство-время с фиксированной глобально гиперболической функцией времени $f: M \to \mathbb{R}$. Пусть $p, q \in M$ и связаны отношением $p \ll q$. Тогда существует набор $\{t_1, \ldots, t_k\}$, для которого $f(p) < t_1 < \cdots < t_k < f(q)$, со следующими свойствами:*

(1) *Если $x \in f^{-1}(f(p), t_1]$ и $p \leqslant x$, то существует единственный максимальный направленный в будущее непространственноподобный геодезический сегмент из $p$ в $x$.*

(2) *Для каждого $i$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, из условий $x \in f^{-1}(t_i)$, $y \in f^{-1}(t_i, t_{i+1}]$ и $p \leqslant x \leqslant y \leqslant q$ вытекает существование единственного максимального направленного в будущее непространственноподобного геодезического сегмента из $x$ в $y$.*

(3) *Если $y \in f^{-1}[t_k, f(q))$ и $y \leqslant q$, то существует единственный максимальный непространственноподобный геодезический сегмент из $y$ в $q$.*

(4) *В частности, если $\{x_1, \ldots, x_k\}$ — произвольная времениподобная цепь из $p$ в $q$, подчиненная условию $x_i \in f^{-1}(t_i)$, $i = 1, \ldots, k$, то существует единственный максимальный направленный в будущее времениподобный геодезический сегмент, соединяющий $p$ с $x_1$, $x_k$ с $q$ и $x_i$ с $x_{i+1}$ для каждого $i$, $1 \leqslant i \leqslant k - 1$.*

Вследствие того что точки $p, q \in M$, связанные отношением $p \ll q$, считаются заданными, можно зафиксировать набор $\{t_1, \ldots, t_k\}$, удовлетворяющий условиям леммы 9.34. Обозначим через $S_i$ поверхность Коши: $S_i = f^{-1}(t_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Теперь мы можем определить пространство $M_{(p,q)}$ ломаных времениподобных геодезических, чтобы аппроксимировать $C_{(p,q)}$ с точки зрения функционала длины дуги.

**Определение 9.35.** Пусть $M_{(p,q)}$ — пространство всех непрерывных кривых $\gamma$: $[0, 1] \to M$, у которых $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, $\gamma(i/(k+1)) \in S_i$ и $\gamma \mid [i/(k+1), (i+1)/(k+1)]$ — направленная в будущее времениподобная геодезическая, где $i = 0, 1, \ldots, k$.

Так как каждая $\gamma \mid [i/(k+1), (i+1)/(k+1)]$, согласно лемме 9.34, должна быть единственным максимальным сегментом, соединяющим собственные концевые точки, то

$$M_{(p,q)} = \{(x_1, \ldots, x_k) : x_i \in S_i \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k \text{ и}$$
$$p \ll x_1, x_i \ll x_{i+1} \text{ для каждого } i, 1 \leqslant i \leqslant k-1, \text{ и } x_k \ll q\}. \quad (9.21)$$

Поскольку множества хронологического будущего и прошлого открыты, множество $M_{(p,q)}$, определяемое правилом (9.21), является открытым подмногообразием произведения $S_1 \times \cdots \times S_k$. Пусть $\pi_i$: $M_{(p,q)} \to S_i$ — отображение проектирования, заданное правилом $\pi_i(x_1, \ldots, x_k) = x_i$, $i = 1, \ldots, k$. Из того, что $I^+(p) \cap I^-(q)$ в силу глобальной гиперболичности $M$ имеет компактное замыкание и $\pi_i(M_{(p,q)}) \subset I^+(p) \cap I^-(q)$, вытекает, что $\pi_i(M_{(p,q)})$ имеет компактное замыкание в $S_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$.

Не уменьшающую длину ретракцию $C_{(p,q)}$ на $M_{(p,q)}$ можно получить аналогично тому, как это делается в римановой теории Морса (см. Милнор (1966, с. 102)).

**Предложение 9.36.** *Существует ретракция $Q_\lambda$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, пространства $C_{(p,q)}$ на $M_{(p,q)}$, не уменьшающая лоренцеву длину дуги.*

*Доказательство.* Пусть $\gamma \in C_{(p,q)}$ произвольна. Можно считать, что $\gamma$ параметризована так, что $f(\gamma(t)) = t$, где $f$: $M \to \mathbb{R}$ —

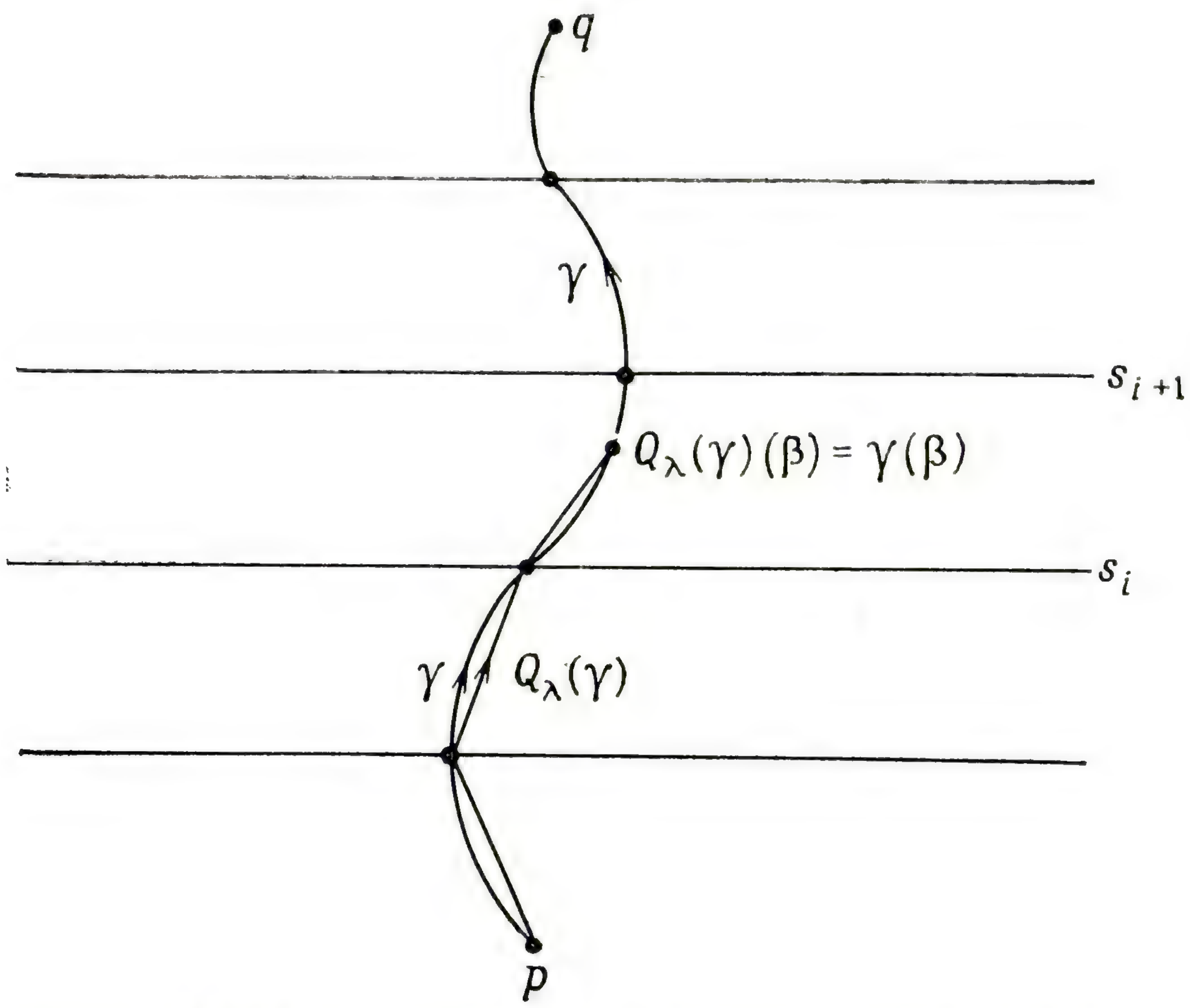



Рис. 9.2. Кривая $Q_\lambda(\gamma)$ используется в доказательстве предложения 9.36 для аппроксимации заданной кривой $\gamma$.

глобально гиперболическая функция времени, зафиксированная в лемме 9.34. Таким образом, $\gamma$: $[f(p), f(q)] \to M$. Для каждого $\lambda \in [0, 1]$ определим $Q_\lambda(\gamma)$: $[f(p), f(q)] \to M$ по следующему правилу. Положим $\beta = (1-\lambda) f(p) + \lambda f(q)$, $t_0 = f(p)$ и $t_{k+1} = f(q)$. Если $\beta$ удовлетворяет соотношению $t_i < \beta \leqslant t_{i+1}$ для некоторого $i$, $0 \leqslant i \leqslant k$, возьмем за $Q_\lambda(\gamma)$ единственную ломаную, звеньями которой являются времениподобные геодезические, соединяющие точку $p$ с $\gamma(t_1)$, $\gamma(t_1)$ с $\gamma(t_2)$, ..., $\gamma(t_{i-1})$ с $\gamma(t_i)$ и $\gamma(t_i)$ с $\gamma(\beta)$ соответственно для $t \leqslant \beta$, и положим $Q_\lambda(\gamma)(t) = \gamma(t)$ для $t \geqslant \beta$ (рис. 9.2).

Непосредственно из определения вытекает, что $Q_0(\gamma) = \gamma$ и $Q_1(\gamma) \in M_{(p,q)}$. Ввиду того что $Q_\beta(\gamma)$ $[\gamma(t_i), \gamma(\beta)]$ максимальна среди всех кривых из $\gamma(t_i)$ в $\gamma(\beta)$, по лемме 9.34 имеем

$$L(Q_\lambda(\gamma)[\gamma(t_i), \gamma(\beta)]) = d(\gamma(t_i), \gamma(\beta)) \geqslant L(\gamma \mid [t_i, \beta]),$$

где через d обозначена лоренцева функция расстояния на многообразии $(M, g)$ (мы использовали здесь также соглашение об обозначении 7.4). Аналогично, ввиду того что $Q_\lambda(\beta)$ — единственный максимальный геодезический сегмент из $\gamma(t_j)$ в $\gamma(t_{j+1})$ для каждого $j$, $0 \leqslant j \leqslant i-1$, имеем $L(Q_\lambda(\gamma)[\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})] \geqslant L(\gamma \mid [t_j, t_{j+1}])$. Объединяя, получаем

$$L(Q_\lambda(\gamma)[p, \gamma(\beta)]) \geqslant L(\gamma \mid [f(p), \beta]).$$

Вследствие того, что $Q_\lambda(\gamma)(t) = \gamma(t)$, $t \geqslant \beta$, имеем $L(Q_\lambda(\gamma)) \geqslant L(\gamma)$. Более того, из рассуждений, проведенных выше, ясно,

что $L(Q_\lambda(\gamma)) = L(\gamma)$ для всех $\lambda$ тогда и только тогда, когда $\gamma$ — ломаная времениподобная геодезическая из $p$ в $q$ с возможными изломами только на поверхностях $S_i$. В частности, $Q_\lambda \mid M_{(p,q)} = \mathrm{Id}$ для всех $\lambda \in [0, 1]$. Наконец, непрерывность отображения $\lambda \to Q_\lambda$ легко следует из дифференцируемой зависимости геодезических в выпуклых окрестностях от их концевых точек. $\square$

Следуя Уленбеку (1975, с. 79), обозначим через $L_* = L \mid M_{(p,q)}$ ограничение функционала лоренцевой длины дуги на подмножество $M_{(p,q)}$ пространства $C_{(p,q)}$. В точности так же, как и в римановом случае (см. Милнор (1966, теорема (16.2)), можно убедиться в том, что $L_*\colon M_{(p,q)} \to \mathbb{R}$ является точной моделью $L\colon C_{(p,q)} \to \mathbb{R}$ в следующем смысле.

**Предложение 9.37.** *Если многообразие* $(M, g)$ *глобально гиперболично, то критические точки функционала* $L_* = L \mid M_{(p,q)}$ *суть гладкие времениподобные геодезические сегменты из* $p$ *в* $q$. *Эти критические точки невырожденны в том и только том случае, если* $p$ *и* $q$ *времениподобно не сопряжены. Более точно, индекс каждой критической точки один и тот же и в пространстве* $C_{(p,q)}$, *и в его ретракте* $M_{(p,q)}$, *а именно, это индекс по сопряженным точкам.*

*Доказательство.* Отождествим $M_{(p,q)}$ с $k$-цепями $\{x_1, \ldots, x_k\}$ из $p$ в $q$, где $x_i \in S_i$ для каждого $i$, как в формуле (9.21). Положим $x_0 = p$ и $x_{k+1} = q$. Пусть $\gamma_i\colon [0, 1] \to M$ — (единственная) максимальная времениподобная геодезическая из $x_i$ в $x_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Тогда

$$L_*(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=0}^{k+1} \int_0^1 \sqrt{\langle -\gamma_i'(t), \gamma_i'(t)\rangle}\, dt.$$

Рассмотрим гладкую деформацию $\{x_1(t), \ldots, x_k(t)\}$ данной цепи $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Вследствие того что каждое отображение $t \to x_i(t)$ является кривой в $S_i$, векторное поле вариации деформации должно лежать в касательном пространстве $T_{x_i}(S_i)$ в $x_i$. Так как мы деформируем заданную цепь, представляющую собой кусочно-гладкую времениподобную геодезическую, в классе кусочно-гладких времениподобных геодезических с разрывами только на поверхностях Коши $S_i$, то пространство деформаций цепи $\{x_1, \ldots, x_k\}$ можно отождествить с множеством всевозможных векторных полей $Y$ вдоль $\{x_1, \ldots, x_k\}$, у которых $Y(x_i) \in T_{x_i}(S_i)$ для $i = 1, \ldots, k$, $Y(p) = Y(q) = 0$ и $Y \mid \gamma_i$ — гладкое якобиево поле вдоль $\gamma_i$ для каждого $i = 0, 1, \ldots, k$. В силу того что поверхности $S_i$ выбраны, как в лемме 9.34, ни одна $\gamma_i\colon [0, 1] \to M$ не имеет сопряженных точек. Поэтому для любых заданных $v_i \in T_{x_i}(S_i)$ и $w_i \in T_{x_{i+1}}(S_{i+1})$ существует единственное якобиево

поле $J$ вдоль $\gamma_i$: $[0, 1] \to M$, у которого $J(0) = v_i$ и $J(1) = w_i$. Таким образом, пространство 1-струй деформаций данной цепи $\{x_1, \ldots, x_k\}$ можно отождествить просто с декартовым произведением $T_{x_1}(S_1) \times \cdots \times T_{x_k}(S_k)$.

Пусть $\sigma$: $[a, b] \to M$ — гладкая направленная в будущее времениподобная кривая, параметризованная так, что $\sqrt{-\langle \sigma'(s), \gamma'(s) \rangle} = A$ постоянно для всех $s \in (a, b)$, а $\sigma'(a^+)$ и $\sigma'(b^-)$ — времениподобные касательные векторы. Пусть $\alpha$: $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ — гладкая вариация кривой $\sigma$ в классе непространственноподобных кривых с векторным полем вариации $V$. Если $\alpha_s$: $[a, b] \to M$ — кривая, определяемая формулой $\alpha_s(t) = \alpha(t, s)$, то первая формула вариации для $L'(0) = (d/ds)\, L(\alpha_s)\,|_{s=0}$ представляется следующим образом:

$$L'(0) = \frac{-1}{A} \langle V, \sigma' \rangle \Big|_a^b + \frac{1}{A} \int\limits_a^b \langle V, \nabla_{\sigma'} \sigma' \rangle \Big|_t dt. \tag{9.22}$$

Поэтому, если $\sigma$ — времениподобная геодезическая, то

$$L'(0) = (-1/A) \langle V, \sigma' \rangle \big|_a^b.$$

Применим теперь формулу (9.22) для того, чтобы вычислить первую вариацию собственной деформации $\alpha$ элемента $\{x_1, \ldots, x_k\} \in M_{(p, q)}$. Как и раньше, пусть $\gamma_i$: $[0, 1] \to M$ — времениподобные геодезические из $x_i$ в $x_{i+1}$, где $i = 0, \ldots, k$. Тогда $\{x_1, \ldots, x_k\}$ представляется кусочно-гладкой времениподобной геодезической $\gamma = \gamma_0 * \gamma_1 * \cdots * \gamma_k$. Пусть $V$ — векторное поле вариации $\alpha$ вдоль $\gamma$ и $y_i = V(x_i) \in T_{x_i}(S_i)$. Как мы упоминали выше, кусочно-гладкое якобиево поле $V$ вдоль $\gamma$ можно отождествить с $(y_1, \ldots, y_k) \in T_{x_1}(S_1) \times \cdots \times T_{x_k}(S_k)$. Ограничивая $V$ на каждую $\gamma_i$ и применяя формулу (9.22), получим требуемую формулу первой вариации для $L_* = L \mid M_{(p, q)}$:

$$\delta L_*(y_1, \ldots, y_k) = \sum_{i=1}^{k} \left( \left\langle y_{i-1}, \frac{\gamma_i'(0)}{A_i} \right\rangle - \left\langle y_i, \frac{\gamma_i'(1)}{B_i} \right\rangle \right), \tag{9.23}$$

где

$$A_i = \sqrt{-\langle \gamma_i'(0), \gamma_i'(0) \rangle}, \quad B_i = \sqrt{-\langle \gamma_i'(1), \gamma_i'(1) \rangle}$$

для каждого $i$. Из формулы (9.23) стандартными рассуждениями получаем, что $\delta L_*(y_1, \ldots, y_k) = 0$ для всех $(y_1, \ldots, y_k) \in T_{x_1}(S_1) \times \cdots \times T_{x_k}(S_k)$ тогда и только тогда, когда касательные векторы

$$\frac{\gamma_i'(1)}{\sqrt{-\langle \gamma_i'(1), \gamma_i'(1) \rangle}} \quad \text{и} \quad \frac{\gamma_{i+1}'(0)}{\sqrt{-\langle \gamma_{i+1}'(0), \gamma_{i+1}'(0) \rangle}}$$

в пространстве $T_{x_i}(M)$ имеют одну и ту же проекцию на подпространство $T_{x_i}(S_i) \subset T_{x_i}(M)$ для каждого $i = 1, \ldots, k$. Это дает возможность утверждать, что $\gamma = \gamma_0 * \gamma_1 * \cdots * \gamma_k$ можно перепараметризовать в гладкую времениподобную геодезическую из $p$ в $q$.

Таким образом, мы видим, что критические точки функционалов $L_*\colon M_{(p,q)} \to \mathbb{R}$ и $L\colon C_{(p,q)} \to \mathbb{R}$ совпадают и являются в точности гладкими времениподобными геодезическими из $p$ в $q$. Из нашего доказательства теоремы Морса о времениподобном индексе (теорема 9.27), проведенного путем аппроксимации $V_0^{\perp}(c)$ пространствами кусочно-гладких якобиевых полей (см. лемму 9.26), вытекает, что индексы $L_*\colon M_{(p,q)} \to \mathbb{R}$ и $L\colon C_{(p,q)} \to \mathbb{R}$ совпадают. Из теоремы Морса о времениподобном индексе (теорема 9.27) вытекает также, что критическая точка $c$ является вырожденной в том и только том случае, если $p$ и $q$ сопряжены вдоль $c$ (см. также предложение 9.13). □

При помощи предложения 9.37 можно получить следующий результат.

**Предложение 9.38.** *Пусть $(M, g)$ глобально гиперболично. Если точки $p$ и $q$ непространственноподобно не сопряжены, то функционалы $L\colon C_{(p,q)} \to \mathbb{R}$ и $L_*\colon M_{(p,q)} \to \mathbb{R}$ имеют лишь конечное число критических точек. В частности, существует лишь конечное число направленных в будущее времениподобных геодезических из $p$ в $q$.*

*Доказательство.* Согласно предложению 9.37, достаточно показать, что функционал $L_*\colon M_{(p,q)} \to \mathbb{R}$ имеет конечное число критических точек. Предположим противное: $L_*$ имеет бесконечно много критических точек. Тогда должна существовать бесконечная последовательность гладких времениподобных геодезических $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $p$ в $q$. Из того, что каждое множество $\pi_i(M_{(p,q)})$ имеет в $S_i$ компактное замыкание, вытекает существование подпоследовательности последовательности $\{c_n\}$, сходящейся к времениподобной или изотропной геодезической $c$ из $p$ в $q$. Поскольку $c$ — предел бесконечной последовательности геодезических из $p$ в $q$, получаем, что $p$ сопряжена $q$ вдоль $c$, что приводит к противоречию с условием. □

Другим интересным свойством функционала $L_*\colon M_{(p,q)} \to \mathbb{R}$ является следующий результат.

**Предложение 9.39.** *Функционал $L_*\colon M_{(p,q)} \to \mathbb{R}$ достигает своего максимального значения на каждой компоненте множества $M_{(p,q)}$.*

*Доказательство.* Так как $M_{(p,q)}$ — открытое подмногообразие произведения $S_1 \times \cdots \times S_k$, то его замыкание компактно в $S_1 \times \cdots \times S_k$. Кроме того,

$$L_*(\{x_1, \ldots, x_k\}) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{d}(x_i, x_{i+1}) \leqslant \mathrm{d}(p, q),$$

где $x_0 = p$ и $x_{k+1} = q$ для любой времениподобной цепи $\{x_1, \ldots, x_k\}$ из $p$ в $q$. Поскольку лоренцева функция расстояния для глобально гиперболических пространств конечнозначна, функционал $L_*$ ограничен на каждой связной компоненте $U$ множества $M_{(p,q)}$. Пусть $\{\gamma_n\}$ — последовательность в связной компоненте $U$ множества $M_{(p,q)}$, для которой $L_*(\gamma_n) \to \sup\{L_*(\gamma): \gamma \in U\}$ при $n \to \infty$. Ввиду компактности замыкания cl $M_{(p,q)}$ в $S_1 \times \cdots \times S_k$ последовательность $\{\gamma_n\}$ имеет предельную кривую $\gamma_\infty$ в cl $(U) \subset \subset S_1 \times \cdots \times S_k$. Из того, что $\{\gamma_n\}$ является максимизирующей последовательностью для функционала $L_* \mid U$, вытекает, что $L_*(\gamma_\infty) \geqslant L_*(\sigma)$ для любого $\sigma \in$ cl $(U)$ и $L_*(\gamma_\infty) > 0$. Если $\gamma_\infty$ представляется элементом $(x_1, \ldots, x_k) \in S_1 \times \cdots \times S_k$, то $p \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_k \leqslant q$, а если $\gamma_i$ — единственная максимальная геодезическая из $x_i$ в $x_{i+1}$, наличие которой гарантируется леммой 9.34, то каждая $\gamma_i$ либо изотропна, либо времениподобна. Если некоторая $\gamma_i$ является изотропной, то из формулы первой вариации (9.23) следует, что $\gamma_\infty$ можно продеформировать в кривую $\gamma \in$ cl $(U)$, притом так, что $L_*(\gamma) > L_*(\gamma_\infty)$. Это противоречит максимальности $L_* \mid$ cl $(U)$ на $\gamma_\infty$. Поэтому предельный элемент $\gamma_\infty \in U$. □

Вновь рассмотрим $M_{(p,q)}$ как подмножество $S_1 \times \cdots \times S_k$. Обозначим через $P_i: T_x(M) \to T_x(S_i)$ отображение ортогонального проектирования, где $x \in S_i$ — любое и $i = 1, 2, \ldots, k$. На множестве $M_{(p,q)}$, рассматриваемом как открытое подмножество произведения $S_1 \times \cdots \times S_k$, можно задать риманову метрику, индуцированную ограничением лоренцевой метрики на пространственноподобные гиперповерхности Коши $S_1, \ldots, S_k$. Из формулы (9.23) вытекает, что в точке из $M_{(p,q)}$, представляемой ломаной времениподобной геодезической $\gamma = \gamma_0 * \gamma_1 * \cdots * \gamma_k$, где каждая $\gamma_i$ параметризована на $[0, 1]$, а $A_i$ и $B_i$ определены выше, градиент функционала $L_*$ задается следующей формулой:

$$\operatorname{grad} L_* = \left(P_1\left(\frac{\gamma_1'(0)}{A_1} - \frac{\gamma_0'(1)}{B_0}\right),\quad P_2\left(\frac{\gamma_2'(0)}{A^2} - \frac{\gamma_1'(1)}{B_1}\right), \ldots \right.$$
$$\left. \ldots,\ P_k\left(\frac{\gamma_k'(0)}{A_k} - \frac{\gamma_{k-1}'(1)}{B_{k-1}}\right)\right).$$

Используя эту формулу, Уленбек (1975, с. 80—81) доказал следующую лемму.

**Лемма 9.40.** *Пусть* $\beta$: $(a, b) \to M_{(p, q)}$ *— максимальная интегральная кривая* grad $L_*$. *Тогда* $b = \infty$ и $\lim_{t\to\infty} \beta(t)$ *лежит в критическом множестве функционала* $L_*$.

Из доказанного свойства градиента $L_*$ вытекает (Уленбек (1975, с. 81)), что если $p$ и $q$ времениподобно не сопряжены, то $L_*$: $M_{(p, q)} \to \mathbb{R}$ является функцией Морса для $M_{(p, q)}$. Из этого факта и предложений 9.36 и 9.38 следует основной результат.

**Теорема 9.41.** *Пусть пространство-время* $(M, g)$ *глобально гиперболично и* $p$, $q$ *— любая пара точек из* $(M, g)$, *связанных отношением* $p \ll q$ *и таких, что* $p$ *и* $q$ *непространственноподобно не сопряжены. Тогда в* $(M, g)$ *существует лишь конечное число направленных в будущее времениподобных геодезических из* $p$ *в* $q$, *и функционал длины дуги* $L$: $C_{(p, q)} \to \mathbb{R}$ *является гомотопической функцией Морса. Поэтому если* $b$ *и* $a$, $b > a$, *— любые два некритических значения функционала* $L$, *то пространство* $L^{-1}(-\infty, b)$ *гомотопически эквивалентно пространству* $L^{-1}(-\infty, a)$ *с приклеенной клеткой для каждой гладкой времениподобной геодезической* $\gamma$ *из* $p$ *в* $q$, *для которой* $a < L(\gamma) < b$, *где размерность приклеенной клетки равна (геодезическому) индексу* $\gamma$. *Тем самым* $C_{(p, q)}$ *имеет гомотопический тип конечного клеточного комплекса с одной клеткой размерности* $\lambda$ *для каждой гладкой направленной в будущее времениподобной геодезической* $\gamma$ *из* $p$ *в* $q$ *индекса* $\lambda$.

Заметим, что в теореме 9.41 топология $C_{(p, q)}$ не связана с исходной топологией многообразия. Но Уленбек (1975, теорема 3) показал для класса глобально гиперболических просранств, удовлетворяющих условию роста метрики (см. Уленбек (1975, с. 72)), что гомотопия самого пространства путей многообразия $M$ может быть вычислена геометрически следующим образом. Пусть $(M, g)$ — глобально гиперболическое пространство-время, удовлетворяющее условию (Уленбека) роста метрики. Тогда существует класс гладких времениподобных кривых $\gamma$: $[0, \infty) \to M$ со следующим свойством. Для каждой такой времениподобной кривой $\gamma$ найдется множество точек $p \in M$ второй категории, такое, что пространство путей многообразия $M$ гомотопно клеточному комплексу с одной клеткой для каждой изотропной геодезической из $p$ в $\gamma$, где размерность клетки равна индексу геодезической.

Из доказательства приводимого ниже предложения 9.42 будет ясно, что конечность гомотопического типа времениподобного пространства путей $C_{(p, q)}$ в теореме 9.41 вытекает из предположения о том, что точки $p$ и $q$ изотропно не сопряжены, и того факта, что $L(\gamma) \leqslant d(p, q) < \infty$ для всех $\gamma \in C_{(p, q)}$. С другой стороны, для полных римановых многообразий $(N, g_0)$ известно (см. Серр (1951)), что если $N$ не является ацикличным (т. е. $H_i(N, \mathbb{Z}) \neq 0$ для некоторого $i > 0$), то пространство путей $\Omega_{(p, q)}$ является бесконечным клеточным комплексом для всех $p$, $q \in N$. Поэтому,

если $p$ и $q$ не сопряжены, то существует бесконечно много геодезических $\{c_n\colon [0, 1] \to N\}$ из $p$ в $q$. Из того, что $p$ и $q$ не сопряжены и из неравенств $L_0(\gamma) \geqslant d_0(p, q) > 0$, справедливых для всех $\gamma \in \Omega_{(p, q)}$, видно, что $L_0(c_n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Для полноты изложения мы приведем сейчас другое доказательство предложения 9.38 — о существовании лишь конечного числа критических точек у функционала $L\colon C_{(p, q)} \to M$. Вместо того чтобы применять конечномерную аппроксимацию пространства $C_{(p, q)}$ множеством $M_{(p, q)}$, мы будем работать непосредственно с $C_{(p, q)}$, пользуясь, как и в разд. 2.3, существованием непространственноподобных предельных кривых.

**Предложение 9.42.** *Пусть $(M, g)$ глобально гиперболично. Предположим, что точки $p, q \in M$, $p \ll q$, выбраны так, что не существует направленной в будущее непространственноподобной геодезической, вдоль которой они были бы сопряжены. Тогда найдется лишь конечное число времениподобных геодезических, идущих из $p$ в $q$.*

*Доказательство.* Предположим противное: найдется бесконечно много направленных в будущее времениподобных геодезических сегментов $c_n\colon [0, 1] \to M$ в пространстве $C_{(p, q)}$. Используя следствие 2.19 и рассуждения из разд. 2.3, получим непространственноподобную геодезическую $c\colon [0, 1] \to M$, $c(0) = p$, $c(1) = q$, которая является предельной кривой последовательности $\{c_n\}$ и такова, что подпоследовательность последовательности $\{c_n\}$ сходится к $c$ в $C^0$-топологии на кривых. Так как подпоследовательность попарно различных касательных векторов $\{c_n'(0)\}$ сходится к $c'(0)$, то $q$ сопряжена $p$ вдоль $c$ в противоречие с условием. □

Предположим, что в условиях предложения 9.42 сделано следующее допущение: точки $p$ и $q$ не сопряжены лишь времениподобно. Если найдется бесконечно много времениподобных геодезических $\{c_n\}$ в пространстве $C_{(p, q)}$, то мы получим тогда, что $L(c_n) \to 0$ при $n \to \infty$, и предельная кривая $c$ в доказательстве предложения 9.42 является изотропной геодезической, так что $q$ сопряжена $p$ вдоль $c$. В частности, $c$ содержит точку изотропного раздела в будущем для $p$ (см. разд. 8.2). Поэтому и теорема 9.41, и доказательство предложения 9.42 приводят к следующему результату, который применим, в частности, к космологическим моделям Фридмана с $p = \Lambda = 0$.

**Следствие 9.43.** *Пусть $(M, g)$ глобально гиперболично, а точки $p, q \in M$ выбраны так, что $p \ll q$, $p$ и $q$ времениподобно не сопряжены и множество изотропного раздела в будущем для точки $p$ в $M$ пусто. Тогда существует лишь конечное число времениподобных геодезических из $p$ в $q$.*

*Доказательство.* Если бы существовало бесконечно много времениподобных геодезических, идущих из $p$ в $q$, то из $p$ в $q$ выходила бы изотропная геодезическая $c$, такая, что $q$ была бы сопряжена $p$ вдоль $c$. Но тогда $c$ содержала бы точку изотропного раздела вдоль $c$ в будущем, что противоречит условию. □

Если $\dim M = 2$, то $(M, g)$ не содержит изотропных сопряженных точек (см. лемму 9.45). Поэтому имеет место следующий результат.

**Следствие 9.44.** *Пусть* $(M, g)$ — *произвольно двумерное глобально гиперболическое пространство-время, а точки* $p, q \in M$ *выбраны так, что* $p \ll q$ *и* $p$ *и* $q$ *времениподобно не сопряжены. Тогда найдется лишь конечное число времениподобных геодезических, идущих из* $p$ *в* $q$.

## 9.3. Теория Морса для изотропного индекса

Этот раздел посвящен доказательству теоремы Морса об индексе для изотропных геодезических сегментов $\beta\colon [0, 1] \to M$ в произвольном пространстве-времени. Подходящей индексной формой, однако, является здесь не стандартная индексная форма, определенная на кусочно-гладких векторных полях, ортогональных $\beta'$, а ее проекция на факторрасслоение, образованное путем отождествления векторных полей, отличающихся на кратное $\beta'$. Идея использовать факторрасслоение в качестве области определения изотропной индексной формы неявно содержится в рассмотрении вариации длины дуги изотропных геодезических у Хокинга и Эллиса (1977, разд. 4.5) и была развита в дальнейшем Белтсом (1977). В первой части этого раздела основная теория индексной формы разрабатывается в соответствии с гл. 2 и 4 из книги Белтса (1977). Во второй части мы приводим подробное доказательство теоремы Морса об индексе для изотропных геодезических, краткое изложение которого имеется в работе Бима и Эрлиха (1979б).

Вместо того чтобы работать с функционалом энергии, Уленбек (1975, теорема 4.5) строил теорию Морса для непространственноподобных кривых в глобально гиперболических пространственно-временных многообразиях следующим образом. Выбирая глобально гиперболическое расщепление $M = S \times (a, b)$, как в теореме 2.13, Уленбек проектировал непространственноподобные кривые $\gamma(t) = (c_1(t), c_2(t))$ на второй сомножитель и показывал, что функционал $J(\gamma) = \int [c_2'(t)]^2 dt$ дает теорию индекса.

Следует упомянуть вначале, что теория изотропного индекса в отличие от теории времениподобного индекса интересна только для $\dim M \geqslant 3$ по следующей причине.

**Лемма 9.45.** *Никакая изотропная геодезическая* $\beta$ *в произвольном двумерном лоренцевом многообразии не имеет изотропно сопряженных точек.*

*Доказательство.* Пусть $\beta: (a, b) \to (M, g)$ — произвольная изотропная геодезическая. Предположим, что $J$ — якобиево поле вдоль $\beta$, удовлетворяющее условию $J(t_1) = J(t_2) = 0$ для некоторых $t_1 \neq t_2$ из $(a, b)$. В точности так же, как и в доказательстве леммы 9.9, имеем $\langle J, \beta' \rangle'' = -\langle R(J, \beta')\beta', \beta' \rangle = 0$, так что $\langle J(t), \beta'(t) \rangle = 0$ для всех $t \in (a, b)$. Вследствие того что пространственноподобный и изотропный векторы в случае $\dim M = 2$ неортогональны, пространство векторных полей $Y$ вдоль $\beta$, перпендикулярных $\beta'$, порождается самим $\beta'$. Следовательно, $J(t) = f(t)\beta'(t)$ для некоторой гладкой функции $f: (e, b) \to \mathbb{R}$. Тогда уравнение Якоби принимает следующий вид: $0 = J' + R(J, \beta')\beta' = f''\beta' + fR(\beta', \beta')\beta' = f''\beta'$; здесь используется также косая симметрия тензора кривизны по первым двум аргументам. Тем самым $f''(t) = 0$ для всех $t \in (a, b)$. Из равенств $J(t_1) = J(t_2) = 0$ вытекает, что $f = 0$. Поэтому $J = 0$, как и требовалось. $\square$

Всюду в этом разделе мы будем предполагать, что $(M, g)$ — произвольное пространство-время размерности не меньшей трех (ввиду леммы 9.45) и что $\beta: [a, b] \to M$ — фиксированный изотропный геодезический сегмент в $M$. Обозначим через $V^\perp(\beta)$ $\mathbb{R}$-линейное пространство всевозможных кусочно-гладких векторных полей $Y$ вдоль $\beta$, удовлетворяющих условию $\langle Y(t), \beta'(t) \rangle = 0$ для всех $t \in [a, b]$. Тогда и $\beta'(t)$, и $t\beta'(t)$ — якобиевы поля в $V^\perp(\beta)$. Допустим далее, что мы рассматриваем индексную форму $I: V_0^\perp(\beta) \times V_0^\perp(\beta) \to \mathbb{R}$, определенную соотношением

$$I(X, Y) = -\int [\langle X', Y' \rangle - \langle R(X, \beta')\beta', Y \rangle]\, dt$$

по аналогии с индексной формой (9.1) для времениподобных геодезических в разд. 9.1. Тогда $A = \{f(t)\beta'(t): f: [a, b] \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, $f(a) = f(b) = 0\}$ является бесконечномерным линейным пространством, в котором $I(Y, Y) = 0$ для всех $Y \in A$. Поэтому квазииндекс геодезической $\beta$, определенный при помощи индексной формы $I: V_0^\perp(\beta) \times V_0^\perp(\beta) \to \mathbb{R}$, всегда бесконечен. Кроме того, хотя $I(f\beta', Y) = 0$ для любого $Y \in V_0^\perp(\beta)$ и $f\beta' \in A$, векторное поле $f\beta'$ не является якобиевым, за исключением случая $f'' = 0$. Поэтому те свойства, которые мы получили для индексной формы времениподобной геодезической в разд. 9.3, связывающие якобиевы поля, сопряженные точки и определенность индексной формы, не выполняются для $I: V_0^\perp(\beta) \times V_0^\perp(\beta) \to \mathbb{R}$.

Разгадка этих затруднений состоит в том, что и $\beta'$, и $t\beta'$ являются якобиевыми полями в $V^\perp(\beta)$. Поэтому, пренебрегая век-

торными полями в $A$, можно определить индексную форму для изотропных геодезических, хорошо связанную не только с формулой второй вариации для функционала энергии, но также и с сопряженными точками и якобиевыми полями. Этого можно добиться, работая вместо $V^{\perp}(\beta)$ с факторрасслоением $V^{\perp}(\beta)/[\beta]$. Используя это факторрасслоение, можно определить индексную форму $\overline{I}$ так, чтобы $\beta$ не имела сопряженных точек, в том и только том случае, если форма $\overline{I}$ отрицательно определена (см. Хокинг и Эллис (1977, предложение 4.5.11), Бёлтс (1977, теорема 4.5.5)). Теорему Морса об индексе можно получить также для индексной формы $\overline{I}$ для изотропных геодезических сегментов в произвольных пространственно-временных многообразиях (см. Бим и Эрлих (1979г)).

Ввиду того что нас интересует исследование сопряженных точек вдоль изотропных геодезических, важно заметить, что лемма 9.9 и следствия 9.10 и 9.11 переносятся на случай изотропных геодезических с теми же доказательствами.

**Лемма 9.46.** *Пусть* $\beta$: $[a, b] \to (M, g)$ — *изотропный геодезический сегмент и* $Y$ — *произвольное якобиево поле вдоль* $\beta$. *Тогда* $\langle Y(t), \beta'(t)\rangle$ — *линейная функция от* $t$. *Поэтому если* $Y(t_1) = Y(t_2) = 0$ *для различных* $t_1, t_2 \in [a, b]$, *то* $\langle Y(t), \beta'(t)\rangle = 0$ *для всех* $t \in [a, b]$.

Соответственно мы можем ограничить наше внимание рассмотрением только следующих пространств векторных полей.

**Определение 9.47.** Обозначим через $V^{\perp}(\beta)$ $\mathbb{R}$-линейное пространство всевозможных кусочно-гладких векторных полей $Y$ вдоль $\beta$, у которых $\langle Y(t), \beta'(t)\rangle = 0$ для всех $t \in [a, b]$. Пусть $V_0^{\perp}(\beta) = \{Y \in V^{\perp}(\beta): Y(a) = Y(b) = 0\}$. Положим далее $N(\beta(t)) = \{v \in T_{\beta(t)}M: \langle v, \beta'(t)\rangle = 0\}$ и

$$N(\beta) = \bigcup_{a \leq t \leq b} N(\beta(t)).$$

Для каждого $Y \in V^{\perp}(\beta)$ векторное поле $Y' \in V^{\perp}(\beta)$ можно определить, используя левосторонние пределы в точности так, как и в разд. 9.1. Ввиду того что $\beta$ — гладкая изотропная геодезическая, имеем $\beta'(t) \in N(\beta(t))$ для всех $t \in [a, b]$. Следуя Бёлтсу (1977, с. 39—44), мы построим следующую алгебраическую конструкцию. Так как $N(\beta(t))$ является линейным пространством для любого $t \in [a, b]$ и

$$[\beta'(t)] = \{\lambda\beta'(t): \lambda \in \mathbb{R}\} \tag{9.24}$$

есть его линейное подпространство, то можно определить линейное факторпространство

$$G(\beta(t)) = N(\beta(t))/[\beta'(t)] \tag{9.25}$$

и факторрасслоение

$$G(\beta) = N(\beta)/[\beta'] = \bigcup_{a \leqslant t \leqslant b} G(\beta(t)). \qquad (9.26)$$

Элементами факторпространства $G(\beta(t))$ являются смежные классы вида $v + [\beta'(t)]$, где $v \in N(\beta(t))$, а линейное подпространство $[\beta'(t)]$ является нулевым элементом $G(\beta(t))$ для каждого $t \in [a, b]$. Элементы $v + [\beta'(t)]$ и $w + [\beta'(t)]$ равны в $G(\beta(t))$ в том и только том случае, когда $v = w + \lambda\beta'(t)$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. Естественное отображение проектирования $\pi: N(\beta(t)) \to G(\beta(t))$ можно определить следующей формулой:

$$\pi(v) = v + [\beta'(t)]. \qquad (9.27)$$

Отображение проектирования $\pi$ на каждом слое индуцирует отображение проектирования $\pi: N(\beta) \to G(\beta)$, которое можно задать правилом: $\pi(Y) = Y + [\beta']$, т. е. $\pi(Y)(t) = Y(t) + [\beta'(t)] \in G(\beta(t))$ для каждого $t \in [a, b]$.

Этой конструкции факторрасслоения можно дать следующую (неединственную) геометрическую реализацию. Пусть $n \in T_{\beta(0)}M$ — изотропный касательный вектор, для которого $\langle n, \beta'(0)\rangle = -1$. Перенесем $n$ параллельно вдоль $\beta$. Получим изотропное векторное поле $\eta$, параллельное вдоль $\beta$ и удовлетворяющее условию $\langle \eta(t), \beta'(t)\rangle = -1$ для всех $t \in [a, b]$. Выберем пространственноподобные касательные векторы $e_1, \ldots, n_{n-2} \in T_{\beta(0)}M$ так, чтобы $\langle n, e_j\rangle = \langle \beta'(0), e_j\rangle = 0$ для всех $j = 1, \ldots, n-2$ и $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ для всех $i, j = 1, \ldots, n-2$. Продолжим эти векторы параллельным переносом до пространственноподобных векторных полей $E_1, \ldots, E_{n-2} \in V^{\perp}(\beta)$, параллельных вдоль $\beta$, и положим

$$V(\beta(t)) = \left\{\sum_{j=1}^{n-2} \lambda_j E_j(t) \colon \lambda_j \in \mathbb{R}, \qquad j = 1, \ldots, n-2\right\}. \qquad (9.28)$$

Тогда $V(\beta(t))$ является линейным подпространством пространства $N(\beta(t))$, состоящим из пространственноподобных касательных векторов, и мы имеем следующее разложение в прямую сумму:

$$N(\beta'(t)) = [\beta'(t)] \oplus V(\beta(t)), \qquad (9.29)$$

справедливое для каждого $t \in [a, b]$. Пусть $V(\beta) = \bigcup_{a \leqslant t \leqslant b} V(\beta(t))$ и $V_0(\beta) = \{Y \in V(\beta) \colon Y(a) = Y(b) = 0\}$. Если $\beta'(t)$ и $\eta(t)$ заданы, то $V(\beta)$ не зависит от конкретного выбора $\{e_1, \ldots, e_{n-2}\}$ в $T_{\beta(0)}M$. Однако, если $n \in T_{\beta(0)}M$, а значит, и $\eta$ изменены, может появиться разложение в прямую сумму, отличное от (9.29), вследствие того что заданная лоренцева метрика $g$, рассматриваемая только на $N(\beta(t))$, вырождается. Тем не менее $V(\beta(t))$ можно рассматривать в качестве геометрической реализации факторрасслоения $G(\beta)$ при посредстве отображения

$Z \to Z + [\beta']$ из $V(\beta)$ в $G(\beta)$. Поскольку формула (9.29) является разложением в прямую сумму, легко вычисляется, что это отображение есть изоморфизм.

Обратный изоморфизм

$$\theta: G(\beta(t)) \to V(\beta(t)) \tag{9.30}$$

для каждого $t \in [a, b]$ определяется следующим образом. Для заданного $v \in G(\beta(t))$ возьмем любой $x \in N(\beta(t))$ так, чтобы $\pi(x) = v$. Согласно формуле (9.29), разложение $x = \lambda\beta'(t) + v_0$, где $v_0 \in V(\beta(t))$, единственно. Положим $\theta(v) = v_0$. Если взять любой другой $x_1 \in N(\beta(t))$, для которого $\pi(x_1) = v$, то, поступая, как и выше, имеем $x_1 = \mu\beta'(t) + v_0$ с тем же самым $v_0 \in V(\beta(t))$ и некоторым $\mu \in \mathbb{R}$. Поэтому $\theta$ корректно определено.

В качестве первого шага к определению индексной формы $\bar{I}$ на факторрасслоении $G(\beta)$ покажем, как лоренцева метрика, ковариантная производная и тензор кривизны многообразия $(M, g)$ могут быть спроектированы на $G(\beta)$. Сначала по произвольно заданным $v, w \in G(\beta(t))$ выберем $x, y \in N(\beta(t))$ так, чтобы $\pi(x) = v$, $\pi(y) = w$, и определим $\bar{g}$ по правилу

$$\bar{g}(v, w) = g(x, y). \tag{9.31}$$

Предположим далее, что мы выбрали $x_1, y_1 \in N(\beta(t))$, для которых $\pi(x_1) = v$, $\pi(y_1) = w$. Тогда $x = x_1 + \lambda\beta'(t)$, $y = y_1 + \mu\beta'(t)$ для некоторых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и поэтому $g(x, y) = g(x_1, y_1) + \lambda g(y_1, \beta'(t)) + \mu g(x_1, \beta'(t)) + \mu\lambda g(\beta'(t), \beta'(t)) = g(x_1, y_1)$. Следовательно, $\bar{g}$ корректно определена. Легко проверяется, что $\bar{g}(v, w) = g(\theta(v), \theta(w))$ для всех $v, w \in G(\beta(t))$. Поэтому метрику $\bar{g}$ на $G(\beta(t))$ можно отождествить с заданной лоренцевой метрикой $g$ на $V(\beta(t))$. Из того, что форма $g \mid V(\beta(t)) \times V(\beta(t))$ положительно определена для любого $t \in [a, b]$, вытекает, что индуцированная метрика $\bar{g}: G(\beta(t)) \times G(\beta(t)) \to \mathbb{R}$ обладает следующим важным свойством.

**Замечание 9.48.** *Для каждого $t \in [a, b]$ метрика $\bar{g}: G(\beta(t)) \times G(\beta(t)) \to \mathbb{R}$ положительно определена.*

Теперь мы расширим оператор ковариантного дифференцирования, действующий на векторных полях вдоль $\beta$, до оператора ковариантного дифференцирования для сечений $G(\beta)$. Введем сначала следующее обозначение.

**Определение 9.49.** Пусть $\mathfrak{X}(\beta)$ — множество кусочно-гладких сечений факторрасслоения $G(\beta)$. Положим $\mathfrak{X}_0(\beta) = \{W \in \mathfrak{X}(\beta): W(a) = [\beta'(a)]$ и $W(b) = [\beta'(b)]\}$.

По заданному $V \in \mathfrak{X}(\beta)$ выберем $X \in V^{\perp}(\beta)$ из условия $\pi(X) = V$ и положим

$$V'(t) = \nabla_{\beta'} V(t) = \pi(\nabla_{\beta'} X(t)). \tag{9.32}$$

Если $X_1 \in V^{\perp}(\beta)$ также удовлетворяет условию $\pi(X_1) = V$, то $X_1 = X + f\beta'$ для некоторой функции $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, и, поскольку $\beta$ — геодезическая, получаем $X_1' = X' + f'\beta'$. Таким образом, $\pi(X_1'(t)) = \pi(X'(t))$ для всех $t \in [a, b]$. Значит, ковариантная производная для $\mathfrak{X}(\beta)$, задаваемая формулой (9.32), корректно определена. Можно убедиться в том, что это ковариантное дифференцирование совместимо с метрикой $\bar{g}$ для $G(\beta)$ и удовлетворяет обычным свойствам ковариантного дифференцирования.

Для заданного $V \in \mathfrak{X}(\beta)$ выберем $X \in V^{\perp}(\beta)$ из условия $\pi(X) = V$. Тогда $X(t) = f(t)\beta'(t) + \theta(V)(t)$, где $\theta$ то же, что и в формуле (9.30). Согласно правилу (9.32), при помощи $\theta(V)$ можно вычислить $V'(t)$: $V'(t) = \pi(\nabla_{\beta'}(\theta(V))(t))$. Кроме того, $\theta(V)$ удовлетворяет соотношению $\langle \beta'(t), \theta(V)(t)\rangle = \langle \eta(t), \theta(V)(t)\rangle$ для всех $t \in [a, b]$. Из того, что $\beta$ — геодезическая, а $\eta$ параллельно вдоль $\beta$, после дифференцирования получаем, что $\langle \beta'(t), \nabla_{\beta'}\theta(V)(t)\rangle = \langle \eta(t), \nabla_{\beta'}\theta(V)(t)\rangle = 0$ для всех $t \in [a, b]$. Поэтому $\nabla_{\beta'}\theta(V) \in V(\beta)$. Следовательно, для всех $t \in [a, b]$

$$\theta(V'(t)) = (\theta(V))'(t), \tag{9.33}$$

где дифференцирование в левой части последнего равенства проводится в $G(\beta)$, а в правой части — в $V(\beta)$. Поэтому, если отождествить $G(\beta)$ и $V(\beta)$ при помощи изоморфизма $\theta$, то ковариантное дифференцирование в $G(\beta)$ и в $V(\beta)$ будет одинаковым.

Чтобы перенести на $G(\beta)$ якобиевы поля и дифференциальное уравнение Якоби, необходимо определить эндоморфизм кривизны

$$\overline{R}(\cdot, \beta'(t))\beta'(t): G(\beta(t)) \to G(\beta(t))$$

для каждого $t \in [a, b]$. Это можно сделать следующим образом. Для заданного $v \in G(\beta(t))$ выберем произвольный $x \in N(\beta(t))$ из условия $\pi(x) = v$ и положим

$$\overline{R}(v, \beta'(t))\beta'(t) = \pi(R(x, \beta'(t))\beta'(t)). \tag{9.34}$$

Легко видеть, что в силу равенства $R(\beta', \beta')\beta' = 0$ это определение не зависит от выбора $x \in N(\beta(t))$, если только $\pi(x) = v$. Если $v = \pi(x)$ и $w = \pi(y)$, где $x, y \in N(\beta(t))$, то из формул (9.31) и (9.34) вытекает, что

$$\bar{g}(\overline{R}(v, \beta'(t))\beta'(t), w) = g(R(x, \beta'(t))\beta'(t), y). \tag{9.35}$$

Наконец, пользуясь симметрией $g(R(x, y)z, w)$, получаем, что

$$\overline{g}(\overline{R}(v, \beta'(t))\beta'(t), w) = \overline{g}(\overline{R}(w, \beta'(t))\beta'(t), v) \qquad (9.36)$$

для всех $v, w \in G(\beta(t))$.

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы определить в $G(\beta)$ якобиевы классы (см. Бёлтс (1977, с. 43—44)).

**Определение 9.50.** Гладкое сечение $V \in \mathfrak{X}(\beta)$ называется *якобиевым классом* в $G(\beta)$, если $V$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Якоби

$$V'' + \overline{R}(V, \beta')\beta' = [\beta'], \qquad (9.37)$$

где ковариантное дифференцирование задается формулой (9.32), а эндоморфизм кривизны $\overline{R}$ — формулой (9.34).

Как мы увидим в приводимой ниже серии лемм, для заданного якобиева класса $W \in \mathfrak{X}(\beta)$, подчиненного условиям $W(a) \neq [\beta'(a)]$ и $W(b) \neq [\beta'(b)]$, в $V^{\perp}(\beta)$ существует двупараметрическое семейство $J_{\lambda,\mu}$ якобиевых полей вида $J_{\lambda,\mu} = J + \lambda\beta' + \mu t\beta'$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $\pi(J_{\lambda,\mu}) = W$. Далее следует подчеркнуть, что для заданного якобиева класса $W \in \mathfrak{X}(\beta)$ может и *не быть* якобиева поля $J$, для которого $\pi(J) = W$, в произвольной геометрической реализации $V(\beta)$ факторрасслоения $G(\beta)$. С другой стороны, всегда существует якобиево поле $J \in V^{\perp}(\beta)$, у которого $\pi(J) = W$. Но для $J$ может оказаться необходимым иметь компоненту в $[\beta']$. Причина этого станет ясна в лемме 9.52. В доказываемых ниже леммах мы будем использовать геометрические реализации $V^{\perp}(\beta) = [\beta'] \oplus V(\beta)$, определенные в формуле (9.29).

**Лемма 9.51.** *Пусть $W$ — якобиев класс векторных полей в $G(\beta)$. Тогда существует гладкое якобиево поле $Y \in V^{\perp}(\beta)$, у которого $\pi(Y) = W$. Обратно, если $Y$ — якобиево поле в $V^{\perp}(\beta)$, то $\pi(Y)$ — якобиев класс в $G(\beta)$.*

*Доказательство.* Вторая часть утверждения леммы ясна, потому что если $Y'' + R(Y, \beta')\beta' = 0$, то $0 = \pi(Y'' + R(Y, \beta')\beta') = (\pi(Y))'' + \overline{R}(\pi(Y), \beta')\beta'$.

Остается доказать первое утверждение леммы. Для заданного якобиева класса $W$ рассмотрим гладкое векторное поле $Y_1$ в геометрической реализации $V(\beta)$, для которого $\pi(Y_1) = W$. Ввиду того что $W'' + \overline{R}(W, \beta')\beta' = [\beta']$, в $\mathfrak{X}(\beta)$ существует гладкая функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, такая, что $Y_1'' + R(Y_1, \beta')\beta' = f\beta'$. Пусть $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, $h'' = f$. Положим $Y = Y_1 - h\beta'$. Тогда $\pi(Y) = W$, и мы получаем

$$f\beta' = Y_1'' + R(Y_1, \beta')\beta' = (Y + h\beta')'' + R(Y + h\beta', \beta')\beta' =$$
$$= Y'' + h''\beta' + R(Y, \beta')\beta' = Y'' + f\beta' + R(Y, \beta')\beta'.$$

Следовательно, $0 = Y'' + R(Y, \beta')\beta'$, как и требовалось. □

Более точно связь между якобиевыми полями в геометрической реализации $V(\beta)$ факторрасслоения $G(\beta)$ и якобиевыми классами в $\mathfrak{X}(\beta)$ описывается следующей леммой.

**Лемма 9.52.** *Пусть $W$ — якобиев класс в $\mathfrak{X}(\beta)$. Тогда якобиево поле $J \in V(\beta)$ с условием $\pi(J) = W$ существует в том и только том случае, когда геометрическая реализация $\theta(W)$ класса $W$ в $V(\beta)$ удовлетворяет условию $R(\theta(W), \beta')\beta'|_t \in V(\beta(t))$ для всех $t \in [a, b]$.*

*Доказательство.* Если $J \in V(\beta)$ и $\pi(J) = W$, то $\theta(W) = J$. Но так как $J$ — якобиево поле, то

$$R(\theta(W), \beta')\beta' = R(J, \beta')\beta' = -J'' \in V(\beta)$$

ввиду того, что $J \in V(\beta)$.

Допустим теперь, что $R(\theta(W), \beta')\beta' \in V(\beta)$ и $J = \theta(W)$. Тогда $R(\theta(W), \beta')\beta' = R(J, \beta')\beta'$. Вследствие того что $W'' + \bar{R}(W, \beta')\beta' = [\beta']$ в $G(\beta)$, известно, что $J$ должно удовлетворять дифференциальному уравнению вида $J'' + R(J, \beta')\beta' = f\beta'$ в $V^{\perp}(\beta)$. Однако если $R(\theta(V), \beta')\beta' = R(J, \beta')\beta' \in V(\beta)$, то векторное поле $J'' + R(J, \beta')\beta'$ лежит в $V(\beta)$. Следовательно, согласно разложению (9.29), $J'' + R(J, \beta')\beta' = 0$. $\square$

Для изучения сопряженных точек необходимо доказать следующее уточнение леммы 9.51 (см. Бёлтс (1977, с. 43—44)).

**Лемма 9.53.** *Пусть $W \in \mathfrak{X}(\beta)$ — якобиев класс, подчиненный условиям $W(a) = [\beta'(a)]$ и $W(b) = [\beta'(b)]$. Тогда существует единственное якобиево поле $Z \in V^{\perp}(\beta)$, для которого $\pi(Z) = W$ и $Z(a) = Z(b) = 0$.*

*Доказательство.* Из леммы 9.51 известно, что существует якобиево поле $Y \in V^{\perp}(\beta)$ с условием $\pi(Y) = W$. Однако мы не знаем, выполняются ли равенства $Y(a) = Y(b) = 0$. Для любых постоянных $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ векторное поле $Y + \lambda\beta' + \mu t\beta'$ также является якобиевым полем в $V^{\perp}(\beta)$, причем $\pi(Y + \lambda\beta' + \mu t\beta') = W$. Вследствие равенств $\pi(Y) = W$ и $W(a) = [\beta'(a)]$, $W(b) = [\beta'(b)]$ можно утверждать, что $Y(a) = c_1\beta'(a)$ и $Y(b) = c_2(\beta'(b)$ для некоторых постоянных $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Выбирая $\lambda = (c_2 a - c_1 b)(b - a)^{-1}$ и $\mu = b^{-1}[(c_1 b - c_2 a)(b - a)^{-1} - c_2]$, легко убедиться в том, что $Z = Y + \lambda\beta' + \mu t\beta'$ удовлетворяет условиям $Z(a) = Z(b) = 0$.

Чтобы доказать единственность, предположим, что $Z_1$ — второе якобиево поле в $V^{\perp}(\beta)$, удовлетворяющее условиям $\pi(Z_1) = W$ и $Z_1(a) = Z_1(b) = 0$. Тогда $X = Z_1 - Z$ является якобиевым полем вида $X = h\beta'$, причем $X(a) = X(b) = 0$. Из соотношения $0 = X'' + R(X, \beta')\beta' = h''\beta' + hR(\beta', \beta')\beta' = h''\beta'$ вы-

текает, что $h$ — линейная функция. А так как $h(a) = h(b) = 0$, то необходимо $h = 0$. Следовательно, $Z_1 = Z$, как и требовалось. $\square$

Доказанная лемма 9.53 позволяет дать следующее определение. Напомним также, что если $J$ — произвольное якобиево поле вдоль $\beta$, удовлетворяющее условиям $J(t_1) = J(t_2) = 0$, где $t_1 \neq t_2$, то $J \in V^\perp(\beta)$ (см. лемму 9.46).

**Определение 9.54.** Пусть $\beta\colon [a, b] \to (M, g)$ — изотропная геодезическая. Будем говорить, что точки $t_1$ и $t_2$ из $[a, b]$, $t_1 \neq t_2$, *сопряжены вдоль* $\beta$, если в $\mathfrak{X}(\beta)$ существует якобиев класс $W \neq [\beta']$, для которого $W(t_1) = [\beta'(t_1)]$ и $W(t_2) = [\beta'(t_2)]$. Будем говорить также, что $t_1 \in (a, b]$ — *сопряженная точка* геодезической $\beta$, если $t = a$ и $t_1$ сопряжены вдоль $\beta$. Положим

$$J_t(\beta) = \{\text{якобиевы поля } Y \text{ вдоль } \beta\colon Y(a) = Y(t) = 0\}$$

и

$$\overline{J}_t(\beta) = \{\text{якобиевы классы } W \in \mathfrak{X}(\beta)\colon W(a) = [\beta'(a)] \text{ и } W(t) = [\beta'(t)]\}.$$

Тогда $J_t(\beta) \subset V^\perp(\beta)$ и $t_1$ и $t_2$ сопряжены вдоль $\beta$ в смысле определения 9.54 в том и только том случае, когда существует нетривиальное якобиево поле $J$ вдоль $\beta$, у которого $J(t_1) = J(t_2) = 0$. Из единственности, доказанной в лемме 9.53, вытекает следующий важный результат.

**Следствие 9.55.** *Естественное проектирование* $\pi\colon J_t(\beta) \to \overline{J}_t(\beta)$ *является изоморфизмом для каждого* $t \in (a, b]$. *Таким образом,* $\overline{J}_t(\beta)$ *конечномерно и* $\dim \overline{J}_t(\beta) = \dim J_t(\beta)$ *для всех* $t \in (a, b]$.

Теперь мы подготовлены к изучению индексной формы изотропной геодезической $\beta\colon [a, b] \to (M, g)$. Для геометрической интерпретации индексной формы полезно ввести функционал, аналогичный функционалу длины дуги для времениподобных геодезических, а именно функционал энергии. Основанием для использования энергии вместо длины дуги является простое обстоятельство: производная функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x = 0$ не существует, а $\sqrt{-g(\beta'(t), \beta'(t))} = 0$ для всех $t \in [a, b]$, если только $\beta$ — изотропная геодезическая.

**Определение 9.56.** Пусть $\gamma\colon [c, d] \to (M, g)$ — гладкая непространственноподобная кривая. Гладкое отображение $E_\gamma\colon [c, d] \to \mathbb{R}$, задаваемое формулой

$$E_\gamma(t) = \frac{1}{2}\int_{s=c}^{t} \|\gamma'(s)\|^2\, ds = -\frac{1}{2}\int_{s=c}^{t} g(\gamma'(s), \gamma'(s))\, ds,$$

называется *функционалом энергии* кривой $\gamma$, а число $E(\gamma) = E_\gamma(d)$ — *энергией* кривой $\gamma$.

Энергия кусочно-гладкой непространственноподобной кривой $\gamma$ вычисляется при помощи суммирования энергий по интервалам, на которых $\gamma$ является гладкой, в точности так же, как и в формуле (3.1) для функционала длины дуги. Если положить $L_\gamma(t) = L(\gamma\,|\,[c, t])$, то, применяя неравенство Коши—Буняковского (Коши—Шварца), получим

$$L_\gamma^2(d) \leqslant 2(d-c)\,E_\gamma(d). \tag{9.38}$$

Равенство в формуле (9.38) достигается в том и только том случае, если $\|\gamma'(t)\|$ постоянна. Тем самым равенство выполняется только для изотропных или времениподобных геодезических.

Напомним, что через $V^\perp(\beta)$ обозначается пространство кусочно-гладких векторных полей $Y$ вдоль $\beta$, ортогональных $\beta'$ и $V_0^\perp(\beta) = \{Y \in Y^\perp(\beta)\colon Y(a) = Y(b) = 0\}$.

**Определение 9.57.** Индексная форма $I\colon V^\perp(\beta) \times V^\perp(\beta) \to \mathbb{R}$ изотропной геодезической $\beta\colon [a, b] \to M$ определяется по правилу

$$I(X, Y) = -\int_a^b (\langle X', Y'\rangle - \langle R(X, \beta')\beta', Y\rangle)\,dt \tag{9.39}$$

для любых $X, Y \in V^\perp(\beta)$.

Интеграл в правой части формулы (9.39) можно проинтегрировать по частям совсем так же, как и во времениподобном случае (см. замечание 9.5). Это позволяет дать другое, но равносильное определение индексной формы, используемое Хокингом и Эллисом (1977, с. 129) и Бёлтсом (1977, с. 110). Или, подробнее,

$$I(X, Y) = \int_a^b \langle X'' + R(X, \beta')\beta', Y\rangle\,dt + \sum_{i=0}^{k} \langle \Delta_{t_i}(X'), Y\rangle, \tag{9.40}$$

где разбиение $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ выбрано так, что $X\,|\,[t_i, t_{i+1}]$ гладкое для всех $i = 0, 1, \ldots, k$ и

$$\Delta_{t_0}(X') = X'(a^+),\quad \Delta_{t_k}(X') = -X'(b^-)$$

и

$$\Delta_{t_i}(X') = \lim_{t\to t_i^+} X'(t) - \lim_{t\to t_i^-} X'(t),$$

где $i = 1, \ldots, k-1$.

Если $\alpha$ — вариация изотропной геодезической $\beta$, такая, что все соседние кривые изотропны, то все производные функционала энергии обращаются в нуль при $s = 0$, так как $E(\alpha_s) = 0$ для

всех $s$. Поэтому обычно ограничиваются рассмотрением следующего класса вариаций.

**Определение 9.58.** Кусочно-гладкая вариация $\alpha$: $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ кусочно-гладкой непространственноподобной кривой $\beta$: $[a, b] \to M$ называется *допустимой*, если все соседние кривые $\alpha_s$: $[a, b] \to M$, задаваемые формулой $\alpha_s(t) = \alpha(t, s)$, являются времениподобными для каждого $s \neq 0$ из $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Предположим теперь, что для $W \in V^\perp(\beta)$ существует допустимая вариация $\alpha$: $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ с векторным полем вариации $\alpha_*(\partial/\partial s)\,|_{(t,0)} = W(t)$ для каждого $t \in [a, b]$. Пусть $E(\alpha_s)$ — энергия соседней кривой $\alpha_s$: $[a, b] \to M$ для каждого $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Тогда $(d/ds)\,E(\alpha_s)\,|_{s=0} = 0$ ввиду того, что $\beta$ — геодезическая, и

$$\frac{d^2}{ds^2} E(\alpha_s)\,|_{s=0} = I(W, W). \tag{9.41}$$

Так как $E(\beta) = E(\alpha_0) = 0$, то должно выполняться неравенство $(d^2/ds^2)\,E(\alpha_s)\,|_{s=0} \geqslant 0$. Поэтому условие $I(W, W) \geqslant 0$ является необходимым для того, чтобы $W \in V^\perp(\beta)$ было векторным полем некоторой допустимой вариации $\alpha$ геодезической $\beta$. Заметим, также что если точка изотропного раздела для $\beta(a)$ вдоль $\beta$ в будущем появляется позже $\beta(b)$, то допустимых собственных вариаций геодезической $\beta$ не существует (см. следствие 3.14 и разд. 8.2).

Непосредственно из формулы (9.39) вытекает, что если $X \in V_0^\perp(\beta)$ — векторное поле вида $X(t) = f(t)\,\beta'(t)$ для любой кусочно-гладкой функции $f$: $[a, b] \to \mathbb{R}$ с условиями $f(a) = f(b) = 0$ и произвольного $Y \in V_0^\perp(\beta)$, то $I(X, Y) = 0$. Поэтому индексная форма $I$: $V_0^\perp(\beta) \times V_0^\perp(\beta) \to \mathbb{R}$ никогда не может быть отрицательно определенной и, хуже того, всегда имеет бесконечномерное нулевое пространство. Это наводит на мысль, что индексную форму следует спроектировать на $G(\beta)$ (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 129), Бёлтс (1977, с. 111)). Напомним, что обозначение $\mathfrak{X}(\beta)$ было введено для кусочно-гладких сечений факторрасслоения $G(\beta)$ и $\mathfrak{X}_0(\beta) = \{W \in \mathfrak{X}(\beta)\colon W(a) = [\beta'(a)],\ W(b) = [\beta'(b)]\}$.

**Определение 9.59.** Индексная форма $\bar{I}$: $\mathfrak{X}(\beta) \times \mathfrak{X}(\beta) \to \mathbb{R}$ задается формулой

$$\bar{I}(V, W) = -\int_{t=a}^{b} [\bar{g}(V', W') - \bar{g}(\bar{R}(V, \beta')\beta', W)]\,dt \tag{9.42}$$

где $V, W \in \mathfrak{X}(\beta)$, а $\bar{g}$, $\bar{R}$ и ковариантная производная сечений факторрасслоения $G(\beta)$ задаются формулами (9.31), (9.34) и (9.32) соответственно.

Так же как и в случае индексной формы $I$: $V^\perp(\beta) \times V^\perp(\beta) \to \mathbb{R}$, интегрируя в формуле (9.42) по частям, получаем соотношение

$$\bar{I}(V, W) = \int_a^b \bar{g}(V'' + \bar{R}(V, \beta')\beta', W)\,dt + \sum_{j=0}^{k} \bar{g}(W(t_j), \Delta_{t_j}(V')), \tag{9.43}$$

где разбиение $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ выбрано так, что $V \mid [t_i, t_{i+1}]$ является гладким для $i = 0, 1, \ldots, k$. В частности, если $V$ — гладкое сечение $G(\beta)$, то

$$\bar{I}(V, W) = -\bar{g}(V', W)\big|_a^b + \int_a^b \bar{g}(V'' + \bar{R}(V, \beta')\beta', W)\,dt, \tag{9.44}$$

и если $V$ — якобиев класс в $\mathfrak{X}(\beta)$, то

$$\bar{I}(V, W) = -\bar{g}(V', W)\big|_a^b. \tag{9.45}$$

Из того, что векторные поля вида $f(t)\beta'(t)$ располагаются в нулевом пространстве формы $I$: $V^\perp(\beta) \times V^\perp(\beta) \to \mathbb{R}$, для любых $X, Y \in V^\perp(\beta)$, подчиненных условиям $\pi(X) = V$ и $\pi(Y) = W$, вытекает, что

$$\bar{I}(V, W) = I(X, Y), \tag{9.46}$$

где индекс в левой части равенства вычисляется в $\mathfrak{X}(\beta)$, а в правой — в $V^\perp(\beta)$.

В разд. 9.1 мы видели, что для времениподобных геодезических сегментов нулевое пространство индексной формы состоит из гладких якобиевых полей, обращающихся в нуль в обеих концевых точках. Сейчас мы докажем аналогичный результат для индексной формы $\bar{I}$ на факторпространстве $\mathfrak{X}_0(\beta)$ для произвольного изотропного геодезического сегмента $\beta$: $[a, b] \to M$.

**Теорема 9.60.** *Для кусочно-гладких векторных классов $W \in \mathfrak{X}_0(\beta)$ следующие высказывания эквивалентны:*

(а) *$W$ — гладкий якобиев класс в $\mathfrak{X}_0(\beta)$.*

(б) *$\bar{I}(W, Z) = 0$ для всех $Z \in \mathfrak{X}_0(\beta)$.*

*Доказательство.* Из формулы (9.45) ясно видно, что (а) влечет за собой (б). Чтобы показать, что (б) влечет за собой (а), зафиксируем единственное кусочно-гладкое векторное поле $Y$ в геометрической реализации $V(\beta)$ для $G(\beta)$, задаваемой соотношением (9.28), с $\pi(Y) = W$ и $Y(a) = Y(b) = 0$. Пусть $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ — конечное разбиение отрезка $[a, b]$, такое, что $Y \mid [t_j, t_{j+1}]$ — гладкое поле для $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Пусть далее $\rho$: $[a, b] \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, у которой $\rho(t_j) = 0$

для каждого $j$, $0 \leqslant j \leqslant k$, и $\rho(t) > 0$ во всех других точках. Положим $Z = \pi(\rho(Y'' + R(Y, \beta')\beta')) \in \mathfrak{X}_0(\beta)$. Тогда из соотношения (9.43) получаем, что

$$0 = \overline{I}(W, Z) = \int_{t=a}^{b} \rho(t)\,\overline{g}(W'' + \overline{R}(W, \beta')\beta', W'' + \\ + \overline{R}(W, \beta')\beta')|_t\,dt.$$

Вспоминая, что метрика $\bar{g}$ положительно определена (см. замечание 9.48), получим, что $W''(t) + \overline{R}(W(t), \beta'(t))\beta'(t) = [\beta'(t)]$, за исключением, может быть, точек $t_j$. Поэтому $W \mid [t_j, t_{j+1}]$ является гладким якобиевым классом для каждого $j$. Чтобы показать, что значения $W$ в точках $t_j$ согласуются так, что на всем $[a, b]$ возникает гладкий якобиев класс, достаточно убедиться в том, что векторное поле $Y$, представляющее $W$, в геометрической реализации $V(\beta)$ является $C^1$-гладким векторным полем. Прежде всего заметим, что так как равенство $W''(t) + \overline{R}(W(t), \beta'(t))\beta'(t) = [\beta'(t)]$ справедливо всюду, кроме, может быть, точек $t_j$, то, применяя формулу (9.43), получаем, что

$$0 = \overline{I}(W, Z) = \sum_{j=1}^{k-1} \overline{g}\left(Z(t_j), \Delta_{t_j}(W')\right)$$

для любого $Z \in \mathfrak{X}_0(\beta)$. Из того, что $Y \in V(\beta)$, имеем $\langle Y(t), \beta'(t)\rangle = \langle Y(t), \eta(t)\rangle = 0$ для всех $t \in [a, b]$. Поэтому $\langle Y'(t), \beta'(t)\rangle = \langle Y'(t), \eta(t)\rangle = 0$ для $t \notin \{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$, а по непрерывности $\Delta_{t_j}(Y') \in V(\beta(t_j))$ для каждого $j = 1, \ldots, k-1$. Пусть $X \in V(\beta)$ — гладкое векторное поле, у которого $X(a) = X(b) = 0$ и $X(t_j) = \Delta_{t_j}(Y')$ для каждого $j = 1, \ldots, k-1$. Положим $Z = \pi(X) \in \mathfrak{X}_0(\beta)$. Тогда получаем, что

$$0 = \overline{I}(W, Z) = \sum_{j=1}^{k-1} \langle \Delta_{t_j}(Y'), \Delta_{t_j}(Y')\rangle.$$

Из этого соотношения вытекает, что $\Delta_{t_j}(Y') = 0$ для $j = 1, \ldots, k-1$. Следовательно, $Y'$ непрерывно в точках $t_j$, как и требовалось. □

Заметим, что в первой части доказательства (б) $\Rightarrow$ (а) теоремы 9.60 мы не знаем, что $Y'' + R(Y, \beta')\beta' \in V(\beta)$, даже если $Y \in V(\beta)$. Поэтому мы не можем заключить, что $Y$ — якобиево поле во всех точках, кроме $t_j$. Это как раз и есть то самое место в переходе к факторрасслоению $G(\beta)$, в котором $W'' + \overline{R}(W, \beta')\beta'$ лежит в $G(\beta)$ по построению, и индуцированная метрика $\bar{g}$ положительно определена на $G(\beta) \times G(\beta)$.

Целью следующей части этого раздела является доказательство важного результата о том, что индексная форма $\overline{I}\colon \mathfrak{X}_0(\beta) \times$

$\times\ \mathfrak{X}_0(\beta) \to \mathbb{R}$ отрицательно определена в том и только том случае, когда на $[a, b]$ нет точек, сопряженных $t = a$, вдоль $\beta$. Доказательство этого результата, который неявно содержится в предложениях 4.5.11 и 4.5.12 Хокинга и Эллиса (1977), проведено во всех деталях Бёлтсом (1977, с. 117—123). Ввиду того что доказательство отрицательной определенности значительно отличается от соответствующего доказательства для времениподобных геодезических (см. теорему 9.22), мы коротко обрисуем доказательство для времениподобного случая, с тем чтобы прояснить отличия. Напомним, что прежде всего мы показали, что произвольные собственные кусочно-гладкие вариации $\alpha$ времениподобного геодезического сегмента имеют времениподобные соседние кривые $\alpha_s$ для достаточно малых $s$. Затем как следствие из леммы Гаусса и теоремы об обратной функции было доказано, что если $c$: $[a, b] \to$ $\to M$ — направленный в будущее времениподобный геодезический сегмент без сопряженных точек, то для любой собственной кусочно-гладкой вариации $\alpha$ геодезической $c$ соседние кривые $\alpha_s$ удовлетворяют неравенству $L(\alpha_s) \leqslant L(c)$ для всех достаточно малых $s$. Это приводило к тому, что в отсутствие сопряженных точек индексная форма отрицательно полуопределена. Затем мы смогли алгебраически доказать отрицательную определенность. Обратно, если $c$ имела на $[a, b]$ сопряженную точку, мы строили кусочно-гладкое векторное поле $Z \in V_0^{\perp}(c)$ нулевого индекса, используя для этого нетривиальное якобиево поле, гарантированное существованием точки, сопряженной $t = a$.

Для того чтобы построить содержательную теорию для изотропных геодезических, необходимо работать с допустимыми вариациями. Однако из теории для точек изотропного раздела известно, что если $\beta(b)$ приходит раньше точки изотропного раздела для $\beta(a)$ вдоль $\beta$ в будущем, то в $M$ не существует направленных в будущее времениподобных кривых из $\beta(a)$ в $\beta(b)$. Поэтому геометрические доводы поднятия в отсутствие сопряженных точек и применение леммы Гаусса не могут быть использованы для получения отрицательной полуопределенности индексной формы $\overline{I}$ в отсутствие сопряженных точек. Вместо этого необходимо работать непосредственно с самими якобиевыми полями. Наиболее удобно сделать это при помощи якобиевых тензоров.

С другой стороны, доказательство того, что если $\overline{I} < 0$, то сопряженных точек нет, можно провести в точности так же, как в римановом случае и в случае времениподобных геодезических. Значительно более сложные доказательства представлены у Хокинга и Эллиса (1977, предложение 4.5.12) и Бёлтса (1977, теорема 4.5.3) вследствие того, что эти авторы хотели получить следующий результат: если $\beta$: $[a, b] \to M$ имеет точку $\beta(t)$, $t \in (a, b)$, сопряженную $\beta(a)$, то существует времениподобная кривая,

идущая из $\beta(a)$ в $\beta(b)$ «близко» к $\beta$. Векторное поле $W$ собственной допустимой вариации кривой $\beta$, используемое для доказательства этого результата, проектируется в векторное поле $\overline{W} = \pi(W) \in \mathfrak{X}_0(\beta)$, $\overline{W} \neq [\beta']$, которое в силу условия (9.46) удовлетворяет неравенству $\overline{I}(\overline{W}, \overline{W}) \geqslant 0$ и, следовательно, доказывает оставшуюся половину теоремы 9.69. Для полноты изложения мы приведем также доказательство предложения 4.5.12 из книги Хокинга и Эллиса. Отметим, что этот результат состоит в следующем: точка изотропного раздела геодезической $\beta$ появляется одновременно с первой изотропно сопряженной точкой $\beta$ или раньше.

Чтобы доказать отрицательную определенность формы $\overline{I}$ в случае, если $\beta$ свободна от сопряженных точек, коротко опишем основные понятия и факты теории якобиевых и лагранжевых тензоров (см. Бёлтс (1977, с. 45—49)). Описание этих тензоров, приведенное в указанной монографии с точки зрения $\nabla$-обозначений, впервые было дано Эшенбергом (1975) для римановых многообразий и опубликовано также в работе Эшенберга и О'Салливена (1976), где эти тензоры привлекались для изучения расходимости геодезических в полных римановых многообразиях.

Вспомним, что для заданной изотропной геодезической $\beta\colon [a, b] \to M$ было выбрано изотропное векторное поле $\eta$, параллельное вдоль $\beta$ и такое, что $g(\eta(t), \beta'(t)) = -1$ для всех $t \in [a, b]$, а затем были выбраны пространственноподобные поля $\{E_1, \ldots, E_{n-2}\}$, параллельные вдоль $\beta$ и удовлетворяющие условиям $g(E_i(t), E_j(t)) = \delta_{ij}$ и $g(E_i(t), \beta'(t)) = g(E_i(t), \eta(t)) = 0$ для всех $i, j$ и всех $t \in [a, b]$. Положим $E_0 = \beta'$.

(1,1)-тензорное поле $A(t)$ пространства $V^\perp(\beta)$ — это линейное отображение

$$A = A(t)\colon N(\beta(t)) \to N(\beta(t))$$

для каждого $t \in [a, b]$. Поэтому, если $v \in N(\beta(t))$, то $A(t)(v) \in N(\beta(t))$. Составной эндоморфизм $RA(t)\colon N(\beta(t)) \to N(\beta(t))$ можно определить, полагая

$$RA(t)(v) = R(A(t)(v), \beta'(t))\,\beta'(t) \in N(\beta(t)) \qquad (9.47)$$

для любого $v \in N(\beta(t))$. Тензорное поле $A(t)$ будет гладким (соответственно кусочно-гладким), если отображения

$$t \to A(E_j)(t), \quad [a, b] \to V^\perp(\beta),$$

являются гладкими (соответственно кусочно-гладкими) для каждого $j = 0, 1, \ldots, n-2$. Записывая

$$A(E_j) = \sum_{i=1}^{n-2} f_j^i E_i + f_j \beta', \qquad (9.48)$$

где $f_j^i$, $f_j$: $[a, b] \to R$, можно определить (1,1)-тензорное поле $A'(t)$: $N(\beta(t)) \to N(\beta(t))$ по правилу

$$A'(E_j) = \sum_{i=1}^{n-2} (f_j^i)' E_i + f_j' \beta',$$

где $j = 0, 1, \ldots, n-2$. Отсюда вытекает, что композицию (1,1)-тензоров можно отождествить с матричным умножением компонент функций $f_j^i$ и $f_j$. Поэтому, если $A = A(t)$ и $B = B(t)$ — (1,1)-тензорные поля вдоль $\beta$, то мы имеем

$$(AB)' = A'B + AB'. \tag{9.49}$$

Применяя правило (9.49) к равенству $AA^{-1} = \mathrm{id}$ в случае, если $A(t)$: $N(\beta(t)) \to N(\beta(t))$ неособенно для всех $t$, получим следующее правило дифференцирования для неособенных (1,1)-тензорных полей:

$$(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}. \tag{9.50}$$

Для построения теории изотропного индекса, однако, нам необходимо рассматривать (1,1)-тензорные поля не на $V^\perp(\beta)$, а на факторрасслоении $G(\beta)$. Для каждого $t \in [a, b]$ (1,1)-тензорное поле $\bar{A} = \bar{A}(t)$: $G(\beta(t)) \to G(\beta(t))$ является линейным отображением, которое переводит векторные классы в векторные классы. Применяя к $\mathfrak{X}(\beta)$ операцию проектирования ковариантной производной (см. соотношение (9.32)), мы сможем дифференцировать кусочно-гладкие (1,1)-тензорные поля в $G(\beta(t))$ и получим формулы

$$(\overline{AB})' = \bar{A}'\bar{B} + \bar{A}\bar{B}' \tag{9.51}$$

и

$$((\bar{A})^{-1})' = -(\bar{A})^{-1}\bar{A}'(\bar{A})^{-1} \tag{9.52}$$

при условии, что $\bar{A}$ невырожденно. В силу того что спроектированная метрика $\bar{g}$: $G(\beta(t)) \times G(\beta(t)) \to \mathbb{R}$ положительно определена, можно определить тензорное поле $\bar{A}^* = \bar{A}^*(t)$, *сопряженное* (1,1)-тензорному полю $\bar{A}(t)$ для $G(\beta(t))$, по формуле

$$\bar{g}(\bar{A}(W), Z) = \bar{g}(\bar{A}^*(Z), W) \tag{9.53}$$

для всех векторных классов $Z$, $W \in G(\beta(t))$ и всех $t \in [a, b]$. Можно также определить составной эндоморфизм $\bar{R}\bar{A}$: $G(\beta(t)) \to$ $\to G(\beta(t))$ посредством правила

$$\bar{R}\bar{A}(W) = \bar{R}(\bar{A}(W), \beta')\beta', \tag{9.54}$$

где $\bar{R}$ — спроектированный оператор кривизны, задаваемый формулой (9.34). *Ядром* $\ker(\bar{A}(t))$ (1,1)-тензорного поля $\bar{A}(t)$: $G(\beta(t)) \to G(\beta(t))$ является линейное пространство

$$\ker(\bar{A}(t)) = \{w \in G(\beta(t)): \bar{A}(t)(w) = [\beta'(t)]\}. \tag{9.55}$$

Если $\overline{A}(t)(w) = [\beta'(t)]$ для всех $w \in G(\beta(t))$ и всех $t \in [a, b]$, то (1,1)-тензорное поле $\overline{A}(t)\colon G(\beta(t)) \to G(\beta(t))$ будет нулевым тензорным полем; обозначение $\overline{A} = 0$.

Теперь после всех этих вспомогательных приготовлений мы готовы определить якобиевы и лагранжевы тензорные поля.

**Определение 9.61.** Гладкое (1,1)-тензорное поле $\overline{A}\colon G(\beta) \to G(\beta)$ называется *якобиевым*, если $\overline{A}$ удовлетворяет условиям

$$\overline{A}'' + \overline{R}A = 0 \tag{9.56}$$

и

$$\ker(\overline{A}(t)) \cap \ker(\overline{A}'(t)) = \{[\beta'(t)]\} \tag{9.57}$$

для всех $t \in [a, b]$.

Условие (9.56) является следствием того, что если $Y \in \mathfrak{X}(\beta)$ — произвольный векторный класс, параллельный вдоль $\beta$, то $J = \overline{A}(Y)$ — якобиев класс вдоль $\beta$. Это вытекает из того, что

$$J'' + \overline{R}(J, \beta')\beta' = \overline{A}''(Y) + \overline{R}\overline{A}(Y) = (\overline{A}'' + \overline{R}\overline{A})(Y) = 0,$$

так как $Y' = 0$. Условие (9.57) означает, что если $Y_1, \ldots, Y_{n-2}$ — линейно независимые параллельные сечения $\mathfrak{X}(\beta)$, то $\overline{A}(Y_1), \ldots, \overline{A}(Y_{n-2})$ являются линейно независимыми якобиевыми сечениями в следующем смысле. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}$ — вещественные постоянные, для которых

$$\sum_{j=1}^{n-2} \lambda_j \overline{A}(Y_j)(t) = [\beta'(t)]$$

при всех $t \in [a, b]$, то $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-2} = 0$.

Обращение приведенной выше конструкции можно использовать для доказательства существования якобиевых тензоров. Пусть $E_1, \ldots, E_{n-2}$ — пространственноподобные параллельные поля, выбранные в (9.28) и порождающие $V(\beta)$. Пусть $\overline{E}_j = \pi(E_j)$ — соответствующие параллельные векторные классы в $\mathfrak{X}(\beta)$. Пусть далее $\overline{J}_1, \ldots, \overline{J}_{n-2}$ — якобиевы классы вдоль $\beta$ с начальными условиями $\overline{J}_i(a) = [\beta'(t)]$ и $\overline{J}_i'(a) = \overline{E}_i(a)$ для $i = 1, \ldots, n-2$. Якобиев тензор $\overline{A}$, удовлетворяющий начальным условиям $\overline{A}(a) = 0$, $\overline{A}'(a) = \mathrm{id}$, может быть определен требованием, что

$$\overline{J}_i = \overline{A}(\overline{E}_i) \tag{9.58}$$

для каждого $i = 1, \ldots, n-2$, и по линейности продолжен на все $G(\beta)$. Из того, что $\overline{J}_i$ — якобиевы классы, а $\overline{E}_i$ — параллельные классы в $\mathfrak{X}(\beta)$, вытекает, что $\overline{A}$ удовлетворяет равенству (9.56). Чтобы проверить, что $\overline{A}$ удовлетворяет условию (9.57), предполо-

жим, что $\overline{A}(t)(\overline{v}) = \overline{A}'(t)(\overline{v}) = [\beta'(t)]$ для некоторого $v \in G(\beta(t))$. Выберем единственный вектор $v \in V(\beta(t))$ из условия $\pi(v) = \overline{v}$ и запишем его в следующем виде: $v = \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i E_i(t)$. Тогда $\overline{v} = \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i \overline{E}_i(t)$, и мы получаем, что $[\beta'(t)] = \overline{A}(\overline{v}) = \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i \overline{J}_i(t)$ и

$$[\beta'(t)] = \overline{A}'(\overline{v}) = \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i \overline{A}'(\overline{E}_i)|_t = \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i J_i'(t).$$

Таким образом, $\overline{J} = \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i \overline{J}_i$ — якобиев класс в $G(\beta)$, удовлетворяющий условиям $\overline{J}(t) = \overline{J}'(t) = [\beta'(t)]$. Следовательно, $\overline{J} = [\beta']$. Тем самым $\sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i \overline{E}_i(s) = [\beta'(s)]$ для всех $s \in [a, b]$, что противоречит линейной независимости параллельных классов $\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_{n-2}$. Следовательно, $\ker(\overline{A}(s)) \cap \ker(\overline{A}'(s)) = [\beta'(s)]$ для всех $s \in [a, b]$, как и требовалось.

Полезно отметить также следующий результат.

**Лемма 9.62.** $\ker(\overline{A}(s_0)) \cap \ker(\overline{A}'(s_0)) = [\beta'(s_0)]$ *для некоторого* $s_0 \in [a, b]$ *в том и только том случае, если* $\overline{A}$ *удовлетворяет условию* (9.57).

*Доказательство.* Предположим, что $v \in \ker(\overline{A}(s_0)) \cap \ker(\overline{A}'(s_0))$, $v \neq [\beta'(s_0)]$, а $Y$ — параллельный класс в $\mathfrak{X}(\beta)$, для которого $Y(s_0) = v$. Тогда $J = \overline{A}(Y)$ — якобиев класс, у которого $J(s_0) = \overline{A}(v) = [\beta'(s_0)]$ и $J'(s_0) = \overline{A}'(v) = [\beta'(s_0)]$. Следовательно, $J = [\beta']$. Откуда вытекает, что $Y(t) \in \ker(\overline{A}(t)) \cap \ker(\overline{A}'(t))$ для всех $t \in [a, b]$. □

Следующие две леммы нетрудно получить из тех связей между параллельными классами, якобиевыми классами и якобиевыми тензорами, которые указаны выше (см. Бёлтс (1977, с. 28 и 49)).

**Лемма 9.63.** *Точки* $\beta(t_0)$ *и* $\beta(t_1)$ *сопряжены вдоль изотропной геодезической* $\beta\colon [a, b] \to M$ *в том и только том случае, если существует якобиев тензор* $\overline{A}\colon G(\beta) \to G(\beta)$, *для которого* $\overline{A}(t_0) = 0$, $\overline{A}'(t_0) = \mathrm{id}$ *и* $\ker(\overline{A}(t_1)) \neq \{[\beta'(t_1)]\}$.

**Лемма 9.64.** *Пусть* $\beta\colon [a, b] \to M$ — *изотропная геодезическая без сопряженных точек. Тогда существует единственное гладкое* (1,1)*-тензорное поле* $\overline{A}\colon G(\beta) \to G(\beta)$, *удовлетворяющее дифференциальному уравнению* $\overline{A}'' + \overline{R}\overline{A} = 0$ *с заданными граничными условиями* $\overline{A}(a)\colon G(\beta(a)) \to G(\beta(a))$ *и* $\overline{A}(b)\colon G(\beta(b)) \to G(\beta(b))$.

*Доказательство.* Обозначим через $J$ пространство (1,1)-тензорных полей в $G(\beta)$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению $\overline{A}'' + \overline{R}\overline{A} = 0$. Тогда можно определить линейное отображение $\varphi$: $J \to L(G(\beta(a))) \times L(G(\beta(b)))$, полагая $\varphi(\overline{A}) = (\overline{A}(a), \overline{A}(b))$. Из того, что $\beta$: $[a, b] \to M$ свободна от сопряженных точек, вытекает инъективность $\varphi$. Поэтому, если $\varphi(\overline{A}) = (0, 0)$ и $Y$ — произвольный параллельный векторный класс в $\mathfrak{X}(\beta)$, то $J = \overline{A}(Y)$ — якобиев класс, у которого $J(a) = [\beta'(a)]$ и $J'(b) = [\beta'(b)]$, так что $J = [\beta']$. В силу того что $\varphi$ — инъективное линейное отображение и $\dim J = \dim(L(G(\beta(a))) \times L(G(\beta(b))))$, получаем биективность $\varphi$. □

Даже если $\overline{R} = \overline{R}^*$ и $(\overline{A}')^* = (\overline{A}^*)'$, тензор $\overline{A}^*$, сопряженный якобиеву тензору $A$, не обязательно сам якобиев вследствие того, что в общем случае $(\overline{R}\overline{A})^* \neq \overline{R}\overline{A}^*$, хотя всегда $(\overline{R}\overline{A})^* = \overline{A}^*\overline{R}$. Тем не менее якобиевы тензоры и сопряженные имеют следующее полезное свойство, которое удобно установить при помощи тензорного поля Вронского (см. Эшенбург и О'Салливэн (1976, с. 226), Бёлтс (1977, с. 48)).

**Определение 9.65.** Пусть $\overline{A}$ и $\overline{B}$ — два якобиевых тензора вдоль $G(\beta)$. Тогда их *вронскиан* $W(\overline{A}, \overline{B})$ — это (1,1)-тензорное поле вдоль $G(\beta)$, задаваемое по правилу

$$W(\overline{A}, \overline{B}) = (\overline{A}')^*\overline{B} - \overline{A}^*\overline{B}'. \tag{9.59}$$

Из того, что $\overline{R}^* = \overline{R}$, и равенств (9.51) и (9.56) вытекает, что если $\overline{A}$ и $\overline{B}$ — любые два якобиевых тензорных поля вдоль $G(\beta)$, то $[W(\overline{A}, \overline{B})]' = 0$. Тем самым $W(\overline{A}, \overline{B})$ является постоянным тензорным полем. Тогда естественно рассмотреть следующий подкласс якобиевых тензоров.

**Определение 9.66.** Якобиево тензорное поле $\overline{A}$ вдоль $G(\beta)$ называется *лагранжевым тензорным полем*, если $W(\overline{A}, \overline{A}) = 0$.

Для доказательства предложения 9.68 нам понадобится небольшое следствие из определения 9.66.

**Лемма 9.67.** *Пусть $\overline{A}$ — якобиев тензор вдоль $G(\beta)$. Если $\overline{A}(s_0) = 0$ для некоторого $s_0 \in [a, b]$, то $\overline{A}$ — лагранжев тензор и, в частности,*

$$(\overline{A}')^*\overline{A} = \overline{A}^*\overline{A}'. \tag{9.60}$$

*Доказательство.* Мы уже знаем, что $W(\overline{A}, \overline{A})$ — постоянный тензор. Но если $\overline{A}(s_0) = 0$, то и $\overline{A}^*(s_0) = 0$, и, следовательно, $W(\overline{A}, \overline{A})(s_0) = 0$. Поэтому $W(\overline{A}, \overline{A}) = 0$, как и требовалось. □

Теперь мы готовы доказать следующее важное утверждение.

**Предложение 9.68.** *Пусть* $\beta\colon [a, b] \to M$ — *изотропная геодезическая, свободная от точек, сопряженных* $t = a$. *Тогда* $\bar{I}(W, W) < 0$ *для всех* $W \in \mathfrak{X}_0(\beta)$, $W \neq [\beta']$.

*Доказательство.* Пусть $\bar{A}$ — якобиев тензор вдоль $G(\beta)$ с начальными условиями $\bar{A}(a) = 0$ и $\bar{A}'(a) = \mathrm{id}$. Из того, что $\beta$ не имеет сопряженных точек, в силу леммы 9.63 получаем, что $\ker(\bar{A}(t)) = \{[\beta'(t)]\}$ для всех $t \in (a, b]$.

Пусть теперь $W \in \mathfrak{X}_0(\beta)$ произвольно. Из того, что $\bar{A}$ — неособенный на $(a, b]$ и $W(a) = [\beta'(a)]$, вытекает существование $Z \in \mathfrak{X}(\beta)$ с условием $W = \bar{A}(Z)$. По правилу ковариантного дифференцирования тензорных полей получаем, что

$$\bar{A}(Z) = [\bar{A}(Z)]' - \bar{A}(Z') \tag{9.61}$$

и

$$\bar{A}''(Z) = (\bar{A}'(Z))' - \bar{A}'(Z'). \tag{9.62}$$

Приступим к вычислению $\bar{I}(W, W)$. Привлекая формулы (9.56) и (9.61), получим сначала

$$\begin{aligned}\bar{I}(W, W) &= -\int_a^b [\bar{g}(W', W') - \bar{g}(\bar{R}(W, \beta')\beta', W)]\,dt = \\ &= -\int_a^b [\bar{g}([\bar{A}(Z)]', [\bar{A}(Z)]') - g(\bar{R}\bar{A}(Z), \bar{A}(Z))]\,dt = \\ &= -\int_a^b [\bar{g}(\bar{A}'(Z), \bar{A}'(Z)) + 2\bar{g}(\bar{A}'(Z), \bar{A}(Z')) + \\ &\quad + \bar{g}(\bar{A}(Z'), \bar{A}(Z')) + \bar{g}(\bar{A}''(Z), A(Z))]\,dt.\end{aligned}$$

И далее

$$\begin{aligned}\bar{g}(\bar{A}''(Z), \bar{A}(Z)) &= \bar{g}([\bar{A}'(Z)]', \bar{A}(Z)) - \bar{g}(\bar{A}'(Z'), \bar{A}(Z)) = \\ &= [\bar{g}(\bar{A}'(Z), \bar{A}(Z))]' - \bar{g}(\bar{A}'(Z), [\bar{A}(Z)]') - \bar{g}(\bar{A}'(Z'), \bar{A}(Z)) = \\ &= [\bar{g}(\bar{A}'(Z), \bar{A}(Z))]' - \bar{g}(\bar{A}'(Z), \bar{A}(Z')) - \bar{g}(\bar{A}'(Z), \bar{A}'(Z)) - \\ &\quad - \bar{g}(\bar{A}'(Z'), \bar{A}(Z)).\end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в приведенную выше формулу для $\bar{I}(W, W)$, получим, что

$$\begin{aligned}\bar{I}(W, W) &= -\bar{g}(\bar{A}'(Z), \bar{A}(Z))|_a^b - \\ &\quad - \int_a^b [\bar{g}(\bar{A}(Z'), \bar{A}(Z')) + \bar{g}(\bar{A}'(Z), \bar{A}(Z')) - \\ &\quad - \bar{g}(\bar{A}'(Z'), \bar{A}(Z))]\,dt = -\bar{g}(A'(Z), W)|_a^b - \\ &\quad - \int_a^b [\bar{g}(\bar{A}(Z'), \bar{A}(Z')) + \bar{g}(\bar{A}^*\bar{A}'(Z), Z') - \bar{g}(Z', (\bar{A}')^*\bar{A}(Z))]\,dt.\end{aligned}$$

Первое слагаемое обращается здесь в нуль, поскольку $W(a) = [\beta'(a)]$ и $W(b) = [\beta'(b)]$. Поэтому, используя равенство (9.60), получаем

$$\bar{I}(W, W) = -\int_a^b \{\bar{g}(\bar{A}(Z'), \bar{A}(Z')) + \bar{g}([\bar{A}^*\bar{A}' - (\bar{A}')^*\bar{A}](Z), Z')\}\, dt =$$

$$= -\int_a^b \bar{g}(\bar{A}(Z'), \bar{A}(Z'))\, dt.$$

Если $Z'(t) = 0$ для всех $t$, то $Z$ параллельно вдоль $\beta$, и, значит, $W = \bar{A}(Z)$ должен быть якобиевым векторным классом вдоль $\beta$, для которого $W(a) = [\beta'(a)]$ и $W(b) = [\beta'(b)]$. Так как $\beta$ не имеет на $(a, b]$ сопряженных точек, это невозможно. Следовательно, из положительной определенности метрики $\bar{g}$ и невырожденности $\bar{A}(t)$ для $t \in (a, b]$ мы получаем, что $\bar{I}(W, W) < 0$, как и требовалось. □

Это предложение имеет хорошо известное в общей теории относительности геометрическое следствие: если $\beta\colon [a, b] \to M$ свободна от сопряженных точек, то никакая «малая» вариация не дает времениподобной кривой из $p$ в $q$ (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 130)).

Приступим к доказательству следующей теоремы.

**Теорема 9.69.** *Пусть* $\beta\colon [a, b] \to M$ — *изотропный геодезический сегмент. Тогда следующие высказывания эквивалентны*:

(а) $\beta$ *не имеет на* $(a, b]$ *сопряженных точек.*

(б) $\bar{I}(W, W) < 0$ *для всех* $W \in \mathfrak{X}_0(\beta)$, $W \neq [\beta']$.

*Доказательство.* В предложении 9.68 мы уже показали, что из (а) следует (б). Чтобы показать, что (б) влечет за собой (а), допустим, что точка $\beta(a)$ сопряжена $\beta(t_0)$, где $0 < t_0 \leqslant b$, и построим нетривиальный векторный класс $W \in \mathfrak{X}_0(\beta)$, для которого $\bar{I}(W, W) \geqslant 0$. Известно, что если $\beta(a)$ сопряжена $\beta(t_0)$, то существует нетривиальный якобиев класс $Z \in \mathfrak{X}(\beta)$, у которого

$$Z(a) = [\beta'(a)],\ Z(t_0) = [\beta'(t_0)].$$

Положим

$$W(t) = \begin{cases} Z(t), & a \leqslant t \leqslant t_0, \\ [\beta'(t)], & t_0 \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

Тогда, применяя формулу (9.45) и равенства $Z(a) = [\beta'(a)]$, $Z(t_0) = [\beta'(t_0)]$, получим, что

$$\bar{I}(W, W) = \bar{I}(W, W)_a^{t_0} + \bar{I}(W, W)|_{t_0}^b = -\bar{g}(Z', Z)|_a^{t_0} + 0 = 0.$$

Тем самым (б) $\Rightarrow$ (а) выполняется. □

Как и в римановом и времениподобном случаях (см. теорему 9.23), теорема 9.69 имеет приводимое ниже следствие, которое

существенно используется в доказательстве теоремы Морса об индексе для изотропных геодезических.

**Теорема 9.70.** (максимальность якобиевых классов). *Пусть* $\beta\colon [a, b] \to M$ — *изотропный геодезический сегмент без сопряженных точек и* $J \in \mathfrak{X}(\beta)$ — *произвольный якобиев класс. Тогда для любого векторного класса* $Y \in \mathfrak{X}(\beta)$, *удовлетворяющего условиям* $Y \neq J$ *и*

$$Y(a) = J(a),\ Y(b) = J(b), \tag{9.63}$$

*имеем*

$$\bar{I}(J, J) > \bar{I}(Y, Y). \tag{9.64}$$

*Доказательство.* Сформулированное утверждение можно доказать в точности так же, как и теорему 9.23; достаточно применить формулу (9.45) и теорему 9.69.

Поскольку каноническая вариация (9.5) из разд. 9.1, примененная к векторному полю $W \in V^{\perp}(\beta)$, *не* обязательно является допустимой вариацией $\beta$ в смысле определения 9.58, теорема 9.69 *не* гарантирует существования времениподобной кривой из $\beta(a)$ в $\beta(b)$ в том случае, если $t = a$ сопряжена некоторой $t_0 \in (a, b)$ вдоль $\beta$. Поэтому мы приведем отдельное доказательство этого результата в теореме 9.72 (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 130—131), Бёлтс (1977, с. 117—121)). Сначала полезно получить условия того, чтобы собственная вариация изотропной геодезической была допустимой. Для удобства будем предполагать, что $\beta\colon [0, 1] \to M$, так что формулы в доказательстве теоремы 9.72 будут попроще.

Пусть $\alpha\colon [0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ — кусочно-гладкая допустимая собственная вариация $\beta$, такая, что каждая соседняя кривая $\alpha_s(t) = \alpha(t, s)$ является в будущем времениподобной для $s \neq 0$. Обозначим через $\partial/\partial t$ и $\partial/\partial s$ координатные векторные поля на $[0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ и положим $V = \alpha_*(\partial/\partial s)$ и $T = \alpha_*(\partial/\partial t)$. Тогда $T|_{(t,0)} = \beta'(t)$ и $V|_{(t,0)}$ называется *векторным полем вариации* $\alpha$ геодезической $\beta$. Ввиду того что $\alpha$ — собственная вариация, $V|_{(0,0)} = V|_{(1,0)}$. Кроме того,

$$\frac{d}{ds}(g(T, T))|_{(t,0)} = 0 \tag{9.65}$$

вследствие того, что $g(T, T)|_{(t,s)} < 0$ для $s \neq 0$ и $g(T, T)|_{(t,0)} = g(\beta'(t), \beta'(t)) = 0$. Вычисляя $\frac{d}{ds}(g(T, T))$, получаем

$$\frac{d}{ds}(g(T, T))|_{(t,0)} = 2g(\nabla_{\partial/\partial s}T, T)|_{(t,0)} = 2g(\Delta_{\partial/\partial t}V, T)|_{(t,0)} =$$

$$= 2\frac{d}{dt}(g(V, T))|_{(t,0)} - 2g(V, \nabla_{\partial/\partial t}T)|_{(t,0)} =$$

$$= 2\frac{d}{dt}(g(V, T))|_{(t,0)} - 2g(V|_{(t,0)}, \nabla_{\partial/\partial t}\beta'|_t).$$

Так как $\beta$ — геодезическая, то

$$\frac{d}{ds}(g(T, T))|_{(t, 0)} = 2\frac{d}{dt}(g(V, T))|_{(t, 0)}.$$

Функция $f(t) = g(V, T)|_{(t, 0)}$ является кусочно-гладкой на $[0, 1]$ и $f(0) = f(1) = 0$. Значит, если $f(t) \neq 0$ для некоторого $t \in \in [0, 1]$, то существует точка $t_0 \in (0, 1)$, в которой $f'(t_0) > 0$. Тогда

$$\frac{d}{ds}(g(T, T))|_{(t_0, 0)} = 2f'(t_0) > 0$$

в противоречии с равенством (9.65). Тем самым в качестве первого необходимого условия того, чтобы $\alpha$ была допустимой вариацией геодезической $\beta$, получаем, что

$$g(V, T)|_{(t, 0)} = 0 \tag{9.66}$$

для всех $t \in [0, 1]$. Поэтому $V \in V^{\perp}(\beta)$. Следовательно,

$$\frac{d}{ds}(g(T, T))|_{(t, 0)} = 2\frac{d}{dt}(g(V, T))|_{(t, 0)} = 0 \tag{9.67}$$

для всех $t \in [0, 1]$. Из соотношения (9.67) вытекает, что соседние кривые вариации должны быть времениподобными при условии, что поле вариации удовлетворяет равенствам (9.66), (9.67) и условию $(d^2/ds^2)(g(T, T))|_{(t, 0)} < -c < 0$ для всех $t \in (0, 1)$. Как и выше,

$$\frac{d}{ds}(g(T, T)) = 2\frac{d}{dt}(g(V, T)) - 2g(V, \nabla_{\partial/\partial t}T).$$

Следовательно,

$$\frac{d^2}{ds^2}(g(T, T))|_{(t, 0)} = 2\frac{d}{ds}\left[\frac{d}{dt}(g(V, T))\right]\Big|_{(t, 0)} -$$
$$- 2\frac{d}{ds}(g(V, \nabla_{\partial/\partial t}T))|_{(t, 0)} = 2\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{ds}g(V, T)\right]\Big|_{(t, 0)} -$$
$$- 2g(\nabla_{\partial/\partial s}V, \nabla_{\partial/\partial t}T)|_{(t, 0)} - 2g(V, \nabla_{\partial/\partial s}\nabla_{\partial/\partial t}T)|_{(t, 0)}.$$

Используя тождество $R(V, T)T = \nabla_{\partial/\partial s}\nabla_{\partial/\partial t}T - \nabla_{\partial/\partial t}\nabla_{\partial/\partial s}T = \nabla_{\partial/\partial s}\nabla_{\partial/\partial t}T - \nabla_{\partial/\partial t}\nabla_{\partial/\partial t}V$ и равенства $\nabla_{\partial/\partial t}T|_{(t, 0)} = \nabla_{\partial/\partial t}\beta'|_t = 0$, получим, что

$$\frac{d^2}{ds^2}(g(T, T))|_{(t, 0)} = 2\frac{d}{dt}[g(\nabla_{\partial/\partial s}V, T) + g(V, \nabla_{\partial/\partial s}T)]|_{(t, 0)} -$$
$$- 2g(V, \nabla_{\partial/\partial t}\nabla_{\partial/\partial t}V + R(V, T)I)|_{(t, 0)} = 2\frac{d}{dt}[g(\nabla_{\partial/\partial s}V, T) +$$
$$+ g(V, \nabla_{\partial/\partial t}V)]|_{(t, 0)} - 2g(V, \nabla_{\partial/\partial s}\nabla_{\partial/\partial t}T)|_{(t, 0)}.$$

Проведенные вычисления позволяют сформулировать следующую лемму.

**Лемма 9.71.** *Достаточное условие того, чтобы кусочно-гладкая вариация* $\alpha$: $[0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ *изотропной геодезической* $\beta$: $[0, 1] \to M$ *была допустимой вариацией (т. е. кривые* $\alpha_s(t) = \alpha(t, s)$ *временимодобны при* $s \neq 0$*) для всех достаточно малых* $s \neq 0$, *состоит в том, что векторное поле вариации* $V(t) = \alpha_*(\partial/\partial s)|_{(t, 0)}$ *удовлетворяет следующим соотношениям*:

$$g(V(t), \beta'(t)) = 0 \text{ для всех } t \in [0, 1], \tag{9.68}$$

$$\frac{d}{ds}(g(T, T))|_{(t, 0)} = 0 \text{ для всех } t \in [0, 1], \tag{9.69}$$

$$\frac{d}{dt}(g(\nabla_{\partial/\partial s}V, \beta') + g(V, V'))|_{(t, 0)} - g(V, V'' + R(V, \beta')\beta')|_t < -c < 0 \tag{9.70}$$

*для всех* $t \in (0, 1)$, *в которых* $V$ *является гладким.*

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы доказать требуемый результат (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 130)).

**Теорема 9.72.** *Пусть* $\beta$: $[0, 1] \to M$ — *изотропная геодезическая. Если для некоторого* $t_0 \in (0, 1)$ *точка* $\beta(t_0)$ *сопряжена* $\beta(0)$ *вдоль* $\beta$, *то существует временимодобная кривая из* $\beta(0)$ *в* $\beta(1)$.

*Доказательство.* Будем предполагать, что $t_0 > 0$ — первая точка, сопряженная $\beta(0)$ вдоль $\beta$. Достаточно показать, что для некоторого $t_2$, подчиненного условию $t_0 < t_2 \leqslant 1$, существует направленная в будущее временимодобная кривая, идущая из $\beta(0)$ в $\beta(t_2)$, так как тогда мы имеем: $\beta(0) \ll \beta(t_2) \ll \beta(1)$ и, значит, $\beta(0) \ll \beta(1)$. Таким образом, временимодобная кривая из $\beta(0)$ в $\beta(1)$ существует.

Поскольку точка $\beta(t_0)$ сопряжена $\beta(0)$ вдоль $\beta$, существует гладкий нетривиальный якобиев класс $W \in \mathfrak{X}(\beta)$, для которого $W(0) = [\beta'(0)]$ и $W(t_0) = [\beta'(t_0)]$. Справедлива следующая формула:

$$W(t) = f(t)\widehat{W}(t), \tag{9.71}$$

где $\widehat{W}$ — гладкий векторный класс вдоль $\beta$ с условием, что $\bar{g}(\widehat{W}, \widehat{W}) = 1$ и $f$: $[0, 1] \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Ввиду того что $t_0$ — первая сопряженная точка вдоль $\beta$ и $f(0) = f(t_0) = 0$, изменяя, если необходимо, $\widehat{W}$ на $-\widehat{W}$, можно считать, что $f(t) > 0$ для всех $t \in (0, t_0)$. Из того, что $W$ — нетривиальный якобиев класс и $W(t_0) = [\beta'(t_0)]$, имеем $W'(t_0) \neq [\beta'(t_0)]$. Поэтому из формулы $W'(t_0) = f'(t_0)\widehat{W}(t_0) + f(t_0)\widehat{W}'(t_0) = f'(t_0)\widehat{W}(t_0)$ вытекает, что $f'(t_0) \neq 0$. Таким образом, можно выбрать $t_1 \in (t_0, 1]$ так, что $W(t) \neq [\beta'(t)]$ и $f(t) < 0$ для всех $t \in (t_0, t_1]$.

Покажем теперь, что существует $t_2 \in (t_0, t_1]$, где $t_1$ выбрано выше, для которого можно найти допустимую вариацию $\alpha$: $[0,$

$t_2] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ геодезической $\beta \mid [0, t_2]$. Тогда соседние кривые $\alpha_s$ вариации $\alpha$ для $s \neq 0$ будут времениподобными кривыми из $\beta(0)$ в $\beta(t_2)$. Но это означает, что $\beta(0) \ll \beta(1)$, как и требовалось. Продеформируем для этого $\overline{W} \mid [0, t_1]$ в векторный класс $\overline{Z} \mid [0, t_2]$, удовлетворяющий условию $\overline{g}(\overline{Z}, \overline{Z}'' + \overline{R}(\overline{Z}, \beta')\beta') > 0$, так, что если $Z \in V^\perp(\beta)$ — соответствующее поднятие $\overline{Z} \in \mathfrak{X}(\beta \mid [0, t_2])$ и $\alpha$ — вариация геодезической $\beta \mid [0, t_2]$ с векторным полем вариации $Z$, то условия (9.69) и (9.70) леммы 9.71 будут выполнены.

Рассмотрим векторный класс вида

$$\overline{Z}(t) = [b(e^{at} - 1) + f(t)]\, \widehat{W}(t),$$

где $b = -f(t_1)(e^{at_1} - 1)^{-1} \in \mathbb{R}$ и $a > 0$ выбрано в $\mathbb{R}$ так, что $(a^2 + \inf\{h(t) : t \in [0, t_1]\}) > 0$, где

$$h(t) = \overline{g}(\widehat{W}'' + \overline{R}(\widehat{W}, \beta')\beta', \widehat{W})|_t.$$

Так как $\overline{W}$ — якобиев класс, то

$$0 = \overline{g}(\overline{W}'' + \overline{R}(\overline{W}, \beta')\beta', \widehat{W}) = f'' + 2f'\overline{g}(\widehat{W}', \widehat{W}) + f\overline{g}(\widehat{W}'', \widehat{W}) + \\ + f\overline{g}(\overline{R}(\widehat{W}, \beta')\beta', \widehat{W}) = f'' + 2f'\overline{g}(\widehat{W}', \widehat{W}) + fh.$$

Из того, что $\overline{g}(\widehat{W}', \overline{W}) = (1/2)(g(\widehat{W}, \widehat{W}))' = 0$, получаем формулу $f'' = -fh$. Возвращаясь к рассмотрению векторного класса $\overline{Z}$, заметим сначала, что за счет выбора постоянных $a$ и $b$ выполнены равенства $\overline{Z}(0) = [\beta'(0)]$ и $\overline{Z}(t_1) = [\beta'(t_1)]$. Ввиду формулы (9.70) хотелось бы иметь также $\overline{g}(\overline{Z}, \overline{Z}'' + \overline{R}(\overline{Z}, \beta')\beta') > 0$. Полагая $r(t) = b(e^{at} - 1) + f(t)$, вспоминая, что $\overline{g}(\widehat{W}', \widehat{W}) = 0$, и дифференцируя, получаем, что $\overline{g}(\overline{Z}, \overline{Z}'' + \overline{R}(\overline{Z}, \beta')\beta') = r(r'' + rh) = r[be^{at}(a^2 + h) - bh + f'' + fh]$. Из равенства $f'' = -fh$ вытекает, что

$$\overline{g}(\overline{Z}, \overline{Z}'' + \overline{R}(\overline{Z}, \beta')\beta')\mid_t = r(t)\, b\, \{e^{at}[a^2 + h(t)] - h(t)\}.$$

Так как $f(t_1) < 0$, то $b = -f(t_1)(e^{at_1} - 1) > 0$. Поэтому выражение $b\{e^{at}[a^2 + h(t)] - h(t)\} > 0$ для всех $t \in [0, t_1]$. Таким образом, $\overline{g}(\overline{Z}, \overline{Z}'' + \overline{R}(\overline{Z}, \beta')\beta')|_t > 0$ при условии, что $r(t) > 0$. Ввиду того что $f(t) > 0$ для $t \in (0, t_0)$, имеем $r(t) > 0$, где $t \in (0, t_0]$. В силу непрерывности существует такое $t_2 > t_0$, что $r(t) > 0$ для $t \in [t_0, t_2)$ и $r(t_2) = 0$. Если $t_2 \geqslant t_1$, то фактически $t_2 = t_1$ вследствие того, что $r(t_1) = 0$ по построению. Поэтому ниже мы будем предполагать, что $t_2 = t_1$. Если $t_2 < t_1$, то векторный класс $\overline{Z} \mid [0, t_2]$ будет удовлетворять условию $\overline{Z}(t_2) = [\beta'(t_2)]$ ввиду того, что $r(t_2) = 0$ и, кроме того, $\overline{g}(\overline{Z}, \overline{Z}'' + \overline{R}(\overline{Z}, \beta')\beta')|_t > 0$ для всех $t \in (0, t_2)$. Далее будем рассматривать $\beta \mid [0, t_2]$.

Пусть $\tilde{Z} \in V^{\perp}(\beta \mid [0, t_2])$ удовлетворяет условию $\pi(\tilde{Z}) = \overline{Z}$. Из того, что $\overline{Z}(0) = [\beta'(0)]$, $\overline{Z}(t_2) = [\beta'(t_2)]$, имеем $\tilde{Z}(0) = \mu\beta'(0)$ и $\tilde{Z}(t_2) = \lambda\beta'(t_2)$ для некоторых постоянных $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. Положим $Z = \tilde{Z} - \mu\beta' + [(\mu - \lambda)/t_2]\, t\beta'$. Тогда $Z(0) = Z(t_2) = 0$ и $\pi(Z) = \overline{Z}$. Следовательно,

$$g(Z'' + R(Z, \beta')\beta', Z)|_t = \overline{g}(\overline{Z}'' + \overline{R}(\overline{Z}, \beta')\beta', \overline{Z})|_t > 0. \tag{9.72}$$

для всех $t \in (0, t_2)$. Выберем постоянную $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$\varepsilon < \inf\left\{g(Z''(t) + R(Z(t), \beta'(t))\beta'(t), Z(t)):\ t \in \left[\frac{t_2}{4}, \frac{3t_2}{4}\right]\right\}, \tag{9.73}$$

что возможно ввиду неравенства (9.72). Определим теперь функцию $\rho$: $[0, t_2] \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\rho(t) = \begin{cases} -\varepsilon t, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{t_2}{4}, \\ \varepsilon\left(t - \frac{t_2}{2}\right), & \frac{t_2}{4} \leqslant t \leqslant \frac{3t_2}{4}, \\ \varepsilon(t_2 - t), & \frac{3t_2}{4} \leqslant t \leqslant t_2. \end{cases}$$

Итак, у нас теперь есть заданное векторное поле $Z \in V_0^{\perp}(\beta \mid [0, t_2])$ и заданная функция $\rho$: $[0, t_2] \to \mathbb{R}$. Напомним, что в формуле (9.28) мы зафиксировали псевдоортонормированное поле реперов $E_1, \ldots, E_{n-2}$ для $\beta$. Теперь нам необходимо найти собственную вариацию $\alpha$: $[0, t_2] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ геодезической $\beta \mid [0, t_2]$, удовлетворяющую начальным условиям

$$\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{(t,\,0)} = Z(t) \tag{9.74}$$

и

$$\nabla_{\partial/\partial s}\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{(t,\,0)} = [g(Z, Z')|_t - \rho(t)]\,\eta(t) \tag{9.75}$$

для всех $t \in [0, t_2]$. Поэтому хотелось бы определить первую и вторую производные кривых $s \to \alpha(t, s)$ для каждого $t \in [0, t_2]$. Существование такой деформации гарантируется теорией дифференциальных уравнений, примененной к соотношениям (9.74) и (9.75), выписанных в координатах Ферми для геодезической $\beta$, определяемых псевдоортонормированным репером $E_1, \ldots, E_{n-2}$, $\eta$, $\beta'$.

Для заданной собственной вариации $\alpha$ геодезической $\beta \mid [0, t_2]$, удовлетворяющей условиям (9.74) и (9.75), полагая $T = \alpha_*(\partial/\partial t)$ и $V = \alpha_*(\partial/\partial s)$, как и выше, получаем

$$g(\nabla_{\partial/\partial s}V, \beta')|_{(t,\,0)} + g(V, V')|_{(t,\,0)} = \rho(t).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(g(\nabla_{\partial/\partial s}V,\ \beta') + g(V,\ V'))|_{(t,\ 0)} = \rho'(t) = \begin{cases} -\varepsilon, & 0 \leqslant t < \frac{t_2}{4}, \\ +\varepsilon, & \frac{t_2}{4} \leqslant t \leqslant \frac{3t_2}{4}, \\ -\varepsilon, & \frac{3t_2}{4} < t \leqslant t_2. \end{cases}$$

Поэтому в силу условия (9.73) вариация $\alpha$ геодезической $\beta\,|\,[0,\ t_2]$ удовлетворяет условию (9.70) леммы 9.71. Применяя эту лемму, находим, что эта вариация дает времениподобные кривые $\alpha_s$ из $\beta(0)$ в $\beta(t_2)$ для малых $s \neq 0$, как и требовалось. □

**Следствие 9.73.** *Точка изотропного раздела геодезической* $\beta$: $[0,\ a) \to M$ *появляется одновременно с первой изотропно сопряженной точкой или раньше.*

Наконец мы подготовлены к тому, чтобы обратиться к доказательству теоремы Морса об индексе для изотропных геодезических. Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы Морса о времениподобном индексе, теорема 9.27. Учитывая утверждение теоремы 9.69, индекс $\mathrm{Ind}(\beta)$ и квазииндекс $\mathrm{Ind}_0(\beta)$ геодезической $\beta$ относительно индексной формы $\bar{L}$: $\mathfrak{X}_0(\beta) \times \mathfrak{X}_0(\beta) \to \mathbb{R}$ следует определить так.

**Определение 9.74.** *Индекс* $\mathrm{Ind}(\beta)$ и *квазииндекс* $\mathrm{Ind}_0(\beta)$ геодезической $\beta$ относительно индексной формы $\bar{I}$: $\mathfrak{X}_0(\beta) \times \mathfrak{X}_0(\beta) \to \mathbb{R}$ задается по правилам

$\mathrm{Ind}(\beta) = \sup\{\dim A$: $A$ — подпространство $\mathfrak{X}_0(\beta)$ и форма $\bar{I}\,|\,A\times A$ положительно определена$\}$

и

$\mathrm{Ind}_0(\beta) = \sup\{\dim A$: $A$ — подпространство $\mathfrak{X}_0(\beta)$ и форма $\bar{I}\,|\,A\times A$ положительно полуопределена$\}$ соответственно.

В качестве первого шага на пути к доказательству теоремы об изотропном индексе нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 9.75.** *Если* $\beta\,|\,[s,\ t]$ *свободна от сопряженных точек, то для любых заданных* $\bar{v} \in G(\beta(s))$ и $\bar{w} \in G(\beta(t))$ *существует единственный якобиев класс* $Z \in \mathfrak{X}(\beta)$, *для которого* $Z(s) = \bar{v}$ *и* $Z(t) = \bar{w}$.

*Доказательство.* Пусть $\bar{v} \in V(\beta,\ (s))$ и $\bar{w} \in V(\beta(t))$ удовлетворяют условиям $\pi(v) = \bar{v}$ и $\pi(w) = \bar{w}$. Так как сопряженные точки по предположению отсутствуют, то найдется единственное якобиево поле $J \in V^{\perp}(\beta)$, для которого $J(s) = v$ и $J(t) = w$. Тогда $Z = \pi(J)$ — якобиев класс в $\mathfrak{X}(\beta)$, такой, что $Z(s) = \bar{v}$ и $Z(t) = \bar{w}$.

Предположим теперь, что $Z_1$ — второй якобиев класс в $\mathfrak{X}(\beta)$, удовлетворяющий условиям $Z_1(s) = \bar{v}$ и $Z_1(t) = \bar{w}$. Согласно лемме 9.51, существует якобиево поле $J_1 \in V^{\perp}(\beta)$, для которого $\pi(J_1) = Z_1$. Из соотношений $Z_1(s) = \bar{v}$ и $Z_1(t) = \bar{w}$ вытекает, что $J_1(s) = v + c_1\beta'(s)$ и $J_1(t) = w + c_2\beta'(t)$ для некоторых постоянных $c_1$, $c_2 \in \mathbb{R}$. Непосредственными вычислениями нетрудно убедиться в том, что существуют постоянные $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$, такие, что якобиево поле $J_2(\tau) = J_1(\tau) + \lambda\beta'(\tau) + \mu\tau\beta'(\tau) \in V^{\perp}(\beta)$ удовлетворяет условиям $J_2(s) = v$ и $J_2(t) = w$. В силу предположения об отсутствии сопряженных точек $J_2 = J$. Но это означает, что $Z = \pi(J) = \pi(J_2) = Z_1$, как и требовалось. □

Теперь мы подготовлены к доказательству того, что индекс и квазииндекс конечны.

**Предложение 9.76.** *Индекс* $\mathrm{Ind}(\beta)$ *и квазииндекс* $\mathrm{Ind}_0(\beta)$ *конечны и связаны равенством* $\mathrm{Ind}_0(\beta) = \mathrm{Ind}(\beta) + \dim \overline{J}_b(\beta)$.

*Доказательство.* Выберем конечное разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ заданной изотропной геодезической $\beta: [a, b] \to M$ так, чтобы каждый частичный геодезический сегмент $\beta \mid [t_j, t_{j+1}]$ был свободен от сопряженных точек. Обозначим через $\overline{J}\{t_j\}$ линейное пространство непрерывных векторных классов $W$ вдоль $\beta$, таких, что $W \mid [t_j, t_{j+1}]$ — гладкий якобиев класс. Непосредственно из установленной в лемме 9.75 единственности вытекает, что пространство $\overline{J}\{t_j\}$ конечномерно. Тогда по аналогии с римановой теорией индекса и с лоренцевой теорией времениподобного индекса можно определить конечномерную аппроксимацию $\varphi: \mathfrak{X}_0(\beta) \to \overline{J}\{t_j\}$. Именно для данного $W \in \mathfrak{X}_0(\beta)$ определим кусочно-гладкий якобиев класс $\varphi(W)$ в $\overline{J}\{t_j\}$ следующим образом: для каждого $j$ векторный класс $\varphi(W) \mid [t_j, t_{j+1}]$ является единственным якобиевым классом в $\beta \mid [t_j, t_{j+1}]$, у которого $\varphi(W)(t_j) = W(t_j)$ и $\varphi(W)(t_{j+1}) = W(t_{j+1})$. Тогда $\varphi \mid \overline{J}\{t_j\} = \mathrm{id}$, и соотношение (9.64), примененное к каждому частичному отрезку $[t_j, t_{j+1}]$, приводит к неравенству

$$\bar{I}(\varphi(W), \varphi(W)) > \bar{I}(W, W), \tag{9.76}$$

если $W \in \mathfrak{X}_0(\beta)$, $W \notin \overline{J}\{t_j\}$. Используя неравенство (9.76), можно показать так же, как и в доказательстве леммы 9.26 разд. 9.1, что

Если $A$ — подпространство $\mathfrak{X}_0(\beta)$, на котором форма $\bar{I} \mid A \times A$ положительно полуопределена, то отображение $\varphi: A \to \overline{J}\{t_j\}$ инъективно. (9.77)

Пусть $\mathrm{Ind}'(\beta)$ и $\mathrm{Ind}'_0(\beta)$ — соответственно индекс и квазииндекс индексной формы $\bar{I}\colon \bar{J}\{t_j\} \times \bar{J}\{t_j\} \to \mathbb{R}$, ограниченной на $\bar{J}\{t_j\}$. Допустим, что $A$ — подпространство $\mathfrak{X}_0(\beta)$, на котором форма $\bar{I}|A \times A$ положительно полуопределена. Применяя неравенство (9.76), легко убедиться в том, что форма $\bar{I}\colon \bar{J}\{t_j\} \times \times \bar{J}\{t_j\} \to \mathbb{R}$ положительно полуопределена на подпространстве $\varphi(A)$ из $\bar{J}\{t_j\}$. Согласно свойству (9.77), $\dim A = \dim \varphi(A)$. Следовательно, $\mathrm{Ind}'_0(\beta) \geqslant \mathrm{Ind}_0(\beta)$. С другой стороны, так как $\bar{J}\{t_j\} \subset \mathfrak{X}_0(\beta)$, то $\mathrm{Ind}'_0(\beta) \leqslant \mathrm{Ind}_0(\beta)$. Таким образом, $\mathrm{Ind}'_0(\beta) = \mathrm{Ind}_0(\beta)$. Аналогично доказывается равенство $\mathrm{Ind}'(\beta) = \mathrm{Ind}(\beta)$. Поскольку $\bar{J}\{t_j\}$ конечномерно, из этих равенств следует конечнозначность $\mathrm{Ind}(\beta)$ и $\mathrm{Ind}_0(\beta)$.

Остается показать, что $\mathrm{Ind}_0(\beta) = \mathrm{Ind}(\beta) + \dim \bar{J}_b(\beta)$. Выберем для этого второе конечное разбиение $a = s_0 < s_1 < \ldots < s_{l-1} < s_l = b$ так, чтобы $\{s_1, \ldots, s_{l-1}\} \cap \{t_1, \ldots, t_{k-1}\} = \varnothing$ и для каждого $i$ геодезическая $\beta \mid [s_i, s_{i+1}]$ не имела сопряженных точек. Тогда $\bar{J}\{s_i\} \cap \bar{J}\{t_j\} = \bar{J}_b(\beta)$. Поэтому, если $X \in \bar{J}\{s_i\}$, $X \notin J_b(\beta)$, то из неравенства (9.76) вытекает, что

$$\bar{I}(\varphi(X), \varphi(X)) > \bar{I}(X, X). \tag{9.78}$$

Согласно первой части доказательства этого предложения, примененной к разбиению $\{s_i\}$, и связанному с ним конечномерному линейному пространству $\bar{J}\{s_i\}$, можно в $\bar{J}\{s_i\}$ выбрать линейное подпространство $B'_0$ так, что форма $\bar{I} \mid B'_0 \times B'_0$ будет положительно полуопределена и $\mathrm{Ind}_0(\beta) = \dim B'_0 < \infty$. Заметим, что $\bar{J}_b(\beta)$ должно быть подпространством пространства $B'_0$. Если бы это было не так, то существовало бы нетривиальное линейное подпространство $V \subset \bar{J}_b(\beta)$, для которого $V \cap B'_0 = \{[\beta']\}$. Тогда $B''_0 = B'_0 \oplus V$ было бы подпространством пространства $\bar{J}\{s_i\}$, на котором форма $\bar{I} \mid B''_0 \times B''_0$ была бы положительно полуопределена. Но $\dim B''_0 > \dim B'_0$, что противоречит нашему выбору $B'_0$.

Если рассматривать $B'_0$ как подпространство $\mathfrak{X}_0(\beta)$, то из свойства (9.77) можно заключить, что $\varphi \mid B'_0\colon B'_0 \to \bar{J}\{t_j\}$ инъективно. Поэтому, если положить $B_0 = \varphi(B'_0)$, то получим, что $\dim B_0 = \dim B'_0 = \mathrm{Ind}_0(\beta)$. Из того, что $\varphi \mid \bar{J}_b(\beta) = \mathrm{id}$, имеем также, что $\bar{J}_b(\beta)$ — подпространство $B_0$. Выберем линейное подпространство $B$ пространства $B_0$ так, чтобы $B_0 = B \oplus \bar{J}_b(\beta)$. Используя неравенство (9.78), можно доказать в точности так же, как и при доказательстве предложения 9.22 из разд. 9.1, что

форма $\bar{I} \mid B \times B$ положительно определена. Следовательно, $\operatorname{Ind}'(\beta) \geqslant \dim B$.

Но $\operatorname{Ind}_0(\beta) = \operatorname{Ind}_0'(\beta) = \dim B_0 = \dim B + \dim \bar{J}_b(\beta)$. Поэтому доказательство будет завершено, если мы покажем, что $\operatorname{Ind}'(\beta) \leqslant \dim B$. Предположим, что $B'$ — подпространство $\bar{J}\{t_j\}$, для которого форма $\bar{I} \mid B' \times B'$ положительно определена и $B' \cap \bar{J}_b(\beta) = \{[\beta']\}$. Так как форма $\bar{I} \mid B' \times B'$ положительно определена, то $\operatorname{Ind}'(\beta) = \dim B' > \dim B$. Следовательно, форма $\bar{I}$ на прямой сумме $B' \oplus \bar{J}_b(\beta)$ является положительно полуопределенной, так что $\dim B' + \dim \bar{J}_b(\beta) \leqslant \operatorname{Ind}_0'(\beta)$. С другой стороны, $\dim B' + \dim \bar{J}_b(\beta) > \dim B + \dim \bar{J}_b(\beta) = \operatorname{Ind}_0'(\beta)$, что противоречит предыдущему неравенству. Таким образом, $\operatorname{Ind}'(\beta) \leqslant \dim B$, как и требовалось. Доказательство предложения завершено. □

Теперь после того, как предложение 9.76 доказано, непосредственно видно, что доказательство теоремы 9.27 из разд. 9.1 применимо к индексной форме $\bar{I}$: $G(\beta) \times G(\beta) \to \mathbb{R}$ и спроектированной положительно определенной метрике $\bar{g}$, что дает равенства

$$\operatorname{Ind}(\beta) = \sum_{t \in (a, b)} \dim \bar{J}_t(\beta)$$

и

$$\operatorname{Ind}_0(\beta) = \sum_{t \in (a, b]} \dim \bar{J}_t(\beta).$$

Поскольку $\dim \bar{J}_t(\beta) = \dim J_t(\beta)$ согласно следствию 9.55, мы убедились таким образом в справедливости следующей теоремы Морса об индексе для изотропных геодезических.

**Теорема 9.77.** *Пусть* $\beta$: $[a, b] \to M$ — *изотропная геодезическая в произвольном пространстве-времени. Пусть* $\bar{I}$: $\mathfrak{X}_0(\beta) \times \mathfrak{X}_0(\beta) \to \mathbb{R}$ — *индексная форма на кусочно-гладких сечениях факторрасслоения* $G(\beta)$, *определенная формулой* (9.42). *Тогда* $\beta$ *имеет лишь конечное число сопряженных точек и индекс* $\operatorname{Ind}(\beta)$ *и квазииндекс* $\operatorname{Ind}_0(\beta)$ *формы* $\bar{I}$: $\mathfrak{X}_0(\beta) \times \mathfrak{X}_0(\beta) \to \mathbb{R}$ *связаны с геодезическим индексом изотропной геодезической* $\beta$ *по формулам*

$$\operatorname{Ind}(\beta) = \sum_{t \in (a, b)} \dim J_t(\beta)$$

*и*

$$\operatorname{Ind}_0(\beta) = \sum_{t \in (a, b]} \dim J_t(\beta),$$

*где* $J_t(\beta)$ — *линейное пространство якобиевых полей* $Y$ *вдоль* $\beta$, *удовлетворяющих условию* $Y(a) = Y(b) = 0$.

Глава 10

# НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ГЛОБАЛЬНОЙ ЛОРЕНЦЕВОЙ ГЕОМЕТРИИ

В этой главе мы применим технику, развитую в предыдущих главах, к доказательству лоренцевых аналогов двух замечательных результатов глобальной римановой геометрии. Первый из них, теорема Бонне — Майерса о диаметре, утверждает, что если полное риманово многообразие $N$ имеет всюду положительную отделенную от нуля кривизну Риччи, то $N$ компактно, имеет конечный диаметр и конечную фундаментальную группу. Второй результат, теорема Адамара — Картана, состоит в том, что если полное риманово многообразие имеет всюду неположительную секционную кривизну, то его универсальное накрывающее многообразие диффеоморфно $\mathbb{R}^n$ и, значит, высшие группы гомотопии $\pi_i(N, *) = 0$, где $i \geqslant 2$. Кроме того, универсальное накрывающее пространство с римановой метрикой расслоенного произведения имеет следующее свойство: любые две точки можно соединить ровно одной (с точностью до перепараметризации) геодезической.

В разд. 10.1 мы рассмотрим лоренцев аналог теоремы Бонне — Майерса и в ходе этого рассмотрения изучим времениподобный диаметр пространства-времени. *Времениподобный диаметр* $\operatorname{diam}(M, g)$ пространства-времени $(M, g)$ задается формулой

$$\operatorname{diam}(M, g) = \sup \{d(p, q): p, q \in M\}.$$

Классы пространств с конечным времениподобным диаметром, включая «вселенные Уилера», уже изучались в общей теории относительности (см. Типлер (1977в, с. 500)).

Если полное риманово многообразие имеет конечный диаметр, то по теореме Хопфа — Ринова оно компактно. И как следствие метрической полноты все геодезические имеют *бесконечную* длину. Но для пространства-времени $(M, g)$, поскольку $L(\gamma) \leqslant d(p, q)$ для всех направленных в будущее непространственноподобных кривых $\gamma$, идущих из $p$ в $q$, каждая времениподобная геодезическая должна удовлетворять неравенству $L(\gamma) \leqslant \operatorname{diam}(M, g)$. Поэтому, если пространство-время имеет конечный времениподобный диаметр, то все времениподобные геодезические имеют конечную длину и, значит, неполны. В частности,

пространство-время $(M, g)$ с конечным времениподобным диаметром является времениподобно геодезически неполным.

Ввиду того что мы используем для лоренцевой метрики соглашение $(-, +, \ldots, +)$ (а не $(+, -, \ldots, -)$), условия положительности (соответственно отрицательности) секционной кривизны для римановых многообразий переходят в условия отрицательности (соответственно положительности) времениподобной секционной кривизны для лоренцевых многообразий.

Используя теорию о времениподобном индексе, развитую в разд. 9.1, получим следующий лоренцев аналог теоремы Бонне — Майерса для полных римановых многообразий. Пусть $(M, g)$ — глобально гиперболическое пространство-время, в котором либо (а) все непространственноподобные кривизны Риччи положительны и отделены от нуля, либо (б) все времениподобные секционные кривизны отрицательны и отделены от нуля. Тогда $(M, g)$ имеет конечный времениподобный диаметр.

В разд. 10.2 мы приведем лоренцевы переложения двух хорошо известных теорем сравнения из римановой геометрии — теоремы сравнения индексов и теоремы сравнения Рауха. Используя последний из этих результатов, мы сможем дать простое доказательство (следствие 10.12) основного факта о том, что в пространстве-времени с всюду неотрицательными времениподобными секционными кривизнами дифференциал $\exp_{p*}$ экспоненциального отображения

$$\exp_{p*}\colon T_v(T_pM) \to T_{\exp_p(v)}M$$

не уменьшает нормы непространственноподобных касательных векторов.

Наконец, в разд. 10.3 мы приведем аналог теоремы Адамара — Картана для *односвязного в будущем* пространства-времени. Пространство $(M, g)$ называется здесь односвязным в будущем, если для любых $p, q \in M$, связанных отношением $p \ll q$, любые две направленные в будущее гладкие времениподобные кривые, идущие из $p$ в $q$, гомотопны в классе гладких направленных в будущее времениподобных кривых с концами в $p$ и $q$. Используя теорию Морса для пространства $C_{(p,q)}$ времениподобных путей из разд. 9.2, можно показать, что если $(M, g)$ — односвязное в будущем глобально гиперболическое пространство-время с непространственноподобно сопряженными точками, то для любых заданных $p, q \in M$, связанных отношением $p \ll q$, существует ровно один (с точностью до параметризации) направленный в будущее времениподобный геодезический сегмент, идущий из $p$ в $q$.

## 10.1. Времениподобный диаметр

Понятие диаметра полного риманова многообразия побуждает к рассмотрению для произвольного пространства-времени следующего его аналога (см. Бим и Эрлих (1979в, разд. 9)).

**Определение 10.1.** *Времениподобный диаметр* $\operatorname{diam}(M, g)$ пространства-времени $(M, g)$ определятся так:

$$\operatorname{diam}(M, g) = \sup \{d(p, q): p, q \in M\}.$$

Близкое понятие использовалось Типлером (1977а, с. 17) при изучении теории сингулярностей в общей теории относительности. Физически времениподобный диаметр представляет собой точную верхнюю грань возможных собственных времен, в течение которых произвольная частица могла бы существовать в данном пространстве-времени. Пространство-время конечного времениподобного диаметра является поразительно сингулярным (вспомните определение 5.3).

**Замечание 10.2.** *Если* $\operatorname{diam}(M, g) < \infty$, *то все времениподобные геодезические имеют длину, не большую* $\operatorname{diam}(M, g)$, *и потому неполны.*

*Доказательство.* Пусть $c: (a, b) \to M$ — времениподобная геодезическая, длина которой $L(c) > \operatorname{diam}(M, g)$. Тогда можно найти $s, t \in (a, b)$, $s < t$, такие, что $L(c \mid [s, t]) > \operatorname{diam}(M, g)$. Но тогда

$$d(c(s), c(t)) \geqslant L(c \mid [s, t]) > \operatorname{diam}(M, g),$$

что невозможно.

С физической точки зрения наиболее интересными пространствами конечного времениподобного диаметра являются вселенные Уилера (см. Типлер (1977в, с. 500)). В частности, примерами вселенных Уилера являются «замкнутые» космологические модели Фридмана.

Для полного риманова многообразия $(N, g_0)$ диаметр конечен, если многообразие компактно. В этом случае всегда можно указать пару точек из $N$, расстояние между которыми совпадает с диаметром. Напротив, для пространства-времени с конечным времениподобным диаметром таких точек нет — диаметр никогда не достигается.

**Предложение 10.3.** *Пусть* $(M, g)$ — *произвольное пространство-время. Предположим, что существуют точки* $p, q \in M$, *такие, что* $d(p, q) = \operatorname{diam}(M, g)$. *Тогда* $d(p, q) = \infty$.

*Доказательство.* Предположим, что $d(p, q) = \operatorname{diam}(M, g) < \infty$. Тогда для произвольного $q' \in I^+(q)$ должно выполняться неравенство

$$d(p, q') \geqslant d(p, q) + d(q, q') > d(p, q) = \operatorname{diam}(M, g),$$

приводящее к противоречию. □

Вспоминая, что глобально гиперболические пространства удовлетворяют условию конечности расстояния, из предложения 10.3 получаем следующее утверждение.

**Следствие 10.4.** (1) В пространстве-времени конечного времениподобного диаметра нельзя найти пару точек, на которой этот времениподобный диаметр реализовался бы. (2) В глобально гиперболическом пространстве-времени времениподобный диаметр никогда не достигается.

Докажем теперь лоренцев аналог (теорема 10.9) теоремы Бонне — Майерса для полных римановых многообразий (см. Чигер и Эбин (1975, с. 27—28)). Близкие результаты были получены Авезом (семинар-лекция), Флаэрти (не опубликовано), Уленбеком (1975, теорема 5.4 и следствие 5.5) и Бимом и Эрлихом (1979в, теорема 9.5). Теорема 10.9 неявно содержится также в более сильных результатах, использующих уравнение Райчаудхури, которое играет важную роль в теории сингулярностей в общей теории относительности (см. разд. 11.2 или Хокинг и Эллис (1977, разд. 4.4)).

**Определение 10.5.** *Времениподобной 2-плоскостью* $\sigma$ называется любое двумерное подпространство касательного пространства $T_pM$, где $p \in M$ — некоторая точка, которое порождается пространственноподобным и времениподобным касательными векторами.

Напомним, что секционную кривизну $K(\sigma)$ времениподобной 2-плоскости $\sigma$ можно вычислить путем выбора базиса $\{v, w\}$ для $\sigma$, состоящего из времениподобного и пространственноподобного касательных векторов, если положить

$$K(\sigma) = \frac{g(R(v, w)w, v)}{g(v, v)\,g(w, w) - [g(v, w)]^2}.$$

**Замечание 10.6.** Вместо того чтобы рассматривать все секционные кривизны, необходимо ограничить внимание лишь времениподобными секционными кривизнами по следующей причине. Если $(M, g)$ — пространство-время размерности $\geqslant 3$ и все секционные кривизны $(M, g)$ ограничены либо сверху, либо снизу для всех неособенных 2-плоскостей, то $(M, g)$ имеет постоянную секционную кривизну (Кулкарни (1979)). Здесь 2-плоскость $\sigma$ называется *неособенной*, если $g(v, v)\,g(w, w) \neq [g(v, w)]^2$ для некоторого базиса $\{v, w\}$ в $\sigma$. С другой стороны, существуют пространства, у которых либо все времениподобные секционные кривизны $\leqslant -k^2$, либо все времениподобные секционные кривизны $\geqslant k^2$. Однако Харрис (1979) показал, что если все времениподобные секционные кривизны ограничены и сверху, и снизу, то $(M, g)$ имеет постоянную секционную кривизну. Тем самым для защепленных римановых многообразий не существует явного аналога лоренцевой секционной кривизны (см. Чигер и Эбин (1975, с. 118), где рассматривается риманово защепление).

Вследствие соглашения о сигнатуре $(-, +, \ldots, +)$, используемого здесь для лоренцевых метрик, условиям положительности (соответственно отрицательности) секционной кривизны для полных римановых многообразий в римановой геометрии в лоренцевой геометрии соответствуют теоремы для глобально гиперболических пространств отрицательной (соответственно положительной) секционной кривизны. С другой стороны, если изменить это соглашение о сигнатуре на $(+, -, \ldots, -)$, положив $(M, \hat{g}) = (M, -g)$, то $K(\hat{g}) = -K(g)$. Тогда римановым теоремам для положительной (соответственно отрицательной) секционной кривизны будут соответствовать лоренцевы теоремы для положительной (соответственно отрицательной) секционной кривизны для $(M, \hat{g})$ (см., например, Флаэрти (1975a, с. 395—396), где используется соглашение $(+, -, \ldots, -)$). Однако вне зависимости от того, какая из метрик, $g$ или $\hat{g}$, выбирается в качестве лоренцевой метрики для $M$, $\mathrm{Ric}(g) = \mathrm{Ric}(\hat{g})$.

Удобно выделить часть доказательства теоремы 10.9 в отдельное утверждение.

**Предложение 10.7.** *Пусть $(M, g)$ — произвольное пространство-время размерности $n \geqslant 2$. Предположим, что $(M, g)$ удовлетворяет одному из следующих условий кривизны; либо*

(а) *все времениподобные плоскости имеют секционную кривизну, оцениваемую сверху постоянной $-k < 0$, либо*

(б) $\mathrm{Ric}(g)(v, v) \geqslant (n-1)k > 0$ *для всех единичных времениподобных касательных векторов $v \in TM$.*

*Тогда, если $c\colon [0, b] \to M$ — произвольная времениподобная геодезическая длины $L(c) \geqslant \pi/\sqrt{k}$, то геодезический сегмент $c$ имеет пару сопряженных точек.*

*Доказательство.* Вследствие того что из условия кривизны (а) вытекает условие кривизны (б) (достаточно взять след), будем доказывать сформулированное утверждение, исходя из условия (б). Для удобства предположим, что $c\colon [0, L] \to M$ — нормальная времениподобная геодезическая длины $L$. Положим $E_n(t) = c'(t)$ для всех $t \in [0, L]$. Пусть $\{E_1, \ldots, E_{n-1}\}$ есть $n-1$-пространственноподобное векторное поле, параллельное вдоль $c$ и такое, что векторы $E_1(t), E_2(t), \ldots, E_n(t)$ образуют лоренцев ортонормированный базис пространства $T_{c(t)}M$ для каждого $t \in [0, L]$. Положим $W_i(t) = \sin(\pi t/L)\, E_i(t)$, так что $W_i \in V_0^{\perp}(c)$ (обозначение $V_0^{\perp}$ введено в определении 9.1). Используя формулу (9.3) определения 9.4, получим

$$I(W_i, W_i) = \int_{t=0}^{L} \sin^2 \frac{\pi t}{L} \left[ g(R(E_i, c')c', F_i)|_t - \frac{\pi^2}{L^2} \right] dt.$$

Откуда

$$\sum_{i=1}^{n-1} I(W_i, W_i) = \int_{t=0}^{L} \sin^2 \frac{\pi t}{L} \left[ \operatorname{Ric}(c'(t), c'(t)) - \frac{(n-1)\pi^2}{L^2} \right] dt.$$

Если $\operatorname{Ric}(c'(t), c'(t)) \geqslant (n-1)k$ для всех $t \in [0, L]$ и $L \geqslant \pi/\sqrt{k}$, то, как нетрудно заметить, $\sum_{i=1}^{n-1} I(W_i, W_i) \geqslant 0$. Следовательно, $I(W_i, W_i) \geqslant 0$ для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. С другой стороны, если $c \mid [0, L]$ свободна от сопряженных точек, то по теореме 9.22 $I(W_i, W_i) < 0$ для любого $i$. Отсюда, как и требовалось, следует, что $c$ имеет пару сопряженных точек, если только $L \geqslant \pi/\sqrt{k}$. □

Используя теорему о времениподобном индексе Морса (теорема 9.27), можно доказать также более слабый вариант предложения 10.7.

**Предложение 10.8.** *Пусть $(M, g)$ — произвольное пространство-время размерности $n$, удовлетворяющее одному (либо обоим) из условий кривизны предложения* 10.7. *Если $c$: $[a, b] \to M$ — произвольная времениподобная геодезическая длины $L(c) > \pi/\sqrt{k}$, то точка $t = a$ сопряжена вдоль $c$ некоторому $t_0 \in (a, b)$ и, следовательно, $c$ не максимальна.*

*Доказательство.* Из того, что $L(c) > \pi/\sqrt{k}$, повторяя соответствующие рассуждения из доказательства предложения 10.7, в данном случае получим, что

$$\sum_{i=1}^{n-1} I(W_i, W_i) > 0.$$

Значит, $I(W_i, W_i) > 0$ для некоторого $i$. Тем самым $\operatorname{Ind}(c) > 0$. Согласно теореме о времениподобном индексе Морса (теорема 9.27), получаем, что $\dim J_t(c) \neq 0$ для некоторого $t \in (a, b)$. Это завершает доказательство. □

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы обратиться к лоренцеву аналогу теоремы Бонне — Майерса для полных римановых многообразий о диаметре.

**Теорема 10.9.** *Пусть $(M, g)$ — глобально гиперболическое пространство-время размерности $n$, удовлетворяющее одному из следующих условий кривизны:*

(а) *Все времениподобные секционные кривизны ограничены сверху постоянной $-k < 0$.*

(б) $\operatorname{Ric}(v, v) \geqslant (n-1)k$ *для всех единичных времениподобных векторов $v \in TM$.*

*Тогда* $\operatorname{diam}(M, g) \leqslant \pi/\sqrt{k}$.

*Доказательство.* Предположим, что $\operatorname{diam}(M, g) > \pi/\sqrt{k}$. Тогда по определению $\operatorname{diam}(M, g)$ можно указать $p, q \in M$, для которых $d(p, q) > \pi/\sqrt{k}$. Из того, что $(M, g)$ глобально гиперболично, вытекает существование максимального времениподобного геодезического сегмента $c$: $[0, 1] \to M$, такого, что $c(0) = p$ и $c(1) = q$. Но так как $L(c) = d(p, q) > \pi/\sqrt{k}$, то геодезический сегмент $c$, согласно предложению 10.8, не максимален, что и приводит к противоречию. □

Ясно, что аналог предложения 10.8 можно получить и для изотропных геодезических, используя теорию об изотропном индексе, развитую в разд. 9.3. С другой стороны, применяя результат Райчаудхури, можно получить более сильное утверждение (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 111)). Поэтому вместо того, чтобы прослеживать далее здесь отмеченную аналогию, мы отсылаем читателя к разд. 11.4 для обсуждения этих результатов (см. также Харрис (1979)).

## 10.2. Лоренцевы теоремы сравнения

Для последующего использования в разд. 10.3 приведем теперь времениподобные аналоги двух важных рабочих результатов глобальной римановой геометрии: теорему сравнения индексов (Громол, Клингенберг и Мейер (1971, с. 192)) и теорему сравнения Рауха (Громол, Клингенберг и Мейер (1971, с. 196) или Чигер и Эбин (1975, с. 29)), имеющие также самостоятельный интерес. Все результаты этого раздела, исключая следствие 10.12, опубликованы в работе Бима и Эрлиха (1979, разд. 9). В действительности фактически существуют две версии теоремы сравнения Рауха, часто называемые *теоремой Рауха* I и *теоремой Рауха* II, весьма полезные в глобальной римановой геометрии (см. Чигер и Эбин (1975, теоремы 1.28 и 1.29 соответственно)). Приведенный в этом разделе результат (теорема 10.11)является лоренцевым аналогом теоремы Рауха I. Харрис (1979, 1982) доказал лоренцевы аналоги обеих теорем Рауха, I и II, и, используя теорему Рауха II, получил лоренцев аналог теоремы сравнения Топоногова для времениподобных геодезических треугольников в некоторых классах пространственно-временных многообразий (см. Чигер и Эбин (1975, с. 42)). Харрис (1979, 1982) получил также, применяя упомянутый выше результат, лоренцев аналог теоремы Топоногова о диаметре (см. Чигер и Эбин (1975, с. 110)) (см. также добавление Г).

В оставшейся части этого раздела $(M_1, g_1)$ и $(M_2, g_2)$ — произвольные пространства, размерности которых связаны соотношением $\dim M_1 \leqslant \dim M_2$. Пусть $c_i$: $[0, L) \to M_i$ — направленная в будущее времениподобная *нормальная* геодезическая. Всюду

в этом разделе индексные формы на $V^{\perp}(c_1)$ и $V^{\perp}(c_2)$ будем обозначать через $I$. Обе лоренцевы метрики $g_1$ и $g_2$ в ходе доказательства будем обозначать через $\langle\, ,\, \rangle$. Индексная форма $I$ для времениподобной геодезической $c$, индекс $\mathrm{Ind}\,(c)$ и квазииндекс $\mathrm{Ind}_0\,(c)$ определены в разд. 9.1, формула (9.1) и определение 9.24 соответственно.

Прежде всего необходимо определить изоморфизм

$$\varphi\colon V^{\perp}(c_1) \to V^{\perp}(c_2)$$

так, чтобы $g_2(\varphi X(t), \varphi X(t)) = g_1(X(t), X(t))$ для всех $t \in [0, L]$. Это можно сделать, применяя обычную конструкцию параллельного переноса в римановой геометрии. Определим сначала изометрию

$$\varphi_t\colon T_{c_1(t)}M_1 \to T_{c_2(t)}M_2$$

по следующему правилу. Пусть $P_t\colon T_{c_1(t)}M_1 \to T_{c_1(0)}M_1$ — изоморфизм параллельного переноса вдоль $c_1$, сохраняющий лоренцево скалярное произведение: по заданному $v \in T_{c_1(t)}M_1$ строим единственное поле $Y$, параллельное вдоль $c_1$ и удовлетворяющее условию $Y(t) = v$, и полагаем $P_t(v) = Y(0)$. Аналогично определяется $Q_t\colon T_{c_2(t)}M_2 \to T_{c_2(0)}M_2$ — параллельное перенесение вдоль $c_2$. Построим инъективное линейное отображение, сохраняющее лоренцево скалярное произведение:

$$i\colon (T_{c_1(0)}M_1,\ g_1|_{c_1(0)}) \to (T_{c_2(0)}M_2,\ g_2|_{c_2(0)}),$$

где $i(c_1'(0)) = c_2'(0)$. Тогда отображение

$$\varphi_t\colon (T_{c_1(t)}M_1,\ g_1|_{c_1(t)}) \to (T_{c_2(t)}M_2,\ g_2|_{c_2(t)}),$$

задаваемое формулой $\varphi_t = Q_t^{-1} \circ i \circ P_t$, является изометрией, поскольку параллельный перенос сохраняет лоренцевы структуры. Отображение

$$\varphi\colon V^{\perp}(c_1) \to V^{\perp}(c_2)$$

можно определить следующим образом. Для заданного $X \in V^{\perp}(c_1)$ найдем $\varphi(X) \in V^{\perp}(c_2)$ по правилу $(\varphi X)(t) = \varphi_t(X(t))$. Как и в римановом варианте доказательства, получаем, что $(\varphi X)' = \varphi(X')$, где первое ковариантное дифференцирование проводится в $M_2$, а второе — в $M_1$.

Обозначим через $G_{2,t}(c_i)$ множество всех времениподобных плоскостей $\sigma$, содержащих $c_i'(t)$, где $i = 1, 2$. Тогда индуцированное отображение

$$\varphi_t\colon\ G_{2,t}(c_1) \to G_{2,t}(c_2)$$

определяется следующим образом. Условие $\sigma \in G_{2,t}(c_1)$ можно записать так: $\sigma = \mathrm{Lin}\,\{v, c_1'(t)\}$, где $v$ — пространственноподобный вектор. Полагаем $\varphi_t(\sigma) = \mathrm{Lin}\,\{\varphi_t(v), c_2'(t)\} \in G_{2,t}(c_2)$.

Теперь можно сформулировать времениподобный вариант теоремы сравнения индексов.

**Теорема 10.10.** (теорема сравнения времениподобных индексов). *Пусть размерности пространств* $(M_1, g_1)$ *и* $(M_2, g_2)$ *связаны условием* $\dim M_1 \leqslant \dim M_2$ *и* $c_i$: $[0, \beta] \to M_i$ — *направленные в будущее времениподобные нормальные геодезические,* $i = 1, 2$. *Предположим, что для всех* $t$, $0 \leqslant t \leqslant \beta$, *и всех времениподобных плоскостей* $\sigma \in G_{2,t}(c_1)$ *секционные кривизны связаны соотношением* $K_{M_1}(\sigma) \geqslant K_{M_2}(\varphi_t \sigma)$. *Тогда для любого* $X \in V^{\perp}(c_1)$ *выполняются следующие неравенства:*

(1) $I(X, X) \leqslant I(\varphi X, \varphi X)$.

(2) $\operatorname{Ind}(c_1) \leqslant \operatorname{Ind}(c_2)$.

(3) $\operatorname{Ind}_0(c_1) \leqslant \operatorname{Ind}_0(c_2)$.

*Доказательство.* Вспоминая, что $\langle c_1', c_2' \rangle = -1$ и $\langle X, c_1' \rangle = 0$, получаем, что

$$\langle R(X, c_1') c_1', X \rangle = -\langle X, X \rangle K(X, c_1').$$

Аналогичные формулы справедливы для $\varphi X$ и $c_2'$. Поэтому

$$I(\varphi X, \varphi X) = \int_0^{\beta} [-\langle (\varphi X)', (\varphi X)' \rangle + \langle R(\varphi X, c_2') c_2', \varphi X \rangle] \, dt =$$

$$= \int_0^{\beta} [-\langle \varphi(X'), \varphi(X') \rangle + \langle R(\varphi X, c_2') c_2', \varphi X \rangle] \, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{\beta} [-\langle X', X' \rangle + \langle R(X, c_1') c_1', X \rangle] \, dt = I(X, X). \square$$

Используя только что доказанную теорему сравнения для времениподобных индексов, получим теперь более сильную времениподобную теорему сравнения Рауха. Напомним сначала, что так как $c_i$: $[0, L] \to M_i$ — времениподобные геодезические сегменты, то все векторные поля в $V^{\perp}(c_i)$ пространственноподобны.

**Теорема 10.11.** (времениподобная теорема сравнения Рауха). *Пусть размерности пространств* $(M_1, g_1)$ *и* $(M_2, g_2)$ *связаны условием* $\dim M_1 \leqslant \dim M_2$, *а* $c_1$: $[0, L] \to M_1$ *и* $c_2$: $[0, L] \to M_2$ — *направленные в будущее времениподобные нормальные геодезические сегменты. Предположим, что для всех* $t \in [0, L]$ *и любой* $\sigma \in G_{2,t}(c_1)$ *выполняется неравенство*

$$K_{M_1}(\sigma) \geqslant K_{M_2}(\varphi_t \sigma).$$

*Пусть далее* $Y_1 \in V^{\perp}(c_1)$ *и* $Y_2 \in V^{\perp}(c_2)$ — *якобиевы поля на* $M_1$ *и* $M_2$ *соответственно, удовлетворяющие начальным условиям*

$$Y_1(0) = Y_2(0) = 0, \tag{10.1}$$

$$g_1(Y_1'(0), Y_1'(0)) = g_2(Y_2'(0), Y_2'(0)). \tag{10.2}$$

*Если* $c_2$ *не имеет на* $(0, L)$ *сопряженных точек, то*

$$g_1(Y_1(t), Y_1(t)) \geqslant g_2(Y_2(t), Y_2(t)) \qquad (10.3)$$

*для всех* $t \in (0, L]$. *В частности,* $c_1$ *не имеет сопряженных точек на* $(0, L)$.

*Доказательство.* Его можно провести таким же образом, как и в книге Громола, Клингенберга и Мейера (1971, с. 196—199), за исключением неравенства (7) на с. 198, которое необходимо модифицировать следующим образом. Пусть $Z \in V^{\perp}(c_2)$ — (единственное) якобиево поле вдоль $c_2$, для которого $Z(0) = 0$ и $Z(t_0) = \varphi Y_1(t_0)$, где $\varphi$ — то же, что и выше. Нужно показать, что

$$\langle Y_1(t_0), Y_1'(t_0)\rangle \geqslant \langle Z(t_0), Z'(t_0)\rangle.$$

Положим для этого $c_3 = c_1 \mid [0, t_0]$ и $c_4 = c_2 \mid [0, t_0]$. Тогда

$$\begin{aligned}\langle Y_1(t_0), Y_1'(t_0)\rangle &= -I(Y_1 \mid c_3, Y_1 \mid c_3) \geqslant \\ &\geqslant -I((\varphi Y_1) \mid c_4, (\varphi Y_1) \mid c_4).\end{aligned}$$

Согласно теореме сравнения для временеподобных индексов (теорема 10.10 (1)), последнее выражение не меньше $-I(Z \mid c_4, Z \mid c_4)$, которое в свою очередь в силу максимальности якобиевых полей по отношению к индексной форме в отсутствие сопряженных точек (теорема 9.23) равно $\langle Z(t_0), Z'(t_0)\rangle$. □

В теореме 10.11 можно также предполагать, что $c_2$ не имеет сопряженных точек на сегменте $[0, L]$. Тогда по теореме 10.10 (3) $c_1$ также не будет иметь сопряженных точек на этом сегменте.

Для римановых многообразий, наделяя касательное пространство «плоской метрикой» (см. определение 9.17), можно показать, что экспоненциальное отображение не уменьшает длин касательных векторов (точную формулировку см. Бишоп и Криттенден (1967, с. 223, теорема 2 (1))). Сопоставляя якобиевы поля на данном римановом многообразии с якобиевыми полями в $\mathbb{R}^n$ и используя теорему сравнения Рауха, можно получить простое доказательство этого факта. Для доказательства аналогичных результатов для пространств с неотрицательной временеподобной секционной кривизной мы воспользуемся временеподобной теоремой сравнения Рауха (см. Флаэрти (1975а, с. 397)). Интуитивно ясно, что приведенное ниже следствие 10.12 выражает тот факт, что если временеподобные секционные кривизны $(M, g)$ положительны, то направленные в будущее временеподобные геодезические, исходящие из данной точки, разбегаются в $M$ быстрее, чем «соответствующие» геодезические в пространстве-времени Минковского. Напомним, что канонический изоморфизм $\tau_v$ определен в разд. 9.1, определение 9.15.

**Следствие 10.12.** *Пусть* $(M, g)$ — *пространство-время со всюду неотрицательной временеподобной секционной кривизной, и*

*пусть* $v \in T_pM$ — *направленный в будущее времениподобный касательный вектор, подчиненный условию* $g(v, v) = -1$. *Тогда для любого направленного в будущее непространственноподобного касательного вектора* $w \in T_pM$ *вектор* $b = \tau_v(w) \in T_v(T_pM)$ *удовлетворяет неравенству*

$$g(\exp_{p*} b, \exp_{p*} b) \geqslant g(w, w) = \langle\langle b, b\rangle\rangle.$$

*Доказательство.* Сначала докажем это неравенство для вектора $b = \tau_v(w) \in T_v(T_pM)$ при условии $g(v, w) = 0$, применяя времениподобную теорему сравнения Рауха к следующей паре пространств: $(M_1, g_1) = (M, g)$ и $(M_2, g_2)$ — пространство-время Минковского $(\mathbb{R}_1^n, g_0)$, где $n = \dim M$. Положим $c_1(t) = \exp_p tv$ и рассмотрим (единственное) якобиево поле $Y_1 \in V^\perp(c)$, для которого $Y_1(0) = 0$ и $Y_1'(0) = w$. Согласно предложению 9.16, имеем $Y_1(1) = \exp_{p*} b$.

Пусть $c_2$: $[0, 1] \to \mathbb{R}_1^n$ — произвольная времениподобная нормальная геодезическая. Выберем $\bar{w} \in N(c_2(0))$ так, чтобы $g_0(\bar{w}, \bar{w}) = g_1(w, w)$. Пусть далее $Y_2 \in Y^\perp(c_2)$ — (единственное) якобиево поле, для которого $Y_2(0) = 0$ и $Y_2'(0) = \bar{w}$. Тогда $Y_2(t) = t\, P_t(\bar{w})$, где через $P_t$ обозначен лоренцев параллельный перенос из $c_2(0)$ в $c_2(t)$ вдоль $c_2$. Применяя теорему 10.11, получим, что

$$g_1(\exp_{p*} b, \exp_{p*} b) = g_1(Y_1(1), Y_1(1)) \geqslant g_0(Y_2(1), Y_2(1)) =$$
$$= g_0(P_1(\bar{w}), P_1(\bar{w})) = g_0(\bar{w}, \bar{w}) = g_1(w, w) = \langle\langle b, b\rangle\rangle,$$

что и требовалось доказать.

Обратимся теперь к общему случаю. Вектор $w$ можно представить в виде суммы $w = w_1 + w_2$, где $w_1 = \lambda v$ для некоторого $\lambda > 0$ и $g(v, w_2) = 0$. Положим $b_i = \tau_v(w_i)$, $i = 1, 2$, так, что $b = b_1 + b_2$, и вычислим

$$g(\exp_{p*} b, \exp_{p*} b) = g(\exp_{p*} b_1, \exp_{p*} b_1) +$$
$$+ 2g(\exp_{p*} b_1, \exp_{p*} b_2) + g(\exp_{p*} b_2, \exp_{p*} b_2).$$

Применяя лемму Гаусса (теорема 9.18) к первым двум слагаемым, получим

$$g(\exp_{p*} b, \exp_{p*} b) = \langle\langle b_1, b_1\rangle\rangle + 2\langle\langle b_1, b_2\rangle\rangle +$$
$$+ g(\exp_{p*} b_2, \exp_{p*} b_2) = \langle\langle b_1, b_1\rangle\rangle + g(\exp_{p*} b_2, \exp_{p*} b_2).$$

вследствие того, что $\langle\langle b_1, b_2\rangle\rangle = g(w_1, w_2) = 0$. Заменяя оставшееся слагаемое на произведение $\langle\langle b_2, b_2\rangle\rangle$ и используя неравенство, полученное в первой части доказательства, приходим к требуемому:

$$g(\exp_{p*} b, \exp_{p*} b) \geqslant \langle\langle b_1, b_1\rangle\rangle + \langle\langle b_2, b_2\rangle\rangle =$$
$$= \langle\langle b_1 + b_2, b_1 + b_2\rangle\rangle = \langle\langle b, b\rangle\rangle. \square$$

## 10.3. Лоренцевы теоремы Адамара — Картана

Прежде всего мы докажем основной результат, связывающий сопряженные точки и времениподобную секционную кривизну (см. Флаэрти (1975 а, предложение 2.1); для лоренцевой метрики Флаэрти использует соглашение (+, —, ..., —), так что его условие на секционную кривизну имеет знак: противоположный используемому нами).

**Предложение 10.13.** *Пусть $(M, g)$ — пространство-время, времениподобная секционная кривизна которого всюду неотрицательна. Тогда никакая непространственноподобная геодезическая не имеет сопряженных точек.*

*Доказательство.* Пусть сначала $c$: $[0, a) \to M$ — произвольная направленная в будущее времениподобная нормальная геодезическая. Из следствия 9.10 вытекает, что если $X$ — якобиево поле вдоль $c$, у которого $X(0) = X(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 \in (0, a)$, то $X \in V^\perp(c)$. Поэтому можно ограничиться рассмотрением только якобиевых полей $J \in V^\perp(c)$, у которых $J(0) = 0$. Вследствие того что $J \in V^\perp(c)$ и $c$ — времениподобная геодезическая, также и $J' \in V^\perp(c)$. Дифференцируя гладкую функцию $f(t) = g(J(t), J'(t))$, получаем, что

$$\begin{aligned} f'(t) &= g(J'(t), J'(t)) + g(J(t), J''(t)) = \\ &= g(J'(t), J'(t)) - g(J(t), R(J(t), c'(t))c'(t)) = \\ &= g(J'(t), J'(t)) + g(J(t), J(t))K(J(t), c'(t)) \geqslant 0 \end{aligned}$$

для всех $t \in [0, a)$. Если $J(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 \in [0, a)$, то $f(0) = f(t_0) = 0$. Так как $f$ не убывает, то $f(t) = 0$ для всех $t \in [0, t_0]$. Значит, $0 = f'(t) = g(J'(0), J'(0))$ в силу условия $J(0) = 0$. Отсюда мы заключаем, что $J'(0) = 0$. Следовательно, $J = 0$, и на отрезке $[0, a)$ точек, сопряженных $t = 0$ вдоль $c$, нет.

Обратимся теперь к случаю: когда $\beta$: $[0, a) \to M$ — изотропная геодезическая, и воспользуемся изотропной индексной формой. Пусть $t_0 \in [0, a)$ произвольно. Покажем, что форма $\bar{I}$: $\mathfrak{X}_0(\beta \mid [0, t_0] \times \mathfrak{X}_0(\beta \mid [0, t_0)) \to \mathbb{R}$ отрицательно определена. Тогда: согласно теореме 9.69, точек, сопряженных $t = 0$ вдоль $c$, на отрезке $(0, t_0]$ не будет.

Если $W \in \mathfrak{X}_0(\sigma)$ — гладкий параллельный векторный класс, то $W = [\beta]$ ввиду того, что $W(0) = [\beta'(0)]$. Поэтому, если $W \in \mathfrak{X}_0(\beta)$ не является гладким параллельным векторным классом, то $\bar{g}(W'(s), W'(s)) > 0$ для некоторого $s \in (0, t_0)$. Вследствие положительной определенности $\bar{g}$ неравенство $\bar{g}(W'(t), W'(t)) \geqslant 0$ выполняется для всех $s \in [0, t_0]$. Для произвольного фиксированного $t \in [0, t_0]$ рассмотрим теперь следующую величину: $\bar{g}(\bar{R}(W(t), \beta'(t))\beta'(t), W(t))$. Если $W(t) = [\beta'(t)]$, то

$\bar{g}(\bar{R}(W(t), \beta'(t))\beta'(t), W(t)) = 0$. Если же $W(t) \neq [\beta'(t)]$, то можно найти пространственноподобный касательный вектор $w$, перпендикулярный $\beta'(t)$ и такой, что $\pi(w) = W(t)$. Тогда, пользуясь формулой (9.35) разд. 9.3, получим, что

$$\bar{g}(\bar{R}(W(t), \beta'(t))\beta'(t), W(t)) = g(R(w, \beta'(t))\beta'(t), w).$$

Ввиду того что $w$ пространственноподобен, можно найти последовательность времениподобных 2-плоскостей $\sigma_n = \mathrm{Lin}(w_n, v_n)$, таких, что $w_n$ пространственноподобен, $v_n$ времениподобен, $g(w_n, v_n) = 0$, $w_n \to w$ и $v_n \to \beta'(t)$, так что $\sigma_n \to \mathrm{Lin}(w, \beta'(t))$. Вследствие того что неравенства $g(w_n, w_n) > 0$, $g(v_n, v_n) < 0$, $K(v_n, w_n) \geqslant 0$ справедливы для любого $n$, по непрерывности получаем

$$\bar{g}(\bar{R}(W(t), \beta'(t))\beta'(t), W(t)) = g(R(w, \beta'(t))\beta'(t), w) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} g(R(w_n, v_n)v_n, w_n) = \lim_{n\to\infty} K(w_n, v_n)\, g(w_n, w_n)\, g(v_n, v_n) \leqslant 0.$$

Таким образом, в обоих случаях $\bar{g}(\bar{R}(W(t), \beta'(t))\beta'(t)), W(t)) \leqslant 0$. Отсюда при условии, что $W \neq [\beta']$, получаем требуемое

$$\bar{I}(W, W) = \int_{t=0}^{t_0} (-\bar{g}(W', W') + \bar{g}(\bar{R}(W, \beta')\beta', W))\,|_t\, dt < 0.$$

Стандартное определение в глобальном римановой геометрии (см. О'Салливэн (1974), Галливер (1975)) может служить основанием для следующего определения.

**Определение 10.14.** Будем говорить, что пространство-время $(M, g)$ не имеет *точек, времениподобно сопряженных в будущем*, если для любой направленной в будущее времениподобной геодезической $c$: $[0, a) \to (M, g)$ выполняется следующее условие: никакое нетривиальное якобиево поле из $V^{\perp}(c)$ не обращается в нуль более одного раза.

Ввиду леммы 9.46 аналогичное определение можно сформулировать и для пространств, либо не имеющих точек, изотропно сопряженных в будущем, либо не имеющих точек, непространственноподобно сопряженных в будущем. Предложение 10.13 гарантирует, что если $(M, g)$ — пространство-время со всюду неотрицательной времениподобной секционной кривизной, то $(M, g)$ не имеет точек, непространственноподобно сопряженных в будущем.

Лоренцевы многообразия с неотрицательной времениподобной секционной кривизной или без времениподобно сопряженных в будущем точек можно охарактеризовать через поведение их якобиевых полей. Подобное описание применяется и к римановым многообразиям (см. О, Салливэн (1974, предложение 4)).

**Предложение 10.15.** (а) $(M, g)$ *имеет всюду неотрицательную времениподобную секционную кривизну в том и только том случае, когда*

$$\frac{d^2}{dt^2}(g(Y(t),\ Y(t))) \geqslant 0$$

*для каждого якобиева поля $Y \in V^{\perp}(c)$ вдоль любой направленной в будущее времениподобной геодезической $c$.*

(б) $(M, g)$ *не имеет точек, времениподобно сопряженных в будущем, в том и только том случае, если $g(Y(t), Y(t)) > 0$ для всех $t > 0$, где $Y \in V^{\perp}(c)$, $Y(0) = 0$, — любое нетривиальное якобиево поле вдоль произвольной направленной в будущее времениподобной геодезической $c$.*

*Доказательство.* (а) Допустим, что $(M, g)$ имеет всюду неотрицательную времениподобную секционную кривизну. Пусть $Y \in V^{\perp}(c)$ — якобиево поле вдоль нормальной времениподобной геодезической $c$. Тогда и $Y' \in V^{\perp}(c)$, и мы получаем, что

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}(g(Y,\ Y)) &= 2g(Y',\ Y') - 2g(R(Y,\ c')c',\ Y) = \\ &= 2g(Y',\ Y') + 2g(Y,\ Y)K(Y,\ c') \geqslant 0.\end{aligned}$$

Обратно, пусть $v$ — направленный в будущее времениподобный и $w$ — пространственноподобный касательные векторы, порождающие времениподобную 2-плоскость и подчиненные условиям $g(v, v) = -1$, $g(w, w) = 1$ и $g(v, w) = 0$. Пусть $c(t) = \exp(tv)$ и $V \in V^{\perp}(c)$ — якобиево поле с начальными условиями $Y(0) = w$ и $Y'(0) = 0$. Тогда по предположению

$$\begin{aligned}0 \leqslant \frac{d^2}{dt^2}(g(Y,\ Y))\,|_{t=0} &= -2g(R(Y(0),\ c'(0))c'(0),\ Y(0)) = \\ &= -2g(R(w,\ v)v,\ w) = 2K(v,\ w)\end{aligned}$$

ввиду того, что первое слагаемое при дифференцировании обращается в нуль вследствие условия $Y'(0) = 0$. Поэтому $K(v, w) \geqslant 0$, что и требовалось.

(б) Доказательство ясно из определения 10.14. □

Пользуясь развитой в разд. 9.1 и 9.2 теорией времениподобного индекса, приведем теперь лоренцев вариант теоремы Адамара—Картана для глобально гиперболических пространств. Его доказательство проводится подобно тому, как доказывается теорема Адамара—Картана для полных римановых многообразий в теории Морса (см. Милнор (1966, с. 114)). Напомним, что пространство-время называется *односвязным в будущем*, если любые две направленные в будущее времениподобные гладкие кривые, соединяющие $p$ с $q$, гомотопны в классе (гладких) направленных в будущее времениподобных кривых с фиксированными концевыми точками $p$ и $q$ (определение 9.28).

**Теорема 10.16.** *Пусть* $(M, g)$ — *односвязное в будущем глобально гиперболическое пространство-время без непространственноподобно сопряженных в будущем точек. Тогда для любых* $p \in M$ *и* $q \in M$, *связанных отношением* $p \ll q$, *существует ровно одна (с точностью до перепараметризации) направленная в будущее времениподобная геодезическая, идущая из* $p$ *в* $q$.

*Доказательство.* Вследствие того что $(M, g)$ — глобально гиперболическое, существует максимальная направленная в будущее времениподобная геодезическая, соединяющая $p$ с $q$. Из того, что точек, непространственноподобно сопряженных в будущем, нет, вытекает, что любая направленная в будущее геодезическая, идущая из $p$ в $q$, имеет нулевой индекс (см. теорему 9.27). Тем самым пространство времениподобных путей $C_{(p, q)}$ имеет гомотопический тип клеточного комплекса с одной клеткой нулевой размерности, т. е. точкой, для каждой направленной в будущее времениподобной геодезической, идущей из $p$ в $q$. С другой стороны, из того, что $M$ односвязно в будущем, вытекает, что $C_{(p, q)}$ связно и, значит, состоит из одной точки. Поэтому найдется самое большее одна направленная в будущее времениподобная геодезическая, идущая из $p$ в $q$. □

Похожий результат был получен Уленбеком (1975, теорема 5.3) для глобально гиперболических пространств, удовлетворяющих условию роста метрики (см. Уленбек (1975, с. 72)) и условию кривизны $-g(R(v, w)w, v) \leqslant 0$ для всех направленных в будущее изотропных векторов $v$ и векторов $w$, таких, что $g(v, w) = 0$ в каждой точке из $M$. Такое пространство-время $M$ можно накрыть пространством, которое топологически эквивалентно пространству Минковского (т. е. евклидову пространству).

Флаэрти (1975а, с. 398) показал также, что если $(M, g)$ односвязно в будущем, непространственноподобно полно в будущем и имеет всюду неотрицательные времениподобные секционные кривизны, то в каждой точке $p \in M$ экспоненциальное отображение $\exp_p$ регулярно вкладывает конус будущего из $T_pM$ в $M$. Чтобы получить этот результат, Флаэрти воспользовался поднятием и показал, что при сделанных предположениях любые два направленных в будущее времениподобных касательных вектора $v, w \in T_pM$, связанные условием $\exp_p v = \exp_p w$, равны: $v = w$. Таким образом, односвязное в будущем и непространственноподобно полное в будущем пространство-время с неотрицательными времениподобными секционными кривизнами удовлетворяет условию теоремы 10.16. С другой стороны, Флаэрти показал, что любое односвязное в будущем непространственноподобно полное в будущем пространство-время со всюду неотрицательными времениподобными секционными кривизнами является также и глобально гиперболическим (1975б, с. 200).

Глава 11

# СИНГУЛЯРНОСТИ

Общее допущение, которое принимается при изучении римановых многообразий, состоит в том, что рассматриваемые пространства предполагаются полными в смысле Коши, или, что равносильно, геодезически полными. Это предположение кажется вполне обоснованным вследствие того, что большое число важных римановых многообразий являются полными.

Для лоренцевых многообразий положение совсем иное. Значительное число наиболее важных лоренцевых многообразий, используемых в общей теории относительности в качестве моделей, геодезически неполно. Кроме того, проблема полноты усложняется еще и тем фактом, рассмотренным в предыдущих главах, что для лоренцевых многообразий существует несколько неэквивалентных видов полноты.

В этой главе мы займемся рассмотрением основных теорем, которые обеспечивают непространственноподобную геодезическую неполноту большого класса пространственно-временны́х многообразий. Каждое такое пространство-время содержит по крайней мере одну непространственноподобную геодезическую, которая является одновременно и непродолжаемой, и неполной. Такая геодезическая имеет концевую точку $\bar{p}$ в причинной границе $\partial_c M$, которую можно вообразить находящейся вне пространства-времени, но не на бесконечности. Например, если $\gamma$ — непродолжаемая в будущее и неполная в будущем времениподобная геодезическая, для которой $\bar{p} \in \partial_c M$ — концевая точка в будущем, то $\gamma$ соответствует пути «свободно падающей» пробной частицы, которая падает на край вселенной (в точку $\bar{p}$) за конечное время.

В общей теории относительности уже давно было известно, что многие важные пространственно-временны́е многообразия являются непространственноподобно неполными. Тем не менее считалось, что эта неполнота вызвана симметрией рассматриваемых моделей. И поэтому было ощущение, что непространственноподобная полнота является разумным допущением для физически реальных пространственно-временны́х многообразий. Основной довод для этого допущения базировался на физической интуиции, которая была явно неоправданной, о чем мож-

но говорить постфактум (см. Типлер, Кларке и Эллис (1980, гл. 4)).

Если $(M, g)$ — нерасширяемое пространство-время, имеющее непродолжаемую непространственноподобную геодезическую, которая к тому же и неполна, то говорят, что $(M, g)$ имеет сингулярность. Цель этой главы — установить несколько теорем сингулярности (т. е. неполноты).

Прежде чем начать наше исследование теории сингулярностей, мы остановимся на том, что поясним, почему эта теория работает для пространственно-временных многообразий размерности $\geqslant 3$ и не работает в случае, если размерность пространства равна 2. Отмеченный в начале разд. 9.2 простой факт состоял в том, что в двумерном пространстве-времени никакая изотропная геодезическая не содержит сопряженных точек. Вместе с тем основной ход в доказательстве теорем сингулярности заключается в том, чтобы показать, что определенные условия на кривизну вынуждают каждую полную непространственноподобную геодезическую содержать пару сопряженных точек.

В этой главе будет предполагаться, что читатель знаком с понятиями и некоторыми основными свойствами якобиевых полей, рассмотренными в разд. 9.1 и 9.3.

## 11.1. Якобиевы тензоры

Как мы видели в разд. 9.3 (определение 9.61 и следующие за ним страницы), якобиевы тензоры являются удобным средством для изучения сопряженных точек. Для данного времениподобного геодезического сегмента $c\colon [a, b] \to M$ обозначим через $N(c(t))$ $(n-1)$-мерное подпространство пространства $T_{c(t)} M$, состоящее из касательных векторов, ортогональных $c'(t)$, как в определении 9.1. (1. 1)-тензорное поле $A(t)$ на $V^{\perp}(c)$ является линейным отображением

$$A = A(t)\colon N(c(t)) \to N(c(t))$$

для каждого $t \in [a, b]$. Кроме того, можно определить составной эндоморфизм $RA(t)\colon N(c(t)) \to N(c(t))$, положив

$$RA(t)(v) = R(A(t)(v), c'(t))\, c'(t).$$

Тензорное поле $A^*(t)$, *сопряженное* $A(t)$, определяется следующим требованием:

$$g(A(t)(w), v) = g(A^*(t)(v), w)$$

для всех $v, w \in N(c(t))$.

Гладкое (1, 1)-тензорное поле $A(t)$ на $V^{\perp}(c)$ называется *якобиевым тензорным полем,* если $A'' + RA = 0$ и

$$\ker(A(t)) \cap \ker(A'(t)) = \{0\}$$

для всех $t \in [a, b]$. Если $Y$ — векторное поле, параллельное вдоль $c$, и $A$ — якобиев тензор на $V^\perp(c)$, то векторное поле $J = A(Y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $J'' + R(J, c')c' = 0$ и, следовательно, является якобиевым полем. Из того, что $\ker(A(t)) \cap \ker(A'(t)) = \{0\}$ для всех $t \in [a, b]$, вытекает, что если $Y$ является ненулевым полем, параллельным вдоль $c$, то $J = A(Y)$ — нетривиальное якобиево поле. Предположим, что $A$ — якобиев тензор на $V^\perp(c)$, у которого $A(a) = 0$. Если $A(t_0)(v) = 0$ для некоторого $t_0 \in (a, b]$ и $0 \neq v \in N(c(t_0))$, то, взяв в качестве $Y$ (единственное) векторное поле, параллельное вдоль $c$ и такое, что $Y(t_0) = v$, получаем, что $J = A(Y)$ — якобиево поле, подчиненное условиям $J(a) = J(t_0) = 0$.

Якобиево тензорное поле $A$ называется *лагранжевым тензорным полем*, если

$$(A')^*A - A^*A' = 0$$

для всех $t \in [a, b]$. Как и в доказательстве леммы 9.67, можно показать, что якобиево тензорное поле $A$ является лагранжевым, если $A(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 \in [a, b]$.

**Замечание 11.1.** Пусть $c$: $[a, b] \to M$ — нормальная времениподобная геодезическая и $E_1, \ldots, E_n = c'$ — параллельно перенесенный ортонормированный базис вдоль $c$. Тогда $N(c(t))$ является линейной оболочкой, натянутой на $E_1, \ldots, E_{n-1}$, и каждое якобиево векторное поле $J$ вдоль $c$, всюду ортогональное $c'$, можно выразить через $E_1, \ldots, E_{n-1}$. Тем самым $J$ можно представить в виде вектор-столбца с $n-1$ компонентами. Используя это представление, обозначим через $J_i = J_i(t)$ вектор-столбец, соответствующий якобиеву полю $J$ вдоль $c$, которое удовлетворяет условиям $J(t_0) = 0$ и $J'(t_0) = E_i(t_0)$. Пусть

$$A(t) = [J_1(t), \ldots, J_{n-1}(t)]$$

есть $(n-1) \times (n-1)$-матрица, в $i$-м столбце которой расположен $J_i(t)$. Эта матрица $A(t)$ является представлением лагранжева тензорного поля вдоль $c$. Используя тот же базис $E_1, \ldots, E_{n-1}$, легко убедиться в том, что сопряженному полю $A^*(t)$ соответствует матрица, получаемая из $A(t)$ транспонированием. Пространство якобиевых полей, обращающихся в нуль в $t_0$, производные которых ортогональны к $c'$ в $t_0$, можно отождествить с линейной оболочкой столбцов матрицы $A$. Таким образом, точки, сопряженные $c(t_0)$ вдоль $c$, — это в точности те же точки, в которых $\det A(t) = 0$. Следовательно, $\det A(t)$ имеет на $[a, b]$ лишь изолированные нули. Кроме того, кратность точки $t = t_1$, сопряженной $t_0$, совпадает с дефектом $A(t_1)$: $N(c(t_1)) \to N(c(t_1))$.

Тот факт, что $A(t_0) = 0$ и $A'(t_0) = E$, в проведенном выше обсуждении является весьма существенным. Можно построить лагранжевы тензоры вдоль времениподобной геодезической $c$:

$J \to (M, g)$, которые вырождаются в различных точках $t_0, t_1 \in J$, хотя $c$ и не имеет сопряженных точек. Например, пусть $(M, g)$ — это $\mathbb{R}^3$ с лоренцевой метрикой $ds^2 = -dx^2 + dy^2 + dz^2$ и $c(t) = (t, 0, 0)$. Положим $E_1 = \partial/\partial y$ и $E_2 = \partial/\partial z$. Тогда, если $A$ является якобиевым тензором вдоль $c$ с матрицей

$$A(t) = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t-1 \end{bmatrix},$$

вычисленной относительно $E_1 \circ c$ и $E_2 \circ c$, то $A' = E$ и $A^* = A$, так что $(A')^* A - A^* A' = 0$ и $A$ — лагранжев тензор. Ясно, что $A(0)(E_1(c(0))) = 0$ и $A(1)(E_2(c(1))) = 0$. Однако у $c$ нет сопряженных точек вследствие того, что $(\mathbb{R}^3, ds^2)$ — пространство Минковского.

Определим теперь расхождение, вращение и сдвиг якобиева тензора $A$ вдоль времениподобной геодезической $c: [a, b] \to M$. Как и прежде, $E = E(t)$ представляет $(1, 1)$-тензорное поле на $V^\perp(c)$, такое, что $E(t) = \mathrm{id}: N(c(t)) \to N(c(t))$ для каждого $t$.

**Определение 11.2.** Пусть $A$ — якобиево тензорное поле вдоль времениподобной геодезической и $B = A'A^{-1}$ в тех точках, где определено $A^{-1}$.

(а) *Расхождение* $\theta$ определяется по правилу

$$\theta = \mathrm{tr}(B).$$

(б) *Тензор вращения* $\omega$ определяется по правилу

$$\omega = \frac{1}{2}(B - B^*).$$

(в) *Тензор* (поперечного) *сдвига* $\sigma$ определяется по правилу

$$\sigma = \frac{1}{2}(B + B^*) - \frac{\theta}{n-1} E.$$

Применяя методы матричной алгебры и используя ортонормированный базис параллельных полей для $V^\perp(c)$, можно показать, что

$$\theta = \mathrm{tr}(A'A^{-1}) = (\det A)^{-1} (\det A)'.$$

Тогда, если $A$ — якобиево тензорное поле, для которого $A(t_0) = 0$, $A'(t_0) = E$ и $|\theta(t)| \to \infty$ при $t \to t_1$, то $\det A(t_1) = 0$ и $t = t_1$ сопряжена $t_0$ вдоль $c$.

Используя соотношение $(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$, вычислим теперь производную $B = A'A^{-1}$. Имеем

$$B' = (A'A^{-1})' = A''A^{-1} - A'A^{-1}A'A^{-1} = -R - BB. \quad (11.1)$$

Так как $\theta = \operatorname{tr}(B)$ и $B = \omega + \sigma + \frac{\theta}{n-1}E$, то отсюда получаем, что

$$\theta' = \operatorname{tr}(B') = -\operatorname{tr}(R) - \operatorname{tr}(BB) = -\operatorname{tr}(B) - \\ - \operatorname{tr}\left(\left(\omega + \sigma + \frac{\theta}{n-1}E\right)^2\right) = -\operatorname{tr}(R) - \\ - \operatorname{tr}\left(\omega^2 + \sigma^2 + \frac{\theta^2}{(n-1)^2}E\right) = \\ = -\operatorname{tr}(R) - \operatorname{tr}(\omega^2) - \operatorname{tr}(\sigma^2) - \frac{\theta^2}{n-1},$$

где мы использовали тот факт, что $\operatorname{tg}(\omega) = \operatorname{tr}(\sigma) = \operatorname{tr}(\omega\sigma) = 0$. Привлекая ортонормированный базис $E_1, \ldots, E_n$ вдоль $c$, в котором $E_n = c'$, найдем

$$\operatorname{tr}(R) = \sum_{i=1}^{n-1} g(R(E_i, c')c', E_i) = \\ = \sum_{i=1}^{n-1} g(E_i, E_i)\, g(R(E_i, c')c', E_i) = \operatorname{Ric}(c', c').$$

Это приводит к *уравнению Райчаудхури* для якобиевых тензоров вдоль времениподобных геодезических:

$$\theta' = -\operatorname{Ric}(c', c') - \operatorname{tr}(\omega^2) - \operatorname{tr}(\sigma^2) - \frac{\theta^2}{n-1}.$$

Определение 11.2 означает, что тензор сдвига $\sigma$ для произвольного якобиева тензорного поля $A$ является самосопряженным. Таким образом, если $E_1, \ldots, E_n$ — ортонормированный базис в $c(t)$, у которого $E_n = c'(t)$, то $\sigma$ можно представить относительно $E_1, \ldots, E_{n-1}$ при помощи симметричной матрицы $[\sigma_{ij}]$. Следовательно,

$$\operatorname{tr}(\sigma^2) = \operatorname{tr}\left(\left[\sum_k \sigma_{ik}\sigma_{kj}\right]\right) = \\ = \sum_{i,k} \sigma_{ik}\sigma_{ki} = \sum_i \sum_k \sigma_{ik}^2 \geqslant 0.$$

Тем самым $\operatorname{tr}(\sigma^2) = 0$ в том и только том случае, если $\sigma = 0$.

Если $A$ является лагранжевым тензорным полем, то тензор $B = A'A^{-1}$ обладает следующим свойством.

**Лемма 11.3.** *Если $A$ — лагранжево тензорное поле, то $B = A'A^{-1}$ является самосопряженным.*

*Доказательство.* Из равенства $A^*A' = A'^*A$ вытекает, что

$$B = A'A^{-1} = (A^*)^{-1}(A^*)' = B^*. \ \square$$

Лемма 11.3 имеет простое следствие.

**Следствие 11.4.** *Если $A$ — лагранжево тензорное поле, то вращение $\omega = (1/2)(B - B^*)$ равно нулю вдоль $c$.*

Таким образом, мы пришли к *свободному от вращения уравнению Райчаудхури* для лагранжевых тензорных полей вдоль времениподобных геодезических:

$$\theta' = -\mathrm{Ric}(c', c') - \mathrm{tr}(\sigma^2) - \frac{\theta^2}{n-1}. \tag{11.2}$$

Рассмотрим теперь уравнение Райчаудхури для изотропной геодезической $\beta\colon [a, b] \to M$. Как отмечалось в разд. 9.3, использование факторрасслоения $G(\beta) = N(\beta)/[\beta']$ вдоль $\beta$ предпочтительней использования $N(\beta)$. Напомним, что гладкое (1, 1)-тензорное поле $\overline{A}\colon G(\beta) \to G(\beta)$ называется *якобиевым тензорным полем* вдоль изотропной геодезической $\beta$, если

$$\overline{A}'' + \overline{R}\overline{A} = 0 \text{ и } \ker(\overline{A}(t)) \cap \ker(\overline{A}'(t)) = \{[\beta'(t)]\}$$

для всех $t \in [a, b]$ (см. определение 9.61). В изотропном случае мы будем действовать во многом так же, как и во времениподобном, не забывая, впрочем, о том, что мы работаем здесь по модулю $\beta'$ в $G(\beta)$ и что $\dim G(\beta(t)) = n - 2$. Тензорное поле $\overline{A}^*$, сопряженное $\overline{A}$, определяется по формуле

$$\overline{g}(\overline{A}w, v) = \overline{g}(\overline{A}^*v, w),$$

где $\overline{g}$ — положительно определенная метрика на $G(\beta)$, задаваемая по формуле (9.31) разд. 9.3.

**Определение 11.5.** Пусть $\overline{A}$ — якобиев тензор вдоль изотропной геодезической $\beta$ и $\overline{B} = \overline{A}'\overline{A}^{-1}$ в тех точках, где определен $\overline{A}^{-1}$.

(а) *Расхождение* $\overline{\theta}$ определяется по правилу

$$\overline{\theta} = \mathrm{tr}(\overline{B}) = (\det \overline{A})^{-1}(\det \overline{A})'.$$

(б) *Тензор вращения* $\overline{\omega}$ определяется по правилу

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2}(\overline{B} - \overline{B}^*).$$

(в) *Тензор сдвига* $\overline{\sigma}$ определяется по правилу

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{2}(\overline{B} + \overline{B}^*) - \frac{\overline{\theta}}{n-2}\overline{E}.$$

Используя те же соображения, что и во времениподобном случае, можно получить, что

$$\overline{B}' = -\overline{R} - \overline{B}\overline{B} \tag{11.3}$$

и

$$\bar{\theta}' = -\operatorname{tr}(\bar{R}) - \operatorname{tr}(\bar{\omega}^2) - \operatorname{tr}(\bar{\sigma}^2) - \frac{\bar{\theta}^2}{n-2}.$$

След $\operatorname{tr}(\bar{R})$ можно вычислить следующим образом. Пусть $V(\beta)$ — геометрическая реализация для $G(\beta)$, построенная, как и в правиле (9.28) разд. 9.3, и $\{Y_1, \ldots, Y_{n-2}\}$ — ортонормированный базис для $V(\beta)$ в каждой точке $\beta$. Продолжим $\{Y_1, \ldots, Y_{n-2}\}$ до ортонормированного базиса $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ вдоль $\beta$, где $Y_n$ является времениподобным и $\beta' = (Y_{n-1} + Y_n)/\sqrt{2}$. Тогда, используя основные свойства тензора кривизны, получим, что

$$g(R(Y_{n-1}, \beta')\beta', Y_{n-1}) - g(R(Y_n, \beta')\beta', Y_n) =$$

$$= \frac{1}{2} g(R(Y_{n-1}, Y_n)\, Y_n, Y_{n-1}) - \frac{1}{2} g(R\, Y_n, Y_{n-1}) Y_{n-1}, Y_n) = 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tr}(\bar{R}) = \sum_{i=1}^{n-2} \bar{g}\,(\bar{R}(\pi(Y_i), \beta')\beta', \pi(Y_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-2} g(R(Y_i, \beta')\beta', Y_i) = \sum_{i=1}^{n} g(Y_i, Y_i) g(R(Y_i, \beta')\beta', Y_i) =$$

$$= \operatorname{Ric}(\beta', \beta').$$

Эго дает *уравнение Райчаудхури* для якобиевых тензоров вдоль изотропных геодезических:

$$\bar{\theta}' = -\operatorname{Ric}(\beta', \beta') - \operatorname{tr}(\bar{\omega}^2) - \operatorname{tr}(\bar{\sigma}^2) - \frac{\bar{\theta}^2}{n-2}. \qquad (11.4)$$

Те же соображения, что и при доказательстве леммы 11.3, позволяют упростить приведенное выше уравнение для случая, когда $\bar{A}$ является лагранжевым тензорным полем (т. е. когда $\bar{A}^*\bar{A}' = (\bar{A}')^*A$).

**Лемма 11.6.** *Если $\bar{A}$ — лагранжево тензорное поле, то тензор вращения $\bar{\omega}$ вдоль $\beta$ равен нулю.*

Таким образом, мы получаем *свободное от вращения уравнение Райчаудхури* для лагранжевых тензорных полей вдоль изотропных геодезических:

$$\bar{\theta} = -\operatorname{Ric}(\beta', \beta') - \operatorname{tr}(\bar{\sigma}^2) - \frac{\bar{\theta}^2}{n-2}. \qquad (11.5)$$

## 11.2. Типовое и сильное энергетическое условия

В этом разделе мы покажем, что если размерность пространства-времени $(M, g)$ не меньше 3, то при выполнении типового и сильного энергетического условий каждая полная непространственноподобная геодезическая содержит пару сопряженных точек (см. Хокинг и Пенроуз (1970, с. 539)). Времениподобный и изотропный случаи разбираются отдельно. Изложение материала, сходное с представленным в этом разделе, можно найти у Бёлтса (1977), Хокинга и Эллиса (1977, с. 110—116) и Эшенбурга и О'Салливэна (1976).

Прежде всего сформулируем определения типового условия и сильного энергетического условия.

**Определение 11.7.** Времениподобная геодезическая $c: (a, b) \to (M, g)$ называется удовлетворяющей *типовому условию*, если существует некоторое $t_0 \in (a, b)$, для которого эндоморфизм кривизны

$$R(\cdot, c'(t_0))\, c'(t_0)\colon V^{\perp}(c(t_0)) \to V^{\perp}(c(t_0))$$

не является нулевым тождественно. Изотропная геодезическая $\beta: (a, b) \to M$ называется удовлетворяющей *типовому условию*, если существует такое $t_0 \in (a, b)$, что эндоморфизм кривизны

$$\overline{R}(\cdot, \beta'(t_0))\, \beta'(t_0)\colon G(\beta(t_0)) \to G(\beta(t_0))$$

факторпространства $G(\beta(t_0))$ не является тождественно нулевым. Пространство-время $(M, g)$ называется удовлетворяющим *типовому условию*, если этому условию удовлетворяет каждая непродолжаемая непространственноподобная геодезическая.

В добавлении Б показано, что такая формулировка типового условия эквивалентна обычному определению в общей теории относительности; именно, непространственноподобная геодезическая $c$ с касательным вектором $W$ удовлетворяет типовому условию, если на $c$ найдется точка, в которой

$$W^c W^d W_{[a} R_{b]\,cd\,[e} W_{f]} \neq 0.$$

**Определение 11.8.** Пространство-время удовлетворяет *сильному энергетическому условию*, если $\mathrm{Ric}(v, v) \geqslant 0$ для всех непространственноподобных касательных векторов $v \in TM$.

В силу непрерывности условие кривизны определения 11.8 эквивалентно *условию времениподобного схождения* Хокинга и Эллиса (1977, с. 109), состоящему в том, что $\mathrm{Ric}(v, v) \geqslant 0$ для всех времениподобных $v \in TM$. *Условием изотропного схождения* Хокинг и Эллис называют следующее условие кривизны: $\mathrm{Ric}(w, w) \geqslant 0$ для всех изотропных $w \in TM$ (1977, с. 108). Там же (1977, с. 102) четырехмерное пространство-время $(M, g)$ с тензором энергии импульса $T$ (см. добавление В) называется удовлетворяющим

*слабому энергетическому условию*, если $T(v, v) \geqslant 0$ для всех времениподобных $v \in TM$. Если уравнения Эйнштейна выполняются для четырехмерного пространства-времени $(M, g)$ и $T$ с космологической постоянной $\Lambda$, то условие $\mathrm{Ric}(v, v) \geqslant 0$, где $v \in TM$ — произвольный времениподобный вектор, означает, что

$$T(v, v) \geqslant \left(\frac{1}{2}\operatorname{tr} T - \frac{\Lambda}{8\pi}\right) g(v, v)$$

для всех времениподобных $v \in TM$. Следуя Хокингу и Эллису (1977, с. 109), будем говорить, что четырехмерное пространство-время $(M, g)$ и тензор энергии-импульса $T$ удовлетворяют *сильному энергетическому условию*, если $T(v, v) \geqslant (\operatorname{tr} T/2)\, g(v, v)$ для всех времениподобных $v \in TM$. Если $\dim M = 4$ и $\Lambda = 0$, это эквивалентно, как можно видеть, условию $\mathrm{Ric}(v, v) \geqslant 0$ для всех времениподобных $v \in TM$ (см. добавление В). У Хокинга и Пенроуза (1970, с. 539) неравенство $\mathrm{Ric}(v, v) \geqslant 0$, выполненное для всех единичных времениподобных векторов $v \in TM$, называется *энергетичгским условием*. Франкл (1979) и Ли (1975) пользуются тем же определением сильного энергетического условия, что и мы (см. определение 11.8). Обсуждение физической интерпретации этих условий кривизны в общей теории относительности можно найти у Хокинга и Эллиса (1977, разд. 4.3).

Как мы только что отметили выше, если $(M, g)$ удовлетворяет условию времениподобного схождения или сильному энергетическому условию, то $(M, g)$ удовлетворяет и условию изотропного схождения. Ввиду того что несколько теорем жесткости в римановой геометрии связаны с условиями кривизны (см. Чигер и Эбин (1975, с. V и VI)), естественно рассмотреть условие кривизны $\mathrm{Ric}(w, w) = 0$, выполненное для всех изотропных векторов $w \in TM$. Применяя к каждому касательному пространству линейноалгебраические рассуждения, Дайцер и Номидзу (1980а) получили следующий результат о жесткости: если $\dim M \geqslant 3$ и $\mathrm{Ric}(w, w) = 0$ для всех изотропных векторов $w \in TM$, то $(M, g)$ является эйнштейновым, т. е. $\mathrm{Ric} = \lambda g$ для некоторой постоянной $\lambda \in \mathbb{R}$. Поэтому, если $(M, g)$ не является пространством Эйнштейна, то найдутся изотропные векторы, для которых кривизна Риччи отлична от нуля. Предположим далее, что $(M, g)$ глобально гиперболично с гладкой глобально гиперболической временной функцией $h\colon M \to \mathbb{R}$, такой, что для некоторой гиперповерхности Коши $S = h^{-1}(t_0)$ все изотропные кривизны Риччи $\mathrm{Ric}(g)(w, w) > 0$, если $\pi(w) \in S$. Если $(M, g)$ удовлетворяет к тому же условию изотропного схождения, то $M$ допускает метрику $g_1$, глобально конформную $g$ и такую, что глобально гиперболическое пространство-время $(M, g_1)$ удовлетворяет для всех изотропных векторов $w \in TM$ следующему условию кривизны: $\mathrm{Ric}(g_1)(w, w) > 0$ (см. Бим и Эрлих (1978, с. 174, теорема 7.1)).

Существенным шагом в доказательстве того, что всякая полная времениподобная геодезическая в пространстве-времени, удовлетворяющем типовому и сильному энергетическому условиям, содержит пару сопряженных точек, является следующее предложение.

**Предложение 11.9.** *Пусть* $c\colon J \to (M, g)$ — *непродолжаемая геодезическая, удовлетворяющая условию* $\operatorname{Ric}(c'(t), c'(t)) \geqslant 0$ *для всех* $t \in J$. *Пусть* $A$ — *лагранжево тензорное поле вдоль* $c$. *Предположим, что расхождение* $\theta(t) = \operatorname{tr}(A'(t) A^{-1}(t))$ *принимает отрицательное (соответственно положительное) значение* $\theta_1 = \theta(t_1)$ *при* $t_1 \in J$. *Тогда* $\det A(t) = 0$ *для некоторого* $t$ *из интервала* $(t_1, t_1 - (n-1)\theta_1)$ *(соответственно некоторого* $t$ *из интервала* $(t_1 - (n-1)\theta_1, t_1)$ *при условии, что* $t \in J$.

*Доказательство.* Вследствие равенства $\theta = (\det A)' (\det A)^{-1}$ имеем $\det A(t_0) = 0$ при условии, что $|\theta| \to \infty$, когда $t \to t_0$. Тем самым нужно только показать, что на указанных выше интервалах $|\theta| \to \infty$. Положим

$$s_1 = \frac{n-1}{\theta_1}.$$

Уравнение Райчаудхури (11.2), свободное от вращения, для времениподобных геодесических и условие $\operatorname{Ric}(c', c') \geqslant 0$ приводят к неравенству

$$\frac{d\theta}{dt} \leqslant -\frac{\theta^2}{n-1}.$$

Интегрируя это неравенство от $t_1$ до $t > t_1$ (в случае $\theta_1 < 0$), получаем, что

$$\theta(t) \leqslant \frac{n-1}{t + s_1 - t_1}$$

для $t \in (t_1, t_1 - s_1)$. Отсюда следует, что $|\theta(t)|$ бесконечно велика для некоторых $t \in (t_1, t_1 - s_1)$ при условии, что $c(t)$ определена. В случае, если $\theta_1 > 0$, для $t \in (t_1 - s_1, t_1]$ получаем, что

$$\theta(t) \geqslant \frac{n-1}{t + s_1 - t_1}.$$

Отсюда вновь приходим к заключению, что $|\theta(t)|$ является неограниченно большой для некоторых $t \in (t_1 - s_1, t_1)$ при условии, что $c(t)$ определена. □

Покажем теперь, что времениподобная геодезическая в пространстве-времени, удовлетворяющем сильному энергетическому и типовому условиям, должна либо быть неполной, либо содержать пару сопряженных точек.

**Предложение 11.10.** *Пусть* $(M, g)$ — *произвольное пространство-время, размерность которого* $\geqslant 2$. *Предположим, что полная времениподобная геодезическая* $c\colon \mathbb{R} \to (M, g)$ *удовлетворяет условию* $\mathrm{Ric}(c'(t), c'(t)) \geqslant 0$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$. *Если при некотором* $t_1 \in \mathbb{R}$ *отображение* $R(\cdot, c'(t_1))\, c'(t_1)\colon N(c(t_1)) \to N(c(t_1))$ *отлично от нулевого, то* $c$ *имеет пару сопряженных точек.*

Прежде чем доказать предложение 11.10, рассмотрим следующие четыре леммы (см. Бёлтс (1977, с. 30—37)).

**Лемма 11.11.** *Пусть* $c\colon [a, b] \to (M, g)$ — *времениподобная геодезическая без сопряженных точек. Тогда существует единственное* $(1, 1)$-*тензорное поле* $A$ *на* $V^{\perp}(c)$, *которое удовлетворяет дифференциальному уравнению* $A'' + RA = 0$ *с заданными граничными условиями* $A(a)$ *и* $A(b)$.

*Доказательство.* Пусть $S$ — линейное пространство $(1, 1)$-тензорных полей $A$ на $V^{\perp}(c)$, удовлетворяющих уравнению $A'' + RA = 0$. Обозначим через $L(N(c(t)))$ множество линейных эндоморфизмов $N(c(t))$. Линейное преобразование $\varphi$, $S \to L(N(c(a))) \times L(N(c(b)))$ определим по следующему правилу:

$$\varphi(A) = (A(a), A(b)).$$

Чтобы доказать, что $\varphi$ является изоморфизмом, и установить существование единственного решения $A$ вследствие равенства $\dim S = \dim(L(N(c(a)))) + \dim(L(N(c(b)))) = 2(n-1)^2$, необходимо только показать, что $\varphi$ инъективно. Допустим, что $\varphi(A) = (A(a), A(b)) = (0, 0)$. Если $Y(t)$ — произвольное векторное поле, параллельное вдоль $c$, то $J(t) = A(t)\, Y(t)$ является якобиевым полем, для которого $J(a) = J(b) = 0$. Поэтому $J = 0$. С другой стороны, в силу того что $Y(t)$ — произвольное параллельное поле, это означает, что $A(t) = 0$. Последнее показывает инъективность $\varphi$ и завершает доказательство леммы. □

Пусть теперь $c\colon [t_1, \infty) \to (M, g)$ — времениподобная геодезическая без сопряженных точек и $s \in (t_1, \infty)$ фиксировано. Тогда, согласно лемме 11.11, на $V^{\perp}(c)$ существует единственное $(1, 1)$-тензорное поле, которое мы будем обозначать через $D_s$, удовлетворяющее дифференциальному уравнению $D_s'' + RD_s = 0$ с начальными условиями $D_s(t_1) = E$ и $D_s(s) = 0$. Так как $D_s(t_1) = E$, то $\ker(D_s(t_1)) \cap \ker(D_s'(t_1)) = \{0\}$. Тем самым $D_s$ — якобиево поле (см. лемму 9.62). Из того, что $D_s(s) = 0$, вытекает, что $D_s$ является лагранжевым тензорным полем. В ходе доказательства леммы 11.12 будет показано также, что если $A$ — лагранжево тензорное поле на $V^{\perp}(c)$, у которого $A(t_1) = 0$ и $A'(t_1) = E$, то $D_s'(s) = -(A^*)^{-1}(s)$.

**Лемма 11.12.** *Пусть* $c\colon [t_1, \infty) \to (M, g)$ — *времениподобная геодезическая без сопряженных точек и* $A$ — *(единственный) лагранжев тензор на* $V^\perp(c)$, *у которого* $A(t_1) = 0$ *и* $A'(t_1) = E$. *Тогда для каждого* $s \in (t_1, \infty)$ *лагранжев тензор* $D_s$ *на* $V^\perp(c)$, *у которого* $D_s(t_1) = E$ *и* $D_s(s) = 0$, *удовлетворяет равенству*

$$D_s(t) = A(t)\int_t^s (A^*A)^{-1}(\tau)\,d\tau$$

*для всех* $t \in (t_1, s]$. *Тем самым* $D_s(t)$ *является невырожденным для* $t \in (t_1, s)$.

*Доказательство.* Положим $X(\cdot) = A(t)\int_t^s (A^*A)^{-1}(\tau)\,d\tau$. Достаточно показать, что $X'' + RX = 0$, $X(s) = D_s(s) = 0$ и $X'(s) = D_s'(s)$.

Убедимся сначала в справедливости равенства $X'' + RX = 0$. Дифференцируя, получаем, что

$$X'(t) = A'(t)\int_t^s (A^*A)^{-1}(\tau)\,d\tau - A(t)(A^*A)^{-1}(t) =$$
$$= A'(t)\int_t^s (A^*A)^{-1}(\tau)\,d\tau - (A^*)^{-1}(t).$$

Значит,

$$X''(t) = A''(t)\int_t^s (A^*A)^{-1}(\tau)\,d\tau - A'(t)(A^*A)^{-1}(t) -$$
$$- ((A^*)^{-1})'(t) = A''(t)\int_t^s (A^*A)^{-1}(\tau)\,d\tau -$$
$$- A'(t)A^{-1}(t)(A^*)^{-1}(t) + (A^*)^{-1}(A^*)'(A^*)^{-1}(t).$$

Но в силу того, что $A$ является невырожденным лагранжевым тензором, $(A^*)' = A^*A'A^{-1}$, так что $(A^*)^{-1}(A^*)'(A^*)^{-1} = A'A^{-1}(A^*)'$, и мы получаем

$$X''(t) = A''(t)\int_t^s (A^*A)^{-1}(\tau)\,d\tau.$$

Но тогда в силу равенства $A''(t) + R(t)A(t) = 0$

$$X''(t) + R(t)X(t) = [A''(t) + R(t)A(t)]\int_t^s (A^*A)^{-1}(\tau)\,d\tau = 0.$$

Таким образом, $X$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Якоби.

Полагая $t = s$, получим, что

$$X(s) = A(s)\int_s^s (A^*A)^{-1}(\tau)\,d\tau = 0$$

и

$$X'(s) = A'(s)\int_s^s (A^*A)^{-1}(\tau)\,d\tau - (A^*)^{-1}(s) = -(A^*)^{-1}(s).$$

Таким образом, остается проверить, что $D_s'(s) = -(A^*)^{-1}(s)$. Используя равенство $R^* = R$, получаем, что

$$[(A^*)'D_s - A^*D_s']' = (A^*)''D_s + (A^*)'D_s' - (A^*)'D_s' - A^*D_s'' =$$
$$= (A^*)''D_s - A^*D_s'' = -A^*R^*D_s + A^*RD_s = 0.$$

Таким образом, поле $(A^*)'D_s - A^*D_s'$ параллельно вдоль $c$. Начальные условия для $A$ при $t = t_1$ приводят к тому, что $A^*(t_1) = 0$ и $(A^*)'(t_1) = (A')^*(t_1) = E$. Так как $D_s(t_1) = 0$, то

$$((A^*)'D_s - A^*D_s')(t_1) = E.$$

Следовательно, $((A^*)'D_s - A^*D_s')(t) = E$ для всех $t$. Полагая $t = s$, получаем равенство

$$E = ((A^*)'D_s - A^*D_s')(s) = -(A^*D_s')(s),$$

которое означает, что $D_s'(s) = -(A^*)^{-1}(s) = X'(s)$. Отсюда вытекает, что тензоры $D_s$ и $X$ должны совпадать для всех $t$ ($D_s$ и $X$ обращают уравнение $A'' + RA = 0$ в тождество и принимают в точке $t = s$ одинаковые значения).

Наконец, невырожденность $D_s(t)$ для $t \in (t_1, s)$ вытекает из формулы

$$D_s(t) = A(t)\int_t^s (A^*A)^{-1}(\tau)\,d\tau$$

в силу того, что $(A^*A^{-1})(t)$ является положительно определенным самосопряженным тензорным полем для всех $t > t_1$. $\square$

Заметим, что хотя интегральное представление лагранжева тензора $D_s$ вдоль $c$, у которого $D_s(t_1) = E$ и $D_s(s) = 0$, доказано в лемме 11.12 только для $t \in (t_1, s]$, тем не менее в случае, если $c$ определена для всех $t \in \mathbb{R}$ и не имеет сопряженных точек, $D_s(t)$ определено для всех $t \in \mathbb{R}$.

Покажем теперь, что если $c$: $[a, \infty) \to (M, g)$ — времениподобная геодезическая без сопряженных точек, то построенное выше тензорное поле $D_s$ сходится к лагранжеву тензорному полю $D$ при $s \to \infty$. Эта конструкция вполне аналогична построению устойчивых якобиевых полей для некоторых классов полных римановых многообразий без сопряженных точек (см. Эшенбург и О'Салливэн (1976, с. 227 и далее), Грин (1958), Э. Хопф (1948, с. 48)).

**Лемма 11.13.** *Пусть $c$: $[a, \infty) \to (M, g)$ — времениподобная геодезическая без сопряженных точек. Пусть $D_s$, где $s \in [a, \infty) \setminus \{t_1\}$ и $t_1 > a$, — лагранжево тензорное поле вдоль $c$, определяемое условиями $D_s(t_1) = E$ и $D_s(s) = 0$. Тогда $D(t) = \lim_{s\to+\infty} D_s(t)$ также является лагранжевым тензорным полем. Более того, $D(t)$ невырожденно для всех $t$, $t_1 < t < \infty$.*

*Доказательство.* Покажем сначала, что $D_s'(t_1)$ имеет при $s \to \infty$ самосопряженный предел. В силу того что $D_s$ является лагранжевым тензором, имеем $((D_s')^* D_s)(t_1) = (D_s^* D_s)(t_1)$. Используя условие $D_s(t_1) = E$, получаем, что $(D_s')^*(t_1) = D_s'(t_1)$. Поэтому предел $D_s'(t_1)$, если он существует, должен быть самосопряженным линейным отображением. Будем обозначать его через $D'(t_1)\colon N(c(t_1)) \to N(c(t_1))$. Следовательно, нам необходимо показать только, что для каждого $y \in N(c(t_1))$ значения $g(D_s'(t_1)y, y)$ сходятся к некоторому значению $g(D'(t_1)y, y)$.

Чтобы установить существование этого предела, мы докажем, что функция $s \to g(D_s'(t_1)y, y)$ монотонно возрастает по $s$ на луче $t_1 < s < \infty$ и ограничена сверху числом $g(D_a'(t_1)y, y)$. Пусть $t_1 < r < \infty$. Тогда, согласно лемме 11.12, имеем

$$D_s'(t) = A'(t)\int_t^s (A^*A)^{-1}(\tau)\,d\tau - (A^*)^{-1}(t).$$

Тем самым для $t \in (t_1, s)$ получаем, что

$$g(D_s'(t)Y(t), Y(t)) =$$
$$= g\left(\left(A'(t)\int_t^s (A^*A)^{-1}(\tau)\,d\tau\right)(Y(t)), Y(t)\right) - g((A^*)^{-1}(t)Y(t), Y(t)),$$

где $A$ — лагранжево тензорное поле вдоль $c$, удовлетворяющее условию $A(t_1) = 0$, $A'(t_1) = E$, а $Y(t)$ — векторное поле, параллельное вдоль $c$, $Y(t_1) = y$. Таким образом, для $t$, $t_1 < t < r$, получается равенство

$$g(D_s'(t)Y(t), Y(t)) - g(D_r'(t)Y(t), Y(t)) =$$
$$= g\left(\left(A'(t)\int_r^s (A^*A)^{-1}(\tau)\,d\tau\right)(Y(t)), Y(t)\right).$$

Устремляя $t \to t_1^+$ и используя равенства $Y(t_1) = y$ и $A'(t_1) = E$, имеем

$$g(D_s'(t_1)y, y) - g(D_r'(t_1)y, y) = g\left(\left(\int_r^s (A^*A)^{-1}(\tau)\,d\tau\right)(Y(t_1)), Y(t_1)\right).$$

Из того, что $Y$ параллельно вдоль $c$, путем выбора ортонормированного базиса параллельных полей для $V^\perp(c)$ можно убедиться в справедливости соотношения

$$g\left(\left(\int_r^s (A^*A)^{-1}(\tau)\,d\tau\right)(Y(t_1)), Y(t_1)\right) =$$
$$= \int_r^s g((A^*A)^{-1}(\tau)(Y(\tau)), Y(\tau))\,d\tau.$$

Вследствие равенства $(A^*A)^{-1} = A^{-1}(A^*)^{-1}$ последнее соотношение можно записать в следующем виде:

$$g\left(\left(\int_r^s (A^*A)^{-1}(\tau)\,d\tau\right)(Y(t_1)), Y(t_1)\right) =$$
$$= \int_r^s g((A^*)^{-1}(\tau)Y(\tau), (A^*)^{-1}(\tau)Y(\tau))\,d\tau.$$

Полученное выражение должно быть положительным в силу того, что $(A^*)^{-1}(\tau)\, Y(\tau)$ является пространственноподобным вектором в $N(c(t))$ из каждого $\tau \in [r, s]$. Поэтому

$$g(D'_s(t_1)y, y) - g(D'_r(t_1)y, y) > 0$$

и отображение $s \to g(D'_s(t_1)y, y)$ монотонно для всех $s > t_1$, как и требовалось.

Покажем теперь, что $g(D'_s(t_1)y, y) < g(D'_a(t_1)y, y)$ для всех $s > t_1$ и любого $y \in N(c(t))$. Вновь обозначим через $Y$ единственное векторное поле, параллельное вдоль $c$, у которого $Y(t_1) = y$. Пусть $J$ — кусочно-гладкое якобиево поле вдоль $c\,|\,[a, s]$, задаваемое следующим образом:

$$J(t) = \begin{cases} D_a(t)\,Y(t), & a \leqslant t < t_1, \\ D_s(t)\,Y(t), & t_1 \leqslant t \leqslant s. \end{cases}$$

Положим $J_a = J\,|\,[a, t_1]$ и $J_s = J\,|\,[t_1, s]$. Тогда $J(a) = J(s) = 0$, и $J$ при $t = t_1$ является корректно определенным в силу того, что $D_a(t_1) = D_s(t_1) = E$. Используя для $c\,|\,[a, s]$ индексную форму $I$, введенную в разд. 9.1, определение 9.4, получаем, что

$$\begin{aligned} I(J, J) &= I(J, J)_a^{t_1} + I(J, J)_{t_1}^s = \\ &= -g(J'_a(t_1), J_a(t_1)) + g(J'_s(t_1), J_s(t_1)) = \\ &= -g(D'_a(t_1)\,Y(t_1), Y(t_1)) + g(D'_s(t_1)\,Y(t_1), Y(t_1)) = \\ &= -g(D'_a(t_1)y, y) + g(D'_s(t_1)y, y) \end{aligned}$$

(при выводе мы пользуемся формулой (9.2) определения 9.4 и равенствами $D_a(t_1) = D_s(t_1) = E$). Поскольку $J(a) = J(s) = 0$ и $c$ не имеет сопряженных точек на $[a, \infty)$, согласно теореме 9.22 имеем $I(J, J) < 0$. Тем самым

$$g(D'_s(t_1)y, y) < g(D'_a(t_1)y, y)$$

для всех $s > t_1$, и мы заключаем, что самосопряженный тензор $D'(t) = \lim_{s\to+\infty} D'_s(t_1)$ существует.

Пусть $D(t)$ — единственное якобиево тензорное поле вдоль $c$, удовлетворяющее условиям $D(t_1) = E$ и $D'(t_1) = \lim_{s\to+\infty} D'_s(t_1)$. Так как и $D(t)$, и $D_s(t)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению $A'' + RA = 0$, а начальные условия для $D_s$ сходятся к начальным условиям для $D$ при $s \to +\infty$, то $D(t) = \lim_{s\to+\infty} D_s(t)$ и $D'(t) = \lim_{s\to+\infty} D'_s(t)$ для всех $t \in [a, \infty)$. Это означает, что предел $D(t)$ лагранжевых тензоров $D_s(t)$ также должен быть лагранжевым тензором.

Последнее утверждение леммы получаем, воспользовавшись представлением

$$D(t) = A(t) \int_t^\infty (A^*A)^{-1}(\tau)\, d\tau$$

и тем фактом, что $(A^*A)^{-1}(t)$ является положительно определенным самосопряженным тензорным полем для всех $t > t_1$. □

Разобьем теперь лагранжевы тензоры вдоль полной времениподобной геодезической $c\colon (-\infty, \infty) \to (M, g)$, считая выполненными следующие условия: $\mathrm{Ric}(c', c') \geqslant 0$ и $A(t_1) = E$, $R(\cdot, c'(t_1))\, c'(t_1) \neq 0$ для некоторого $t_1 \in \mathbb{R}$, на два класса $\mathscr{L}_+$ и $\mathscr{L}_-$ (см. Бёлтс (1977, с. 36), Хокинг и Эллис (1977, с. 112)). Положим $\mathscr{L}_+ = \{A\colon A$ — лагранжев тензор, для которого $A(t_1) = E$ и $\mathrm{tr}(A'(t_1)) \geqslant 0\}$
и

$\mathscr{L}_- = \{A\colon A$ — лагранжев тензор, для которого $A(t_1) = E$

и $\mathrm{tr}(A'(t_1)) \leqslant 0\}$.

**Лемма 11.14.** *Пусть* $c\colon \mathbb{R} \to (M, g)$ — *полная времениподобная геодезическая, такая, что* $\mathrm{Ric}(c', c') \geqslant 0$ *и* $R(\cdot, c'(t_1)) \times c'(t_1) \neq 0$ *для некоторого* $t_1 \in \mathbb{R}$. *Тогда каждый* $A \in \mathscr{L}_-$ *удовлетворяет условию* $\det A(t) = 0$ *для некоторого* $t > t_1$, *а каждый* $A \in \mathscr{L}_+$ *удовлетворяет условию* $\det A(t) = 0$ *для некоторого* $t < t_1$.

*Доказательство.* Если $A \in \mathscr{L}_-$, то $\theta(t_1) = \mathrm{tr}(A'(t_1)A^{-1}(t_1)) = \mathrm{tr}(A'(t_1)) \leqslant 0$. Применяя свободное от вращения уравнение Райчаудхури (11.2) для времениподобных геодезических, подчиненных условиям $\mathrm{Ric}(c', c') \geqslant 0$ и $\mathrm{tr}(\sigma^2) \geqslant 0$, получим, что $\theta'(t) \leqslant 0$ для всех $t$. Таким образом, $\theta(t) \leqslant 0$ для всех $t > t_1$. Если для некоторого $t_0 > t_1$ выполняется строгое неравенство, то сформулированное утверждение следует из предложения 11.9. Допустим поэтому, что $\theta(t) = 0$ для $t \geqslant t_1$. Тогда $\theta'(t) = 0$ для $t \geqslant t_1$ и $\mathrm{tr}(\sigma^2) = 0$. Отсюда в силу того, что $\sigma$ является самосопряженным, вытекает, что $\sigma = 0$ при $t \geqslant t_1$. Используя равенство $\theta = 0$ и самосопряженность $B$, имеем тогда, что $B = \sigma = 0$. Отсюда, согласно формуле (11.1), получаем, что $R = -B^2 - B' = 0$ для $t \geqslant t_1$, что противоречит условию $R(t_1) \neq 0$.

Если $A \in \mathscr{L}_+$, то доказательство проводится аналогично. □

Теперь мы подошли к доказательству предложения 11.10.

*Доказательство предложения* 11.10. Пусть $c\colon \mathbb{R} \to (M, g)$ — полная времениподобная геодезическая, для которой $\mathrm{Ric}(c'(t), c'(t)) \geqslant 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и $R(\cdot, c'(t_1))\, c'(t_1) \neq 0$ для некоторого $t_1 \in \mathbb{R}$. Предположим, что $c$ не имеет сопряженных точек. Пусть тогда $D = \lim_{s\to\infty} D_s$ — лагранжево тензорное поле на $V^\perp(c)$, $D(t_1) = E$, построенное в лемме 11.13. Вследствие того что $c \mid [t_1, \infty)$ не имеет сопряженных точек, $D(t)$ не вырожден для всех $t \geqslant t_1$. Поэтому $D \notin \mathscr{L}_-$ по лемме 11.14. Значит, $D \in \mathscr{L}_+$ и, более того, $\mathrm{tr}(D'(t_1)) > 0$, так как $D \notin \mathscr{L}_-$. В силу соотноше-

ния $D'(t_1) = \lim_{s\to\infty} D'_s(t_1)$ найдется $s > t_1$, для которого $\operatorname{tr}(D'_s(t_1)) > 0$. Отсюда, согласно лемме 11.14, следует существование $t_2 < t_1$ и ненулевого касательного вектора $v \in N(c(t_2))$, таких, что $D_s(t_2)(v) = 0$. Напомним также (из доказательства леммы 11.12), что хотя $D_s(s) = 0$, но $D'_s(s) = (A^*)^{-1}(s)$ не вырождено. Следовательно, если $Y \in V^\perp(c)$ — (единственное) векторное поле, параллельное вдоль $c$, у которого $Y(t_2) = v$, то $J = D_s(Y)$ является нетривиальным якобиевым полем вдоль $c$, для которого $Y(t_2) = Y(s) = 0$, что и приводит к противоречию. □

**Следствие 11.15.** *Пусть $(M, g)$ — пространство-время размерности $\geqslant 2$, удовлетворяющее сильному энергетическому и типовому условиям. Тогда каждая времениподобная геодезическая из $(M, g)$ либо неполна, либо имеет пару сопряженных точек.*

Рассмотрим теперь вопрос существования сопряженных точек на изотропных геодезических. Методы и результаты для изотропных геодезических во многом те же, что и для времениподобных геодезических, за исключением условия $\dim M \geqslant 3$, которое необходимо вследствие равенства $\dim G(\beta) = \dim M - 2$ и того, что изотропные геодезические в двумерных пространственно-временных многообразиях свободны от сопряженных точек. Применяя свободное от вращения уравнение Райчаудхури (11.5) для изотропных геодезических, можно установить следующий аналог предложения 11.9 (рассуждая так же, как и во времениподобном случае).

**Предложение 11.16.** *Пусть $(M, g)$ — произвольное пространство-время размерности $\geqslant 3$. Предположим, что $\beta\colon J \to (M, g)$ — непродолжаемая изотропная геодезическая, удовлетворяющая условию $\operatorname{Ric}(\beta'(t), \beta'(t)) \geqslant 0$ для всех $t \in J$. Пусть $\bar{A}$ — лагранжево тензорное поле вдоль $\beta$, такое, что расхождение $\bar\theta(t) = \operatorname{tr}(\bar{A}'(t)\bar{A}^{-1}(t)) = [\det \bar{A}(t)]^{-1}[\det \bar{A}(t)]'$ имеет при $t_1 \in J$ отрицательное (соответственно положительное) значение.* Тогда $\det \bar{A}(t) = 0$ *для некоторого $t$ из интервала $\left(t_1, t_1 - \dfrac{n-2}{\bar\theta_1}\right)$ (соответственно некоторого $t$ из интервала $\left(t_1 - \dfrac{n-2}{\bar\theta_1}, t_1\right)$) при условии, что $t \in J$; здесь $\bar\theta_1 = \bar\theta(t_1)$.*

Для всех пространственно-временных многообразий размерности $\geqslant 3$ можно получить также изотропный аналог предложения 11.10, используя соответственно $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar\theta$, $\bar\sigma$ и т. д. вместо $A$, $B$, $\theta$, $\sigma$ и т. д., участвующих в доказательстве для времениподобных геодезических.

**Предложение 11.17.** *Пусть* $\beta: \mathbb{R} \to (M, g)$ — *полная изотропная геодезическая с условием* $\mathrm{Ric}(\beta'(t), \beta'(t)) \geqslant 0$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$. *Если* $\dim M \geqslant 3$ *и для некоторого* $t_1 \in \mathbb{R}$ *отображение* $R(\cdot, \beta'(t))\beta'(t): G(\beta(t)) \to G(\beta(t))$ *ненулевое, то* $\beta$ *обладает парой сопряженных точек.*

Объединяя этот результат со следствием 11.15, получаем следующую теорему.

**Теорема 11.18.** *Пусть* $(M, g)$ — *пространство-время размерности* $\geqslant 3$, *удовлетворяющее сильному энергетическому и типовому условиям. Тогда каждая непространственноподобная геодезическая в* $(M, g)$ *либо неполна, либо имеет пару сопряженных точек. Таким образом, всякая непространственноподобная геодезическая в* $(M, g)$ *без сопряженных точек является неполной.*

Материал, представленный в этом разделе, можно также рассматривать в рамках теории сопряженных точек и теории осцилляции для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. Типлер (1977 г), Киконе и Эрлих (1980)). При таком подходе уравнение Райчаудхури преобразуется заменой переменных к дифференциальному уравнению

$$x''(t) + F(t)\,x(t) = 0,$$

где

$$F(t) = \frac{1}{m}\left[\mathrm{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t)) + 2\sigma^2(t)\right]$$

и

$$m = \begin{cases} n - 1, & \text{если } \gamma \text{ времениподобна,} \\ n - 2, & \text{если } \gamma \text{ изотропна.} \end{cases}$$

## 11.3. Фокальные точки

Понятие сопряженной точки вдоль геодезической можно обобщить до понятия фокальной точки подмногообразия. Пусть $H$ — невырожденное подмногообразие пространства-времени $(M, g)$. В каждой точке $p \in H$ касательное пространство $T_pH$ можно естественным образом отождествить с векторами из $T_pM$, которые касательны к $H$ в точке $p$. Нормальное пространство $T_p^{\perp}H$ состоит из всех векторов, ортогональных $H$ в $p$. Поскольку $H$ не вырождено, $T_p^{\perp}H \cap T_pH = \{0_p\}$ для каждой $p \in H$. Обозначим ограничение экспоненциального отображения на нормальное расслоение $T^{\perp}H$ через $\exp^{\perp}$. Тогда вектор $X \in T_p^{\perp}H$ называется *фокальной точкой* подмногообразия $H$, если отображение $(\exp^{\perp})_*$ вырождается в $X$. Соответствующая точка $\exp^{\perp}(X)$ многообразия $M$ называется *фокальной точкой* подмногообразия $H$ вдоль геодезического сегмента $\exp^{\perp}(tX)$. Если $H$ состоит из одной точки, то

$T_p^{\perp}H = T_pM$ и фокальная точка является просто обычной сопряженной точкой.

Фокальные точки можно определять и при помощи якобиевых полей и второй фундаментальной формы (см. Бишоп и Криттенден (1967, с. 279)). Этот подход, следуя Бёлтсу (1977), мы и будем использовать в этом разделе. Якобиевы поля привлекаются для того, чтобы измерять отклонение (или девиацию) соседних геодезических. Например, если $q$ сопряжена $p$ вдоль геодезической $c$, то геодезические, исходящие из $p$, с начальной касательной, близкой к $c'$ в $p$, будут стремиться сфокусироваться в $q$ вплоть до второго порядка. Они не обязательно проходят через $q$, но должны проходить близко к $q$. При изучении подмногообразий можно взять конгруэнцию геодезических, ортогональных подмногообразию, и использовать якобиевы поля для измерения девиации геодезических в этой конгруэнции. Если $p$ — фокальная точка вдоль геодезической $c$, ортогональной подмногообразию $H$, то некоторые геодезические, близкие $c$ и ортогональные $H$, имеют тенденцию фокусироваться в $p$. Это иллюстрируется на рис. 11.1 для евклидовой плоскости с обычной положительно определенной метрикой и на рис. 11.2 для лоренцевых многообразий.

В разд. 2.5 мы определили вторую фундаментальную форму $S_n$: $T_pH \times T_pH \to \mathbb{R}$ в направлении $n$, вторую фундаментальную форму $S$: $T_p^{\perp}H \times T_pH \times T_pH \to \mathbb{R}$ и оператор второй фундаментальной формы $L_n$: $T_pH \to T_pH$ (см. определение 2.35). Напомним, что $S(n, x, y) = S_n(x, y) = S_n(y, x)$ и $g(L_n(x), y) = S_n(x, y) = g(\nabla_X Y, n)$ для $n \in T_p^{\perp}H$ и $x, y \in T_pH$, где $X$ и $Y$ — локальные векторные продолжения $x$ и $y$.

В этом разделе мы прежде всего коснемся оператора $L_n$: $T_pH \to T_pH$. Заметим, что векторное поле $\eta$, ортогональное $H$ во всех точках $H$, определяет $(1, 1)$-тензорное поле $L_\eta$ на $H$. Рассмотрим сначала пространственноподобные гиперповерхности. Если времениподобное нормальное векторное поле $\eta$ на $H$ удовлетворяет условию $g(\eta, \eta) = -1$, то $L_\eta$ можно вычислять следующим образом.

**Лемма 11.19.** *Пусть $H$ — пространственноподобная гиперповерхность с времениподобным нормальным полем $\eta$ из единичных векторов. Если $x$ — касательный вектор к $H$, то $L_\eta(x) = -\nabla_x \eta$.*

*Доказательство.* В силу условия $g(\eta, \eta) = -1$ справедливо соотношение $0 = x(g(\eta, \eta)) = 2g(\nabla_x \eta, \eta)$, показывающее, что $\nabla_x\eta$ касателен к $H$. Если теперь $Y$ — произвольное векторное поле, касательное к $H$, то $g(\eta, Y) = 0$. Таким образом, $0 = x(g(\eta, Y)) = g(\nabla_x\eta, Y) + g(\eta, \nabla_x Y)$, так что $g(\nabla_x Y, \eta) = g(-\nabla_x\eta, Y)$. Следовательно, $g(L_\eta(x), Y) = g(\nabla_x Y, \eta) = g(-\nabla_x\eta, Y)$. Ввиду произвольности $Y$ получаем требуемый результат. □

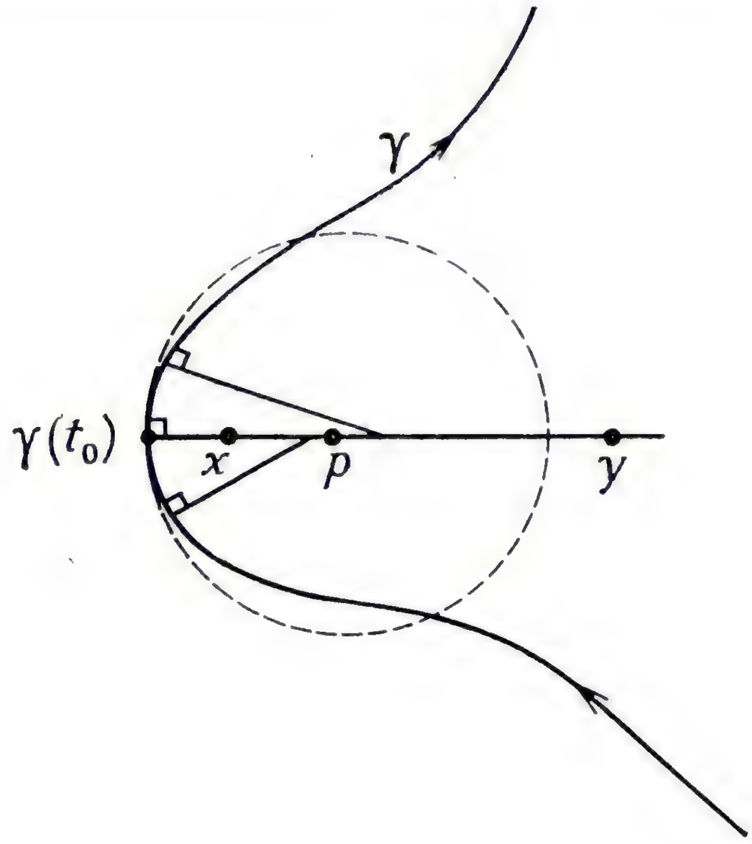



Рис. 11.1. Фокальными точками кривой на евклидовой плоскости являются ее центры кривизны. На рисунке показана соприкасающаяся окружность к кривой $\gamma$ в $t = t_0$. Точка $x$ является внутренней точкой сегмента, идущего из $\gamma(t_0)$ в центр $p$ соприкасающейся окружности. Точка $y$ лежит на луче, идущем из $\gamma(t_0)$ через $p$, за точкой $p$. Для некоторого интервала $t_0 - \varepsilon_1 < t < t_0 + \varepsilon_1$ ближайшей точкой на $\gamma$ к $x$ является $\gamma(t_0)$. С другой стороны, для некоторого интервала $t_0 - \varepsilon_2 < t < t_0 + \varepsilon_2$ точка $\gamma(t)$ является наиболее удаленной от $y$ точкой на $\gamma$. Более того, прямые линии, ортогональные $\gamma$ вблизи $\gamma(t_0)$, как бы фокусируются в $p$.

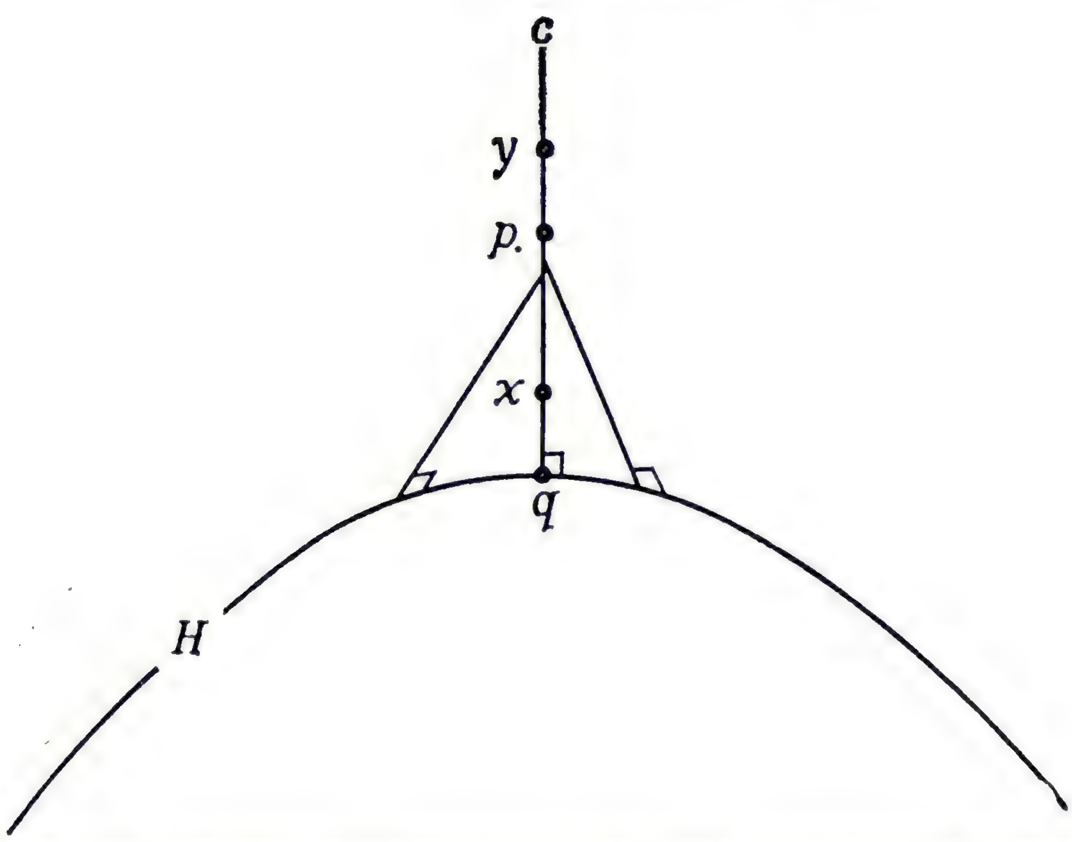



Рис. 11.2. Показано пространственноподобное подмногообразие $H$ лоренцева многообразия $(M, g)$. Здесь $p$ является фокальной точкой для $H$ вдоль геодезической $c$. Геодезический сегмент из $p$ в $q$ содержит $x$ внутри себя, а $y$ лежит на геодезической $c$ за точкой $p$. Все непространственноподобные кривые, «близкие» к $c\,[q, x]$, которые соединяют точки $H$, близкие к $q$, с $x$, имеют длину не больше длины $c\,[q, x]$. С другой стороны, наиболее удаленная от $y$ точка из точек $H$, близких к $q$, не есть $q$. Существуют точки, близкие к $q$ на $H$, которые можно соединить с $y$ времениподобными кривыми длины большей, чем у $c\,[q, y]$. Более того, найдется по крайней мере одна кривая $\gamma$ на $H$, проходящая через $q$ и такая, что семейство геодезических, ортогональных $H$ относительно заданной лоренцевой метрики и исходящих из точек $\gamma$, близких $q$, как бы фокусируется в $p$ вплоть до второго порядка.

Для заданного нормального поля $\eta$ единичных векторов, ортогональных пространственноподобной гиперповерхности $H$, совокупность нормальных времениподобных геодезических, ортогональных $H$, с начальными направлениями $\eta(q)$, где $q \in H$, определяет конгруэнцию времениподобных геодезических. Пусть $c$ —

времениподобная геодезическая из этой конгруэнции, пересекающая $H$ в точке $q$. Обозначим через $J$ векторное поле вариации вдоль $c$ однопараметрического подсемейства конгруэнции. Тогда $J$ является якобиевым полем, измеряющим скорость девиации геодезических однопараметрического подсемейства от $c$. Так как все геодезические из конгруэнции ортогональны $H$, то, используя результат леммы 11.19, можно показать, что $J$ удовлетворяет начальному условию

$$J'(q) = -L_{\eta\,(q)} J.$$

Это подсказывает следующее определение фокальной точки пространственноподобной гиперповерхности в терминах якобиевых полей.

**Определение 11.20.** Пусть $c$ — времениподобная геодезическая, ортогональная пространственноподобной гиперповерхности $H$ в точке $q$. Точка $p$ на $c$ называется *фокальной точкой гиперповерхности $H$ вдоль $c$*, если существует нетривиальное якобиево поле $J$ вдоль $c$, ортогональное $c'$, обращающееся в нуль в точке $p$ и удовлетворяющее условию $J' = -L_\eta J$ в точке $q$.

Предположим, что $A$ — якобиев тензор вдоль времениподобной геодезической $c$, удовлетворяющий условиям $A = E$ и $A' = -L_\eta A = -L_\eta$ в точке $q$, где $c$ пересекает пространственноподобную гиперповерхность $H$. Тогда каждое якобиево поле $J$, ортогональное $c$ и удовлетворяющее в точке $q$ условию $J' = -L_\eta J$, можно представить в следующем виде: $J = AY$, где $Y = Y(t)$ — векторное поле, параллельное вдоль $c$ и ортогональное $c$. Так как существуют $n - 1$ линейно независимых параллельных векторных полей, ортогональных $c$, то существует и $(n-1)$-мерное линейное пространство якобиевых полей вдоль $c$, удовлетворяющих в точке $q$ следующему условию: $J' = -L_\eta J$. Покажем теперь, что такой якобиев тензор $A$, удовлетворяющий условиям $A = E$ и $A' = -L_\eta$ в точке $q$, на самом деле является лагранжевым тензором.

**Лемма 11.21.** *Предположим, что $A$ является якобиевым тензорным полем вдоль времениподобной геодезической $c$. Пусть $c$ ортогональна $H$ в $t_1$ и $L_\eta$ — оператор второй фундаментальной формы на $H$. Если $A(t_1) = E$ и $A'(t_1) = -L_\eta A(t_1)$, то $A$ — лагранжево тензорное поле.*

*Доказательство.* Вторая фундаментальная форма $S_\eta$ в $\eta \in T^\perp H$ симметрична. Ввиду того что $g(L_\eta(x), y) = S_\eta(x, y) = S_\eta(y, x) = g(L_\eta(y), x)$, это означает, что $L_\eta$ самосопряжен в $q$. Тем самым $A'(t_1) = -L_\eta A(t_1) = -L_\eta$ также является самосопряженным. Следовательно, $(A^*)'(t_1) = A'(t_1)$. Из того, что $A(t_1) = A^*(t_1) = E$, вытекает равенство $(A^*)'(t_1) A(t_1) =$

$= A^*(t_1)\, A'(t_1)$. Таким образом, $A$ — лагранжево тензорное поле, как и требовалось. □

Тензор $B = A'A^{-1}$, расхождение $\theta$ и сдвиг $\sigma$ лагранжева тензора $A$, удовлетворяющего условиям леммы 11.21, можно определить, как в разд. 11.1, определение 11.2. Как и раньше, расхождение $\theta$ лагранжева тензора $A$ вдоль $c$ удовлетворяет свободному от вращения уравнению Райчаудхури (11.2) для времениподобных геодезических. Докажем для пространственноподобных гиперповерхностей следующий аналог предложения 11.9.

**Предложение 11.22.** *Пусть $(M, g)$ — произвольное пространство-время размерности $\geqslant 2$. Предположим, что $c\colon J \to (M, g)$ — непродолжаемая времениподобная геодезическая, удовлетворяющая условию $\operatorname{Ric}(c'(t), c'(t)) \geqslant 0$ для всех $t \in J$ и ортогональная пространственноподобной гиперповерхности $H$ в точке $q = c(t_1)$. Если $-\operatorname{tr}(L_\eta)$ принимает в точке $q$ отрицательное (соответственно положительное) значение $\theta_1$, то на интервале с концами $t_1$ и $t_1 - (n-1)/\theta_1$ существует фокальная точка $t$ гиперповерхности $H$ (если только $t \in J$).*

*Доказательство.* Вторая фундаментальная форма $S_\eta$ в $\eta \in T^\perp H$ является симметричной. Поэтому, согласно лемме 11.21, якобиево тензорное поле $A$, удовлетворяющее условиям $A(t_1) = E$ и $A'(t_1) = -L_{\eta(q)}$, является лагранжевым. Тогда $\theta_1 = \theta(t_1) = -\operatorname{tr}(L_\eta)$. В силу предложения 11.9 тензор $A$ на интервале с концами $t_1$ и $t_1 - (n-1)/\theta_1$ имеет точку вырождения. Поэтому требуемый результат вытекает из замечаний, непосредственно следующих за определением 11.20. □

Для изучения фокальных точек подмногообразий полезно иметь под рукой формулу второй вариации для функционала длины дуги. Для полноты мы приведем вывод формул и первой, и второй вариаций. Рассмотрим кусочно-гладкую вариацию $\alpha\colon [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to (M, g)$ кусочно-гладкой времениподобной кривой $c\colon [a, b] \to (M, g)$. Тем самым $\alpha(t, 0) = c(t)$ для всех $t \in [a, b]$, и существует конечное разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$, такое, что $\alpha \mid [t_{i-1}, t_i] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ — гладкая вариация кривой $c \mid [t_{i-1}, t_i]$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ (см. определение 9.6). Предположим также, что соседние кривые $\alpha_s = \alpha(\cdot, s)\colon [a, b] \to (M, g)$ являются времениподобными для всех $s$, $-\varepsilon < s < \varepsilon$ (см. лемму 9.7). Как и в разд. 9.1, определим для $t$, подчиненных условию $t_{i-1} \leqslant t < t_i$, векторное поле $V$ вариации $\alpha$ вдоль $c$ посредством формулы

$$V(t) = (\alpha \mid [t_{i-1}, t_i] \times (-\varepsilon, \varepsilon))_* \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{(t,\,0)} = \left.\frac{d}{ds}(\alpha(t, s))\right|_{s=0}.$$

Положим также

$$\Delta_{t_i}(Y') = Y'(t_i^+) - Y'(t_i^-) \text{ для } i = 1, \ldots, k-1$$

и

$$\Delta_{t_k}(Y') = -Y'(t_k^-), \ \Delta_{t_0}(Y') = Y'(t_0)$$

для любого кусочно-гладкого векторного поля $Y(t)$ вдоль $c$, гладкого на каждом интервале разбиения $(t_{i-1}, t_i)$.

Как и в разд. 9.1, для длины кривой $t \to \alpha(t, s)$ будем пользоваться обозначением $L(s) = L(\alpha_s)$. Тогда формула первой вариации для функционала длины дуги может быть получена обычным образом.

**Предложение 11.23.** *Пусть* $c\colon [a, b] \to (M, g)$ — *нормальная кусочно-гладкая времениподобная кривая. Если* $\alpha\colon [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to (M, g)$ *является вариацией* $c$ *в классе времениподобных кривых, то*

$$L'(0) = \int_a^b g(V, c'')|_{(t,0)}\, dt + \sum_{i=0}^{k} g(V(t_i), \Delta_{t_i}(c')).$$

*Доказательство.* Обозначим через $L_i\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ функционал длины дуги $\alpha \mid [t_{i-1}, t_i] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Тогда $L(s) = \sum_{i=1}^{k} L_i(s)$ и

$$L_i(s) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{-g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial t}, \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)}\, dt.$$

Таким образом,

$$\frac{dL_i}{ds} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{2}\left[-g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial t}, \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\right]^{-1/2} \times \\ \times \left[-2g\left(\nabla_{\partial/\partial t}\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}\right), \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\right] dt. \tag{11.6}$$

С другой стороны, из того, что

$$\frac{d}{dt} g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}, \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right) = g\left(\nabla_{\partial/\partial t}\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}, \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right) + \\ + g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}, \nabla_{\partial/\partial t}\alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

и $g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial t}, \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_{(t,0)} = -1$, вытекает, что

$$\frac{dL_i}{ds}\Big|_{s=0} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}, \nabla_{\partial/\partial t}\alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right) dt - \\ - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d}{dt} g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}, \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right) dt.$$

Тем самым

$$L_i'(0) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(V, c'')\,dt - [g(V, c')]_{t_{i-1}^+}^{t_i^-},$$

откуда следует, что

$$L'(0) = \int_a^b g(V, c'')\,dt + \sum_{i=0}^{k} g(V(t_i), \Delta_{t_i}(c')),$$

как и требовалось. □

Если $c$: $[a, b] \to (M, g)$ — времениподобная геодезическая, то $c'' = \nabla_{c'}c' = 0$ и $\Delta_{t_i}(c') = 0$ для всех $i = 1, \ldots, k-1$. Тем самым для времениподобной геодезической формула первой вариации упрощается.

**Предложение 11.24.** *Если $c$: $[a, b] \to (M, g)$ — нормальный времениподобный геодезический сегмент и $\alpha$: $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to (M, g)$ — вариация $c$, то*

$$L'(0) = -g(V, c')\,|_a^b.$$

Пусть теперь $H$ — пространственноподобная гиперповерхность и $c$: $[a, b] \to (M, g)$ — нормальная времениподобная кривая, у которой $c(a) \in H$. При изучении фокальных точек подмногообразия $H$ можно ограничиться рассмотрением только тех вариаций $\alpha$: $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to (M, g)$ кривой $c$, которые начинаются на $H$ (т. е. $\alpha(a, s) \in H$ для всех $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, и заканчиваются в $c(b)$ (т. е. $\alpha(b, s) = c(b)$ для всех $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Тогда предложение 11.23 дает следующую формулу первой вариации:

$$L'(0) = \int_a^b g(V, c'')\Big|_{(t,0)}\,dt + \sum_{i=1}^{k-1} g(V(t_i), \Delta_{t_i}(c')) + g(V, c')\Big|_{(a,0)}. \tag{11.7}$$

Пусть $H$ — пространственноподобная гиперповерхность без края в $(M, g)$. Зафиксируем $q \in M \setminus H$. Рассмотрим совокупность (возможно, пустую) всех времениподобных кривых, соединяющих с $q$ некоторую точку из $H$. Если эта совокупность содержит наидлиннейшую кривую $c$: $[a, b] \to (M, g)$, то $c$ должна быть гладкой времениподобной геодезической. Это вытекает из следующих обычных рассуждений: 1) времениподобные геодезические локально максимизируют длину дуги и 2) $c$ не имеет углов (в чем нетрудно убедиться при помощи формулы первой вариации). Таким образом, допустим, что нормальная времениподобная геодезическая $c$: $[a, b] \to (M, g)$ является наидлиннейшей кривой, идущей из $H$ в $q$. Если $\alpha$: $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to (M, g)$ — вариация $c$ в классе времениподобных кривых, у которой $\alpha(a, s) \in H$ и $\alpha(b, s) = q$

для всех $s$, $-\varepsilon < s < \varepsilon$, то, пользуясь равенством $V(b) = 0$ и следствием 11.24, получаем

$$L'(0) = g(V(a), c'(a)).$$

С другой стороны, $L'(0) = 0$ вследствие того, что $c$ — кривая максимальной длины среди всех кривых, идущих из $H$ в $q$. Тем самым $V(a)$ ортогонален $c'(a)$. Вследствие того что описанные выше вариации можно построить с произвольным $V(a) \in T_{c(a)}H$, получаем, что $c$ должна быть ортогональной $H$ в $c(a)$. Тем самым мы приходим к следующему стандартному результату. Отметим также, что отсутствие края у $H$ необходимо для того, чтобы экстремаль $c$ была перпендикулярна $H$ в точке $c(a)$.

**Предложение 11.25.** *Пусть $H$ — пространственноподобная гиперповерхность в $(M, g)$ без края. Предположим, что $c$: $[a, b] \to (M, g)$ — времениподобная кривая из $H$ в точку $q = c(b) \notin H$, имеющая максимальную длину среди всех времениподобных кривых из $H$ в $q$. Тогда $c$ является времениподобным геодезическим сегментом, ортогональным $H$ в точке $c(a)$.*

Векторное поле вариации $V(t) = \alpha_*(\partial/\partial s)|_{(t,0)}$ вдоль $c$ может иметь разрывы производных при тех значениях $\{t_1, \ldots, t_{k-1}\}$, параметра $t$, в которых $\alpha$ не гладка. Поэтому нормальная компонента $N = \alpha_*\partial/\partial s + g(\alpha_*\partial/\partial s, \alpha_*\partial/\partial t)\,\alpha_*\partial/\partial t$ поля $V$ вдоль $c$ также может не быть гладкой при этих значениях параметра $t$.

Получим теперь формулу второй вариации для $L''(0)$ (см. Бёлтс (1977, с. 86—89), Хокинг и Эллис (1977, с. 124)).

**Предложение 11.26.** *Пусть $c$: $[a, b] \to (M, g)$ — нормальный времениподобный геодезический сегмент и $\alpha$: $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to (M, g)$ — кусочно-гладкая вариация $c$, гладкая на каждом множестве $(t_{i-1}, t_i) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ для разбиения $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ отрезка $[a, b]$. Обозначим через $V(t) = \alpha_*\,\partial/\partial s|_{(t,0)}$ векторное поле вариации $\alpha$ вдоль $c$ и положим*

$$N(t) = V(t) + g(V(t), c'(t))\,c'(t) =$$

$$= \alpha_* \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{(t,0)} + g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}, \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right) \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(t,0)}.$$

*Тогда*

$$L''(0) = \int_a^b g(N'' + R(V, c')c', N)|_{(t,0)}\,dt +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k} g(N(t_i), \Delta_{t_i}(N')) - g(\nabla_{\partial/\partial s}V, c')\,\Big|_a^b.$$

*Доказательство.* Полагая $L_i = L \mid [t_{i-1}, t_i]$ и вспоминая, что

$$\frac{dL_i}{ds} = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \left[-g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial t}, \ \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\right]^{-1/2} \times$$
$$\times \left[-g\left(\nabla_{\partial/\partial t}\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}\right), \ \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\right] dt,$$

получим

$$\frac{d^2L_i}{ds^2} = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d}{ds}\left\{\left[-g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial t}, \ \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\right]^{-1/2} \times\right.$$
$$\left.\times \left[-g\left(\nabla_{\partial/\partial t}\, \alpha_* \frac{\partial}{\partial s}, \ \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\right]\right\} dt.$$

Дифференцируя выражение под знаком интеграла и используя тождество $\nabla_{\partial/\partial s}\alpha_* \dfrac{\partial}{\partial t} - \nabla_{\partial/\partial t}\alpha_* \dfrac{\partial}{\partial s} = \alpha_* \left[\dfrac{\partial}{\partial s}, \ \dfrac{\partial}{\partial t}\right] = 0$, приведем его к следующему виду:

$$\frac{-g\left(\nabla_{\partial/\partial s}\nabla_{\partial/\partial t}\alpha_* \partial/\partial s, \ \alpha_* \partial/\partial t\right) - g\left(\nabla_{\partial/\partial t}\alpha_* \partial/\partial s, \ \nabla_{\partial/\partial s}\alpha_* \partial/\partial t\right)}{\left[-g\left(\alpha_* \partial/\partial t, \ \alpha_* \partial/\partial t\right)\right]^{1/2}} +$$
$$+ \frac{g\left(\nabla_{\partial/\partial t}\alpha_* \partial/\partial s, \ \alpha_* \partial/\partial t\right) g\left(\Delta_{\partial/\partial t}\alpha_* \partial/\partial s, \ \alpha_* \partial/\partial t\right)}{\left[-g\left(\alpha_* \partial/\partial t, \ \alpha_* \partial/\partial t\right)\right]^{1/2} g\left(\alpha_* \partial/\partial t, \ \alpha_* \partial/\partial t\right)}, \tag{11.8}$$

где $(t, s) \in (t_{i-1}, t_i) \times (-\varepsilon, \ \varepsilon)$. Из того, что $c$ — гладкая геодезическая, получаем, что $\nabla_{\partial/\partial t}\alpha_* \partial/\partial t\,|_{(t,0)} = \nabla_{\partial/\partial t}\, c'(t) = 0$. Поэтому

$$\nabla_{\partial/\partial t} g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}, \ \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(t,0)} = \frac{d}{dt} g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}, \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(t,0)} +$$
$$+ g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}, \ \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla_{\partial/\partial t}\alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(t,0)} = \frac{d}{dt} g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}, \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(t,0)}.$$

А так как $g(N, \ \alpha_* \partial/\partial t)\,|_{(t,0)} = 0$ для всех $t \in (t_{i-1}, \ t_i)$, то

$$g\left(\nabla_{\partial/\partial t}N, \ \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_{(t,0)} = \frac{d}{dt}\left(g\left(N, \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\right)\Big|_{(t,0)} -$$
$$- g\left(N, \nabla_{\partial/\partial t}\alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_{(t,0)} = 0.$$

Используя результаты проведенных вычислений, получаем, что

$$g\left(\nabla_{\partial/\partial t}N, \ \nabla_{\partial/\partial t}\left[g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}, \ \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right]\right)\Big|_{(t,0)} =$$
$$= \frac{d}{dt}\left(g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}, \ \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\right)\Big|_{(t,0)} g\left(\nabla_{\partial/\partial t}N, \ \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_{(t,0)} = 0.$$

Поэтому из соотношения

$$\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{(t,0)} = N(t) - g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial s},\ \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(t,0)}$$

вытекает, что

$$g\left(\nabla_{\partial/\partial t}\alpha_* \frac{\partial}{\partial s},\ \nabla_{\partial/\partial s}\alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_{(t,0)} =$$

$$= g\left(\nabla_{\partial/\partial t}\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}, \nabla_{\partial/\partial t}\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}\right)\Big|_{(t,0)} = g(\nabla_{\partial/\partial t}N,\ \nabla_{\partial/\partial t}N)|_{(t,0)} -$$

$$- 2g\left(\nabla_{\partial/\partial t}N, \nabla_{\partial/\partial t}\left[g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}, \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right]\right)\Big|_{(t,0)} +$$

$$+ g\left(\nabla_{\partial/\partial t}\left[g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial s},\ \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right),\right.$$

$$\left.\nabla_{\partial/\partial t}\left[g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial s},\ \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right]\right)\Big|_{(t,0)} = g(\nabla_{\partial/\partial t}N,\ \nabla_{\partial/\partial t}N)|_{(t,0)} +$$

$$+ \left[\frac{d}{dt} g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial s},\ \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\right]^2 g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial t},\ \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)^2\Big|_{(t,0)} =$$

$$= g(\nabla_{\partial/\partial t}N,\ \nabla_{\partial/\partial t}N)|_{(t,0)} - \left[g\left(\nabla_{\partial/\partial t}\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}\right),\ \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\right]^2\Big|_{(t,0)}.$$

Заменяя $g(\nabla_{\partial/\partial t}\alpha_* \, \partial/\partial s,\ \ \nabla_{\partial/\partial s}\alpha_* \, \partial/\partial t)|_{(t,0)}$ в сумме (11.8) на полученное выражение и используя равенство $g(\alpha_* \, \partial/\partial t, \alpha_* \partial/\partial t)|_{(t,0)} = -1$, приходим к соотношению

$$\frac{d}{ds}\left\{\left[-g\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial t},\ \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\right]^{-1/2}\left[-g\left(\nabla_{\partial/\partial t}\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}, \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\right]\right\}\Big|_{(t,0)} =$$

$$= -g\left(\nabla_{\partial/\partial s}\nabla_{\partial/\partial t}\alpha_* \frac{\partial}{\partial s},\ \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_{(t,0)} - g(\nabla_{\partial/\partial t}N,\ \nabla_{\partial/\partial t}N)|_{(t,0)}.$$

Это позволяет написать формулу

$$L_i''(0) = \int_{t_{i-1}}^{t_i}\left[-g\left(\nabla_{\partial/\partial s}\nabla_{\partial/\partial t}\alpha_* \frac{\partial}{\partial s},\ \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_{(t,0)} - \right.$$

$$\left. - g(\nabla_{\partial/\partial t}N,\ \nabla_{\partial/\partial t}N)|_{(t,0)}\right] dt.$$

Вследствие того что

$$\left[\alpha_* \frac{\partial}{\partial t},\ \alpha_* \frac{\partial}{\partial s}\right] = \alpha_*\left[\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial s}\right] = 0,$$

имеем

$$R\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial t},\ \alpha_* \frac{\partial}{\partial s}\right)\alpha_* \frac{\partial}{\partial s} = \nabla_{\partial/\partial t}\nabla_{\partial/\partial s}\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}\right) - \nabla_{\partial/\partial s}\nabla_{\partial/\partial t}\left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}\right).$$

Так как $c(t) = \alpha(t, 0)$ — геодезическая, то

$$g\left(\nabla_{\partial/\partial t}\nabla_{\partial/\partial s}\alpha_* \frac{\partial}{\partial s},\ \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_{(t,0)} = \frac{d}{dt} g\left(\nabla_{\partial/\partial s}\alpha_* \frac{\partial}{\partial s},\ \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_{(t,0)}.$$

Следовательно,

$$L_i''(0)=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left[g\left(R\left(\alpha_*\frac{\partial}{\partial t},\ \alpha_*\frac{\partial}{\partial s}\right)\alpha_*\frac{\partial}{\partial s},\ \alpha_*\frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_{(t,0)}-\right.$$
$$\left.-g(\nabla_{\partial/\partial t}N,\ \nabla_{\partial/\partial t}N)\,|_{(t,0)}\right]dt-g\left(\nabla_{\partial/\partial s}\alpha_*\frac{\partial}{\partial s},\ \alpha_*\frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_{t_{i-1}}^{t_i}.$$

Из равенства

$$-g(\nabla_{\partial/\partial t}N,\ \nabla_{\partial/\partial t}N)\,|_{(t,0)}=-\frac{d}{dt}g(N,\ \nabla_{\partial/\partial t}N)\,|_{(t,0)}+$$
$$+g(N,\ \nabla_{\partial/\partial t}\nabla_{\partial/\partial t}N)\,|_{(t,0)}$$

определения $V(t)=\alpha_*\,\partial/\partial s\,|_{(t,0)}$ и разложения $L=\sum_{i=1}^k L_i$ получаем

$$L''(0)=\int_a^b[g(R(c',\ V)V,\ c')\,|_{(t,0)}+g(N,\ N'')\,|_{(t,0)}]\,dt-$$
$$-\sum_{i=1}^k g(N,\ N')\Big|_{t_{i-1}^+}^{t_i^-}-g(\nabla_{\partial/\partial s}V,\ c')\Big|_a^b=$$
$$=\int_a^b[g(R(V,\ c')c',\ N-g(V,\ c')\,|_t+g(N,\ N'')\,|_t]\,dt+$$
$$+\sum_{i=0}^k g\left(N,\ \Delta_{t_i}(N')\right)-g(\nabla_{\partial/\partial s}V,\ c')\Big|_a^b,$$

пользуясь тем, что $V=N-g(V,\ c')\,c'$. Таким образом,

$$L''(0)=\int_a^b g(N''+R(V,\ c')c',\ N)\,|_t\,dt+$$
$$+\sum_{i=0}^k g\left(N(t_i),\ \Delta_{t_i}(N')\right)-g(\nabla_{\partial/\partial s}V,\ c')\Big|_a^b,$$

где $\nabla_{\partial/\partial s}V\,|_{(t,0)}=\nabla_{\partial/\partial s}\alpha_*\,\partial/\partial s\,|_{(t,0)}$, как и требовалось. □

Предложение 11.26 имеет приводимое ниже следствие.

**Следствие 11.27.** *Пусть $H$ — пространственноподобная гиперповерхность и $c$: $[a,\ b]\to(M,\ g)$ — нормальная времениподобная геодезическая, ортогональная $H$ в точке $p=c(a)\in H$. Предположим, что $\alpha$: $[a,\ b]\times(-\varepsilon,\ \varepsilon)\to(M,\ g)$ — вариация геодезической $c$, у которой $\alpha(a,\ s)\in H$ и $\alpha(b,\ s)=q=c(b)$ для всех $s$, $-\varepsilon<s<\varepsilon$. Если $V=\alpha_*\,\partial/\partial s\,|_{(t,0)}$ и $N=V+$ $+g(V,\ c')\,c'$, то*

$$L''(0)=\int_a^b g(N''+R(V,\ c')c',\ N)\,|_t\,dt+$$
$$+\sum_{i=1}^{k-1} g\left(N(t_i),\ \Delta_{t_i}(N')\right)+g(N,\ N')\,|_p+g(L_{c'}(N),\ N)\,|_p,$$

*где $L_{c'}$ — оператор второй фундаментальной формы гиперповерхности $H$ в точке $p$.*

*Доказательство.* В силу предложения 11.26 и равенства

$$\sum_{i=0}^{k} g\left(N(t_i),\ \Delta_{t_i}(N')\right) = \sum_{i=1}^{k-1} g\left(N(t_i),\ \Delta_{t_i}(N')\right) + g(N,\ N')\,|_p$$

необходимо показать только, что

$$-g(\nabla_{\partial/\partial s}V,\ c')\,|_a^b = g(L_{c'}(N),\ N).$$

Заметим сначала, что условие $\alpha(b,\ s) = q$ означает, что $\alpha_*\partial/\partial s\,|_{(b,\ s)} = 0$ для всех $s$. Откуда в свою очередь получаем, что $g(\nabla_{\partial/\partial s}V,\ c')\,|_{(b,\ 0)} = 0$. Из того, что $\alpha(a,\ s) \in H$ для всех $s$, $-\varepsilon < s < \varepsilon$, вытекает, что $\alpha_*\,\partial/\partial s\,|_{(a,\ s)}$ касается $H$ для всех $s$ и, следовательно, $N(a) = \alpha_*\partial/\partial s\,|_{(a,0)}$. Пусть $\gamma(s) = \alpha(a,\ s)$ для всех $s$, $-\varepsilon < s < \varepsilon$. Продолжим вектор $N(a) \in T_pH$ до локального векторного поля $X$ вдоль $H$ так, что $X \circ \gamma(s) = \alpha_*\,\partial/\partial s\,|_{(a,\ s)}$ для всех $s$, $-\varepsilon < s < \varepsilon$. Тогда

$$g(L_{c'(a)}(N),\ N) = g(\nabla_{X(a)}X,\ c'(a))$$

по определению 2.35. Пусть теперь $\eta$ — поле единичных векторов, ортогональных $H$ вблизи точки $p$, причем $\eta(p) = c'(a)$. Тогда

$$g(\nabla_{\partial/\partial s}V,\ c'(a)) = g\left(\nabla_{\partial/\partial s}\alpha_*\frac{\partial}{\partial s},\quad \eta\circ\alpha\right)\Big|_{(a,0)} =$$

$$= \frac{d}{ds}\left(g\left(\alpha_*\frac{\partial}{\partial s},\quad \eta\circ\alpha\right)\right)\Big|_{(a,0)} - g\left(\alpha_*\frac{\partial}{\partial s},\quad \nabla_{\partial/\partial s}\eta\circ\alpha\right)\Big|_{(a,0)}.$$

Ввиду того что $\alpha_*\,\partial/\partial s\,|_{(a,\ s)}$ касателен к $H$, получаем, что $g(\alpha_*\,\partial/\partial s,\ \eta\circ\alpha)\,|_{(a,\ s)} = 0$ для всех $s$. Поэтому

$$g(\nabla_{\partial/\partial s}V,\ c'(a)) = -g\left(\alpha_*\frac{\partial}{\partial s},\quad \nabla_{\partial/\partial s}\eta\circ\alpha\right)\Big|_{(a,0)} =$$

$$= -g(N(a),\ \nabla_{N(a)}\eta) = -g(X,\ \nabla_X\eta)\,|_{c(a)} =$$

$$= -X\,|_p(g(X,\ \eta)) + g(\nabla_X X\,|_p,\ \eta(a)) =$$

$$= 0 + g(\nabla_X X\,|_p,\ c'(a)) = g(L_{c'(a)}(N),\ N),$$

как и требовалось. Здесь мы воспользовались тем, что величину $X\,|_p\,(g(X,\ \eta))$ можно вычислить так:

$$X\,|_p(g(X,\ \eta)) = \frac{d}{ds}\left(g(X\circ\gamma(s),\quad \eta(s))\right)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}(0) = 0$$

в силу того, что $X\,|_p = \alpha_*\,\partial/\partial s\,|_{(a,0)}$. □

Ввиду следствия 11.27 индекс $I_H(V,\ V)$ векторного поля $V$ вдоль времениподобной геодезической, ортогональной пространственноподобной гиперповерхности, целесообразно определить следующим образом (см. Бёлтс (1977, с. 94)).

**Определение 11.28.** Пусть $c$: $[a, b] \to (M, g)$ — нормальная времениподобная геодезическая, ортогональная пространственноподобной гиперповерхности $H$ в точке $c(a)$. Пусть $Z$ — кусочно-гладкое векторное поле вдоль $c$, ортогональное $c$. Если $Z(a) \neq 0$ и $Z(b) = 0$, то *индекс $Z$ относительно $H$* задается формулой

$$I_H(Z, Z) = I(Z, Z) + g(L_{c'}(Z), Z)|_a,$$

где

$$I(Z, Z) = \int_a^b g(Z'' + R(Z, c')c', Z)|_t \, dt + \sum_{i=0}^{k-1} g\left(Z(t_i), \Delta_{t_i}(Z')\right).$$

Пусть $\alpha$: $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to (M, g)$ — вариация времениподобной геодезической $c$. Предположим, что векторное поле вариации $V = \alpha_* \partial/\partial s|_{(t, 0)}$ удовлетворяет условиям определения 11.28. Тогда из формулы (9.4) разд. 9.1 и следствия 11.27 вытекает, что $L''(0) = I_H(V, V)$. Это можно записать в следующем виде:

$$L_{**}(V) = I_H(V, V).$$

Используя индексную форму $I_H$, можно показать, что времениподобная геодезическая, ортогональная пространственноподобной гиперповерхности $H$, не может максимизировать длину дуги от $H$ после первой фокальной точки. Напомним, что $V^\perp(c)$ состоит из кусочно-гладких векторных полей вдоль $c$, ортогональных $c$.

**Предложение 11.29.** *Пусть $c$: $[a, b] \to (M, g)$ — нормальная времениподобная геодезическая, ортогональная пространственноподобной гиперповерхности $H$ (без края) в точке $p = c(a) \in H$. Если для некоторого $t_k \in (a, b)$ точка $c(t_k)$ является фокальной точкой для $H$ вдоль $c$, то существует векторное поле вариации $Z \in V^\perp(c)$, у которого $Z(a)$ касается $H$, $Z(b) = 0$ и $I_H(Z, Z) > 0$. Следовательно, найдутся времениподобные кривые, идущие из $H$ в $c(b)$, которое длиннее, чем $c$.*

*Доказательство.* По предположению существует нетривиальное якобиево поле $J_1$ вдоль $c$, ортогональное $c$, у которого $J_1(t_k) = 0$ и $J_1'(a) = -L_{c'(a)}J_1(a)$. Определим кусочно-гладкое якобиево поле $J$ вдоль $c$ следующим образом:

$$J(t) = \begin{cases} J_1(t), & \text{если} \quad a \leqslant t \leqslant t_k, \\ 0, & \text{если} \quad t_k \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

В силу неравенства $\Delta_{t_k}(J') \neq 0$ можно построить гладкое векторное поле $V$, ортогональное $c$ и такое, что $V'(a) = V(a) =$

$= V(b) = 0$ и $g(V(t_k), \Delta_{t_k}(J')) = -1$. Определим векторное поле $Z$ в $V^{\perp}(c)$ по правилу

$$Z = \frac{1}{r} J - rV \quad \text{для} \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Тогда $Z'(a) = -L_{c'(a)} Z(a)$, и индекс $I_H(Z, Z)$ вычисляется так:

$$\begin{aligned} I_H(Z, Z) &= I(Z, Z) + g(L_{c'}(Z), Z)|_a = I(Z, Z) + \\ &+ g(L_{c'}(r^{-1}J - rV), r^{-1}J - rV)|_a = \\ &= I(Z, Z) + r^{-2} g(L_{c'} J, J)|_a = \\ &= I(Z, Z) + r^{-2} g(-J', J)|_a = \\ &= r^{-2} I(J, J) + r^2 I(V, V) - 2I(J, V) + \\ &+ r_g^{-2}(-J', J)|_a = r^2 I(V, V) - 2I(J, V). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$I(J, J) = \sum_{i=0}^{k-1} g(\Delta_{t_i}(J'), J(t_i)) = g(J', J)|_a.$$

Из того, что $J$ является кусочно-гладким якобиевым полем, можно воспользоваться соотношением (9.4) разд. 9.1 для вычисления $I(J, V)$:

$$I(J, V) = g(V(t_k), \Delta_{t_k}(J')) = -1;$$

следовательно,

$$I_H(Z, Z) = r^2 I(V, V) + 2.$$

Полученное равенство показывает, что для достаточно малых $r \neq 0$ индекс удовлетворяет условию

$$I_H(Z, Z) > 0.$$

Из этого последнего неравенства и условия $Z'(a) = -L_{c'(a)}(Z(a))$ вытекает существование малых вариаций кривой $c$ с векторным полем вариации $Z$, которые соединяют $H$ с $c(b)$ и имеют длину, большую длины $c$. □

Обратимся теперь к фокальным точкам вдоль изотропных геодезических, ортогональных $(n-2)$-мерным пространственноподобным подмногообразиям. Если $H$ — пространственноподобное $(n-2)$-мерное подмногообразие, то метрика, индуцированная на $T_pH$, положительно определена, а метрика, индуцированная на $T_p^{\perp}H$, является двумерной метрикой Минковского для каждой точки $p \in H$. Поэтому существуют ровно две изотропные прямые, проходящие через начальную точку в $T_pH$. Так как ориентация во времени пространства-времени $(M, g)$ индуцирует ориентацию во времени на $T_p^{\perp}H$, то для каждого $p \in H$ в $T_p^{\perp}H$ существуют два

корректно определенных изотропных направления в будущее. Тогда локально можно выбрать гладкий псевдоортонормированный базис векторных полей $E_1, \ldots, E_{n-1}, E_n$ на $H$ так, что $E_{n-1}$ и $E_n$ являются направленными в будущее изотропными векторами в $T_p^{\perp}H$, где $p \in H$, т. е.

$$g(E_i, E_j) = \delta_{ij}, \text{ если } 1 \leqslant i, j \leqslant n-2,$$
$$g(E_i, E_{n-1}) = g(E_i, E_n) = 0, \text{ если } 1 \leqslant i \leqslant n-2,$$
$$g(E_n, E_n) = g(E_{n-1}, E_{n-1}) = 0, \; g(E_n, E_{n-1}) = -1.$$

Изотропные векторные поля $E_{n-1}$ и $E_n$, определенные на $H$ локально, можно поднять до операторов второй фундаментальной формы $L_{E_{n-1}}$ и $L_{E_n}$ соответственно, которые являются локально определенными (1, 1)-тензорными полями на $H$.

Если $\beta$: $[a, b] \to (M, g)$ — направленная в будущее изотропная геодезическая, у которой $\beta'(a) = E_n(p)$ (или $\beta'(a) = E_{n-1}(p)$) в $p \in H$, то касательные векторы $E_1(p), \ldots, E_n(p)$ в $p$ можно параллельно перенести вдоль $\beta$ так, чтобы получить псевдоортонормированный базис вдоль $\beta$, за которым сохранится то же обозначение $E_1, \ldots, E_n$. Поэтому множество векторов, ортогональных $\beta'(t)$, представляет собой пространство $N(\beta(t))$, натянутое на $E_1, \ldots, E_{n-2}, \beta'$, и мы можем построить факторпространство $G(\beta(t)) = N(\beta(t))/[\beta'(t)]$ с соответствующим ему факторрасслоением $G(\beta)$, как и в разд. 9.3. Обозначим через $\pi$: $N(\beta) \to G(\beta)$ отображение проектирования. Тогда $\pi \mid T_pH$: $T_pH \to G(\beta(a))$ является изоморфизмом линейных пространств. Значит, оператор второй фундаментальной формы $L_{E_i}$: $T_pH \to T_pH$ можно спроектировать в оператор $\overline{L}_{E_i}$: $G(\beta(a)) \to G(\beta(a))$, полагая

$$\overline{L}_{E_i} = \pi \circ L_{E_i} \circ (\pi \mid T_pH)^{-1} \quad \text{для} \quad i = n-1, n.$$

Пусть $\alpha$: $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to (M, g)$ — вариация изотропной геодезической $\beta$, такая, что $\alpha(a, s) \in H$ для всех $s$, $-\varepsilon < s < \varepsilon$. Пусть $V = \alpha_* \partial/\partial s$ и $W = \alpha_* \partial/\partial t$. Потребуем, чтобы $W(a, s) = E_n(\alpha(a, s))$ для всех $s$, $-\varepsilon < s < \varepsilon$. Тем самым соседняя кривая $\alpha(\cdot, s)$ начинается в $\alpha(a, s)$ на $H$ и имеет начальное направление, задаваемое изотропным вектором $E_n(\alpha, (a, s))$ для всех $s$. Вычислим $V'(a)$.

**Лемма 11.30.** *Пусть, как и выше, $V = \alpha_* \partial/\partial s$ касательно к $H$ при $t = a$ и произвольном $s$. Тогда $V'(a) = -L_{\beta'(a)}(V(a)) + \lambda\beta'(a)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ — некоторая постоянная.*

*Доказательство.* Из равенств $[V, W] = [\alpha_* \partial/\partial s, \alpha_* \partial/\partial t] = \alpha_* [\partial/\partial s, \partial/\partial t] = 0$ получаем, что $\nabla_V W = \nabla_W V = \nabla_{\beta'} V$ при $t = a$, $s = 0$.

С другой стороны, в силу условий $W(a, s) = E_n(\alpha(a, s))$ и $g(E_n, E_n) = 0$ имеем $0 = V(g(W, W)) = 2g(\nabla_V W, W) = 2g(\nabla_W V, W) = 2g(\nabla_{\beta'} V, \beta')$, где $t = a$, $s = 0$. Поэтому

$$\nabla_{\beta'(a)} V \in N(\beta(a)) = T_p H \oplus [\beta'(a)].$$

В силу включений $L_{\beta'(a)}(V(a)) \in T_{\beta(a)} H$ и $\nabla_{\beta'(a)} V \in N(\beta(a))$ для получения сформулированного результата достаточно показать, что

$$g(L_{\beta'(a)}(V(a)), y) = -g(\nabla_{\beta'(a)} V, y)$$

для любого $y \in T_{\beta(a)} H$. Чтобы вычислить $g(L_{\beta'(a)}(V(a)), y)$, продолжим $y$ до локального векторного поля $Y$ вдоль кривой $s \to \alpha(a, s)$, касательного к $H$. Тогда

$$\begin{aligned} g(L_{\beta'(a)}(V(a)), y) &= g(\nabla_V Y|_{(a,0)}, \beta'(a)) = \\ &= g(\nabla_V Y, W)|_{(a,0)} = \alpha_* \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{(a,0)} (g(Y, W) - \\ &- g(Y, \nabla_V W))|_{(a,0)} = 0 - g(Y, \nabla_W V)|_{(a,0)} = \\ &= -g(y, \nabla_{\beta'(a)} V). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались равенством $\alpha_* \partial/\partial s|_{(a,0)}(g(Y, W)) = 0$, которое справедливо вследствие того, что $g(Y, W) = g(Y, E_n) = 0$ вдоль кривой $s \to \alpha(a, s)$.

Если $V$ — якобиево поле, измеряющее девиацию конгруэнции изотропных геодезических, перпендикулярных $H$, то из последнего результата вытекает, что векторный класс $\overline{V} = \pi(V)$ вдоль $\beta$ должен удовлетворять начальному условию

$$\overline{V}'(a) = -\overline{L}_{\beta'(a)} \overline{V}(a)$$

в точке $p = \beta(a) \in H$. Здесь $\overline{L}_{\beta'} = \pi \circ L_{\beta'} \circ (\pi \mid T_p H)^{-1}$, как и выше. Это обосновывает следующее определение фокальной точки вдоль изотропной геодезической, перпендикулярной $H$ (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 113), Бёлтс (1977)).

**Определение 11.31.** Пусть $H$ — пространственноподобное подмногообразие размерности $n - 2$ и $\beta$: $[a, b] \to (M, g)$ — изотропная геодезическая, ортогональная $H$ в точке $p = \beta(a)$. Тогда $t_0 \in (a, b]$ называется *фокальной точкой* для $H$ вдоль $\beta$, если в $G(\beta)$ существует гладкий якобиев класс $\overline{J}$, для которого $\overline{J}'(a) = -\overline{L}_{\beta'(a)} \overline{J}(a)$ и $\overline{J}(t_0) = 0$.

Выше мы отметили, что времениподобная геодезическая, ортогональная пространственноподобной гиперповерхности, не может быть наидлиннейшей непространственноподобной кривой к этой гиперповерхности после первой фокальной точки (см. предложение 11.29). Аналогичный результат справедлив и для изотропной

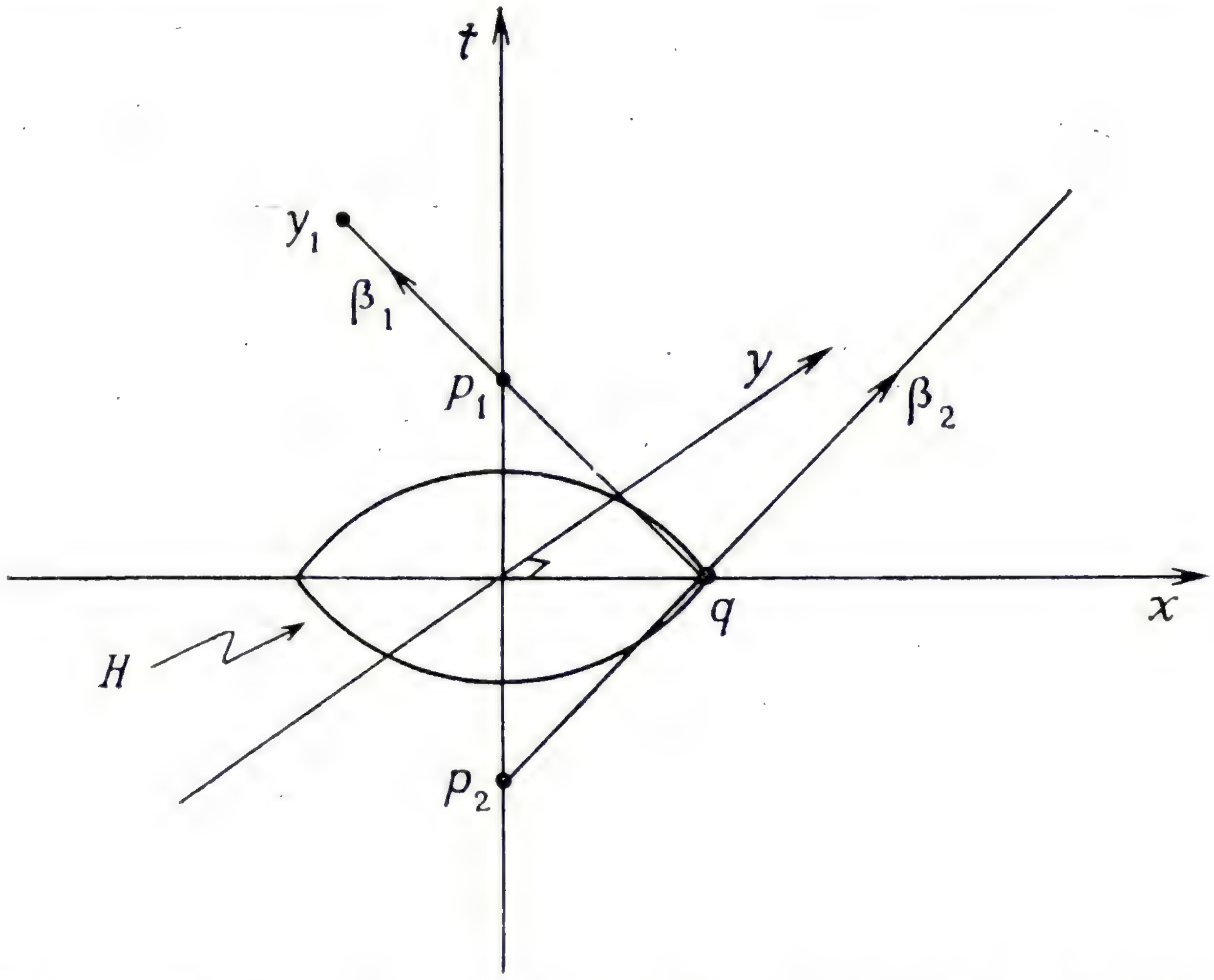



Рис. 11.3. Пусть $(M, g)$ — трехмерное пространство-время Минковского с обычной метрикой $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2$. Пусть $H$ — окружность радиуса $a$ на плоскости $xy$. Тогда $H$ — пространственноподобное подмногообразие коразмерности 2. Для каждой точки $q \in H$ существуют ровно две направленные в будущее изотропные геодезические $\beta_1$ и $\beta_2$, проходящие через $q$ ортогонально $H$. Фокальной точкой для $H$ вдоль $\beta_1$ будет точка $p_1 = (0, 0, a)$, а фокальная точка вдоль $\beta_2$ точка $p_2 = (0, 0, -a)$. Точка $y_1$ лежит на $\beta_1$ за $p_1$. Все точки из $H \setminus \{q\}$ содержатся в хронологическом прошлом точки $y_1$. Тем самым существуют времениподобные кривые, исходящие из точек $H$ в $y_1$ произвольно близко к $q$, и $\beta_1\,[q, y_1]$ не реализует расстояние от $H$ до $y_1$.

геодезической, ортогональной $(n-2)$-мерному пространственноподобному подмногообразию (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 131), Бёлтс (1977, с. 123)). Мы сформулируем этот результат в виде следующего предложения.

**Предложение 11.32.** *Пусть $H$ — пространственноподобное подмногообразие $(M, g)$ размерности $n-2$ и $\beta$: $[a, b] \to (M, g)$ — изотропная геодезическая, ортогональная к $H$ в $\beta(a)$. Если $t_0 \in (a, b)$ — фокальная точка для $H$ вдоль $\beta$, то существует времениподобная кривая из $H$ в $\beta(b)$. Таким образом, $\beta$ не максимизирует расстояние до $H$ после первой фокальной точки.*

Простой пример фокальной точки приведен на рис. 11.3. Пользуясь рассуждениями того же типа, что и в предложении 11.22, можно получить также следующий результат.

**Предложение 11.33.** *Пусть $(M, g)$ — пространство-время размерности $n \geqslant 3$ и $H$ — пространственноподобное подмногообразие размерности $n-2$. Предположим, что $\beta$: $J \to (M, g)$ — непродолжаемая изотропная геодезическая, ортогональная $H$ в точке $p = \beta(t_1)$ и удовлетворяющая условию кривизны*

$\mathrm{Ric}(\beta'(t), \beta'(t)) \geqslant 0$ *для всех* $t \in J$. *Если* $-\mathrm{tr}(L_{\beta'(t_1)})$ *принимает в* $p$ *отрицательное* (*соответственно положительное*) *значение* $\theta_1$, *то существует фокальная точка* $t_0$ *для* $H$ *вдоль* $\beta$, *лежащая в интервале с концами* $t_1$ *и* $t_1-(n-1)/\theta_1$ (*при условии что* $t_0 \in J$).

Особенно важным является случай, когда $H$ — компактное пространственноподобное $(n-2)$-мерное подмногообразие, удовлетворяющее условию $(\mathrm{tr}\, L_{E_n})\cdot(\mathrm{tr}\, L_{E_{n-1}}) > 0$ в каждой точке (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 292)). Если $\{e_1, \ldots, e_{n-2}\}$ — ортонормированный базис для $T_pH$, то $\mathrm{tr}\, L_{E_n}$ можно вычислить по следующей формуле:

$$\mathrm{tr}\, L_{E_n} = \sum_{i=1}^{n-2} g\left(L_{E_n}(e_i), e_i\right).$$

**Определение 11.34.** Предположим, что $H$ является компактным пространственноподобным подмногообразием $(M, g)$ без края размерности $n-2$. Пусть $E_n$ и $E_{n-1}$ — линейно независимые направленные в будущее изотропные векторные поля на $H$ (как и выше). Пусть $L_1$ и $L_2$ — вторые фундаментальные формы на $H$, определяемые $E_n$ и $E_{n-1}$ соответственно. Тогда $H$ называется *замкнутой ловушечной поверхностью*, если $\mathrm{tr}\, L_1$ и $\mathrm{tr}\, L_2$ либо оба положительны на $H$, либо оба отрицательны.

С только что введенным понятием связано понятие ловушечного множества (см. Хокинг и Пенроуз (1970, с. 534—537)). Напомним, что контур будущего для множества $A$ определяется посредством правила $E^+(A) = J^+(A) \setminus I^+(A)$.

**Определение 11.35.** Непустое ахрональное множество $A$ называется *ловушечным для будущего* (соответственно *для прошлого*), если $E^+(A)$ (соответственно $E^-(A)$) компактно. *Ловушечным* называется *множество*, которое является либо ловушечным для будущего, либо ловушечным для прошлого.

В общем случае замкнутая ловушечная поверхность не обязательно является ловушечным множеством и наоборот. Однако в предложении 11.45 мы покажем, что при определенных условиях существование замкнутой ловушечной поверхности означает либо изотропную неполноту, либо наличие ловушечного множества. Для доказательства предложения 11.45 нам будет нужно формулируемое ниже следствие из предложения 11.33.

**Следствие 11.36.** *Пусть* $(M, g)$ — *пространство-время размерности* $\geqslant 3$, *удовлетворяющее условию* $\mathrm{Ric}(v, v) \geqslant 0$ *для всех изотропных векторов* $v \in TM$. *Если* $(M, g)$ *содержит замкнутую ловушечную поверхность* $H$, *то справедливо либо утверждение* (1), *либо утверждение* (2), *либо оба:*

(1) *по меньшей мере одно из множеств* $E^+(H)$ *или* $E^-(H)$ *является компактным.*

(2) $(M, g)$ *изотропно неполно.*

*Доказательство.* Предположим, что $(M, g)$ является изотропно полным и что $\operatorname{tr} L_1 > 0$ и $\operatorname{tr} L_2 > 0$ для всех $q \in H$. Рассмотрим всевозможные направленные в будущее изотропные геодезические, которые начинаются в некоторой точке из $H$ и имеют в этой точке в качестве начального направления либо $E_{n-1}$, либо $E_n$. Каждая такая геодезическая содержит геодезический сегмент, идущий из точки $q \in H$ в первую фокальную точку $p$ для $H$. Пользуясь предложением 11.33 и компактностью $H$, получаем, что объединение всех таких изотропных геодезических сегментов из $H$ в фокальную точку содержится в компактном множестве $K$, состоящем из изотропных геодезических сегментов, начинающихся на $H$. Если теперь $r \in E^+(H)$, то $r$ можно соединить с $H$ направленной в прошлое изотропной геодезической, но нельзя направленной в прошлое времениподобной кривой. Поэтому $r \in K$. Следовательно, $E^+(H) \subset K$. Чтобы показать замкнутость $E^+(H)$, рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ точек из $E^+(H)$. Эта последовательность имеет предельную точку $x \in K$. Из определения $K$ получаем, что $x \in J^+(H)$. Если $x \in I^+(H)$, то открытое множество $I^+(H)$ должно содержать некоторые элементы последовательности $\{x_n\}$ в противоречии с тем, что $x_n \in E^+(H)$ для всех $n$. Тем самым $x \notin I^+(H)$, откуда следует, что $x \in E^+(H)$. Проведенное рассуждение показывает, что $E^+(H)$ является замкнутым подмножеством компактного множества $K$ и, значит, само компактно.

Если предположить, что $(M, g)$ является изотропно полным и что $\operatorname{tr} L_1 < 0$, $\operatorname{tr} L_2 < 0$ для всех $q \in H$, то аналогичные рассуждения показывают, что $E^-(H)$ компактно. Это и доказывает следствие. □

Определим теперь области Коши замкнутого подмножества $S$ многообразия $(M, g)$ (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 224—229)).

**Определение 11.37.** Пусть $S$ — замкнутое подмножество $(M, g)$. *Область Коши будущего* $D^+(S)$ (соответственно *прошлого*) $D^-(S)$) состоит из всех точек $p \in M$, таких, что каждая непродолжаемая в прошлое (соответственно в будущее) непространственноподобная кривая, проходящая через $p$, пересекает $S$. *Областью Коши* множества $S$ является $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$ (рис. 11.4).

Замкнутые ахрональные множества играют важную роль в теории причинности и в теории сингулярностей в общей теории относительности. Они обладают следующим свойством (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 232, 297), Хокинг и Пенроуз (1970, с. 537)).

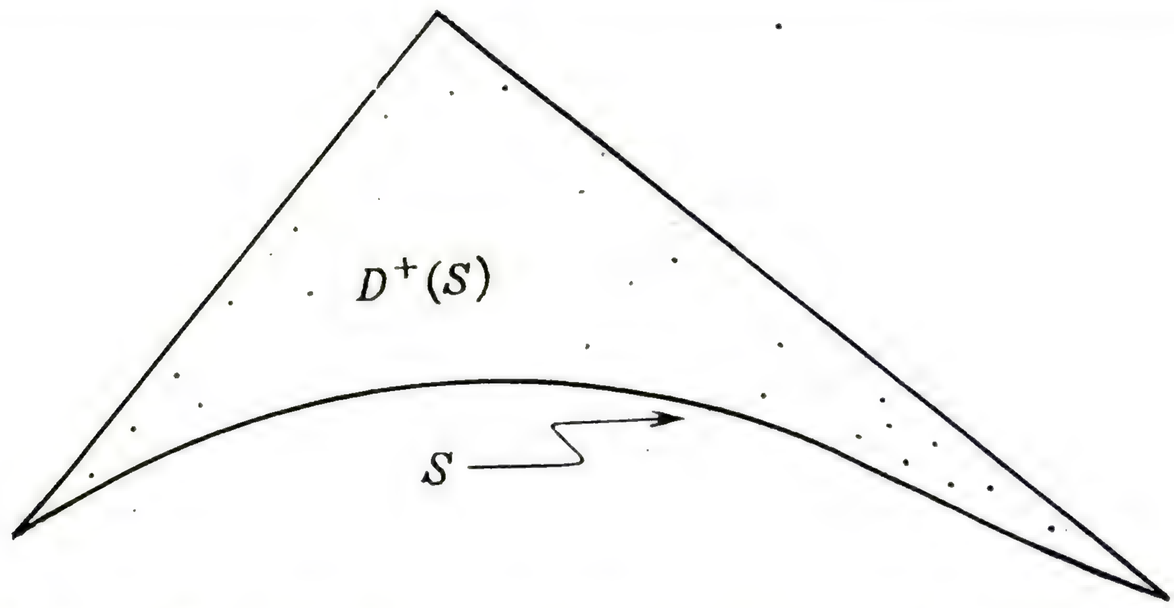



Рис. 11.4. Область Коши будущего $D^+$ $(S)$ множества $S$ состоит из всех точек $P$, таких, что каждая непродолжаемая в прошлое непространственноподобная кривая, проходящая через $p$, пересекает $S$.

**Предложение 11.38.** *Если $S$ — замкнутое ахрональное множество в пространстве-времени* $(M, g)$, *то* $\operatorname{Int}(D(S)) = D(S) \setminus \partial D(S)$ *глобально гиперболично.*

## 11.4. Существование сингулярностей

В этом разделе мы приведем доказательства нескольких теорем о сингулярностях в общей теории относительности. В частности, мы докажем основную теорему Хокинга и Пенроуза (1970, с. 538). Наш подход несколько отличается от подхода Хокинга и Пенроуза (1970) в том, что мы показываем причинную разделяемость $(M, g)$, если оно содержит ловушечное множество, а затем применяем теорему 6.3 Бима и Эрлиха (1979а, с. 172).

Основной прием в доказательстве непространственноподобной неполноты заключается в том, чтобы, используя физические или геометрические допущения на $(M, g)$, построить непродолжаемую непространственноподобную геодезическую, которая является максимальной и, следовательно, не содержит сопряженных точек. Если $(M, g)$ имеет размерность $\geqslant 3$ и удовлетворяет типовому и сильному энергетическому условиям, эта геодезическая, согласно теореме 11.18, должна быть неполной.

Покажем сначала, что хронологическое пространство-время с достаточным числом сопряженных точек является сильно причинным (см. Хокинг и Пенроуз (1970, с. 536), Лернер (1972, с. 41)).

**Предложение 11.39.** *Если $(M, g)$ — хронологическое пространство-время, в котором каждая непродолжаемая изотропная геодезическая имеет пару сопряженных точек, то $(M, g)$ сильно причинно.*

*Доказательство.* Предположим, что сильная причинность нарушается в $p \in M$. Пусть $U$ — выпуклая нормальная окрест-

ность точки $p$, а $V_k \subset U$ — последовательность окрестностей, стягивающихся к $p$. Вследствие того что сильная причинность в точке $p$ нарушается, для каждого $k$ найдется направленная в будущее непространственноподобная кривая $\gamma_k$, которая начинается в $V_k$, покидает $U$ и возвращается в $V_k$. Используя предложение 2.18, можно получить непродолжаемую непространственноподобную предельную для последовательности $\{\gamma_k\}$ кривую $\gamma$, проходящую через $p$. Никакие две точки $\gamma$ хронологически не связаны, так как в противном случае можно было бы получить замкнутую времениподобную кривую, а пространство-время $(M, g)$ хронологическое. Таким образом, $\gamma$ — изотропная геодезическая. Это приводит к противоречию ввиду того, что по предположению каждая изотропная геодезическая имеет сопряженные точки и поэтому содержит точки, которые можно соединить времениподобными кривыми. □

Предложение 11.39 и теорема 11.18 позволяют сформулировать следующий результат.

**Предложение 11.40.** *Пусть $(M, g)$ — хронологическое пространство-время размерности $\geqslant 3$, удовлетворяющее типовому и сильному энергетическому условиям. Тогда $(M, g)$ является либо сильно причинным, либо изотропно неполным.*

Теперь мы можем доказать следующую теорему о сингулярности. Понятие причинно разделяемого пространства-времени было сформулировано в разд. 7.3, определение 7.11.

**Теорема 11.41.** *Пусть $(M, g)$ — хронологическое пространство-время размерности $\geqslant 3$, которое является причинно разделяемым. Если $(M, g)$ удовлетворяет типовому и сильному энергетическому условиям, то $(M, g)$ непространственноподобно неполно.*

*Доказательство.* Предположим, что все непространственноподобные геодезические $(M, g)$ являются полными. Согласно предложению 11.39, пространство-время $(M, g)$ является сильно причинным, а по теореме 11.18 каждая непространственноподобная геодезическая имеет сопряженные точки. С другой стороны, теорема 7.13 обеспечивает существование непродолжаемой максимальной непространственноподобной геодезической. Но тогда эта геодезическая свободна от сопряженных точек, что и приводит к противоречию. □

Напомним, что *контур будущего* (соответственно *прошлого*) подмножества $S$ пространства-времени $(M, g)$ задается соотношением $E^+(S) = J^+(S) \setminus I^+(S)$ (соответственно $E^-(S) = J^-(S) \setminus I^-(S)$). Ахрональное множество $S$ называется *ловушечным для будущего* (соответственно *ловушечным для прошлого*), если $E^+(S)$ (соответственно $E^-(S)$) компактно. Сформулируем условия, при

которых существование ловушечного множества влечет причинную разделяемость.

**Предложение 11.42.** *Пусть* $(M, g)$ — *хронологическое пространство-время размерности* $\geqslant 3$, *каждая непродолжаемая изотропная геодезическая которого имеет сопряженные точки. Если* $(M, g)$ *содержит ловушечное для будущего (соответственно для прошлого) множество* $S$, *то* $(M, g)$ *причинно разделяемо контуром* $E^+(S)$ *(соответственно* $E^-(S)$*).*

*Доказательство.* Предложение 11.39 показывает, что $(M, g)$ сильно причинно. Если предположить, что $S$ является ловушечным для будущего, то следствие 7.16 приводит непродолжаемую в будущее времениподобную кривую $\gamma$ в область Коши будущего $D^+(E^+(S))$. Продолжим $\gamma$ до времениподобной кривой в $(M, g)$, непродолжаемой как в будущее, так и в прошлое, сохранив за полученной кривой прежнее обозначение $\gamma$. Тогда $\gamma$ пересекает ахрональное множество $E^+(S)$ ровно в одной точке $r$. Как и в доказательстве предложения 7.18, выбираем две последовательности $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ на $\gamma$, которые расходятся к бесконечности и для каждого $n$ удовлетворяют соотношению $p_n \ll r \ll q_n$. Чтобы доказать, что $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ и $E^+(S)$ причинно разделяют $(M, g)$, нужно убедиться в том, что для каждого $n$ всякая непространственноподобная кривая $\lambda\colon [0, 1] \to (M, g)$, у которой $\lambda(0) = p_n$ и $\lambda(1) = q_n$, встречает $E^+(S)$. Продолжим заданную кривую $\lambda$ до непродолжаемой в прошлое кривой $\tilde{\lambda}$, проходя по $\gamma$ вплоть до $p_n$, а затем по $\lambda$ от $p_n$ до $q_n$. Так как $q_n \in D^+(E^+(S))$, то кривая $\tilde{\lambda}$ должна пересекать $E^+(S)$. Из того, что $\gamma$ встречает $E^+(S)$ только в $r$, следует, что $\lambda$ пересекает $E^+(S)$. Это рассуждение доказывает предложение для случая, когда множество $S$ является ловушечным для будущего. Аналогично разбирается случай, когда $S$ является ловушечным для прошлого. □

Теорема 11.41 и предложение 11.42 приводят к основной теореме Хокинга и Пенроуза (1970, с. 538).

**Теорема 11.43.** *Ни одно пространство-время* $(M, g)$ *размерности* $\geqslant 3$ *не может удовлетворять одновременно всем трем следующим требованиям:*

(а) $(M, g)$ *не содержит замкнутых времениподобных кривых.*

(б) *Каждая непродолжаемая непространственноподобная геодезическая в* $(M, g)$ *содержит пару сопряженных точек.*

(в) *В* $(M, g)$ *существует ловушечное множество* $S$ *либо для будущего, либо для прошлого.*

Этот результат Хокинга и Пенроуза позволяет сформулировать следующий результат, весьма близкий к теореме 11.41.

**Теорема 11.44.** *Пусть* $(M, g)$ — *хронологическое пространство-время размерности* $\geqslant 3$, *удовлетворяющее типовому и сильному энергетическому условиям. Если* $(M, g)$ *содержит ловушечное множество, то* $(M, g)$ *является непространственноподобно неполным.*

Напомним, что замкнутая ловушечная поверхность — это компактное пространственноподобное подмногообразие размерности $n - 2$, для которого след обеих изотропных вторых фундаментальных форм $L_1$ и $L_2$ либо всегда положителен, либо всегда отрицателен (см. определение 11.34).

**Предложение 11.45.** *Пусть* $(M, g)$ — *сильно причинное пространство-время размерности* $\geqslant 3$, *удовлетворяющее условию* $\mathrm{Ric}(v, v) \geqslant 0$ *для всех изотропных векторов* $v \in TM$. *Если* $(M, g)$ *содержит замкнутую ловушечную поверхность* $H$, *то справедливо по меньшей мере одно из утверждений* (1) *или* (2):

(1) $(M, g)$ *содержит ловушечное множество.*

(2) $(M, g)$ *изотропно неполно.*

*Доказательство.* Допустим, что $(M, g)$ изотропно полное. Тогда на основании следствия 11.36 можно заключить, что хотя бы одно из множеств $E^+(H)$ или $E^-(H)$ является компактным. Рассмотрим случай, когда компактно $E^+(H)$. Положим $S = E^+(H) \cap H$ и покажем, что множество $S$ является ловушечным для будущего. Заметим, что $S$ ахронально в силу ахрональности $E^+(H)$ и компактно как пересечение компактных множеств.

Из соотношения $E^+(H) = J^+(H) \setminus I^+(H)$ следует, что множество $S$ непусто в том и только том случае, если $H$ содержит точки, не лежащие в $I^+(H)$. Однако если бы $H$ целиком содержалось в $I^+(H)$, то существовало бы конечное покрытие компактного множества $H$ открытыми множествами $I^+(p_1), \ldots, I^+(p_n)$, где все $p_i \in H$. Но это означало бы существование замкнутой времениподобной кривой в $(M, g)$ (см. доказательство предложения 2.6), что противоречило бы сильной причинности $(M, g)$. Следовательно, $S \neq \varnothing$.

Чтобы показать, что множество $S$ является ловушечным для будущего, достаточно доказать равенство $E^+(S) = E^+(H)$. Мы убедимся в его справедливости, показав, что $I^+(S) = I^+(H)$ и $J^+(S) = J^+(H)$. Покроем для этого компактное множество $H$ конечным числом открытых множеств $U_1, \ldots, U_k$ из $(M, g)$, каждое из которых является выпуклой нормальной окрестностью, и никакая непространственноподобная кривая, покидающая $U_i$, никогда не возвращается.

В силу того что $H$ — пространственноподобное подмногообразие, можно допускать, что каждое $U_i \cap H$ является ахрональным (этого можно добиться, выбирая $U_i$ достаточно малым).

В силу включения $S \subset H$ ясно, что $I^+(S) \subset I^+(H)$. Чтобы доказать обратное включение $I^+(H) \subset I^+(S)$, предположим, что $q \in I^+(H) \setminus I^+(S)$. Тогда найдется $p_1 \in H$, для которой $p_1 \ll q$. Но $p_1 \in U_{i(1)} \cap H$ для некоторого $i(1)$. Из того, что $q \notin I^+(S)$, имеем $p_1 \notin S$ и, следовательно, $p_1 \notin E^+(H)$. Тем самым существует $p_2 \in H$, связанное с $p_1$ отношением $p_2 \ll p_1$. Так как $U_{i(1)} \cap \cap H$ ахронально, то $p_2 \notin U_{i(1)}$. Значит, $p_2 \in U_{i(2)} \cap H$ для некоторого $i(2) \neq i(1)$. Вновь из условия $q \notin I^+(S)$ получаем, что $p_2 \notin E^+(H)$. Тем самым найдется $p_3 \in H$, для которого $p_3 \ll p_2$. Кроме того, по построению множеств $U_i$ имеем $p_3 \notin \notin U_{i(1)} \cap U_{i(2)}$. Поэтому $p_3 \in U_{i(3)} \cap H$ для некоторого $i(3)$, отличного и от $i(1)$, и от $i(2)$. Продолжая в том же стиле, получим бесконечную последовательность $p_1, p_2, p_3, \ldots$ точек из $H$ и соответствующие им множества $U_{i(1)}, U_{i(2)}, U_{i(3)}, \ldots$, где $i(j_1) \neq i(j_2)$, если $j_1 \neq j_2$. Это противоречит конечности числа множеств $U_i$ в данном покрытии. Следовательно, $I^+(S) = I^+(H)$. Остается показать, что $J^+(S) = J^+(H)$. Заметим, что $J^+(S) \subset \subset J^+(H)$ в силу $S \subset H$. Предположим поэтому, что $q \in J^+(H) \setminus \setminus J^+(S)$. Тогда $q \notin I^+(S) = I^+(H)$, и, следовательно, найдется направленная в будущее изотропная кривая, идущая из некоторой точки $p \in H$ в точку $q$. Из того, что $p \in H$ и $p \notin I^+(H)$, в силу условий $p \leqslant q$ и $q \notin I^+(H)$ имеем $p \in E^+(H)$. Поэтому $p \in E^+(H) \cap H = S$. Отсюда следует, что $q \in J^+(S)$. Последнее включение приводит к противоречию. Тем самым показано, что $S$ является ловушечным множеством для будущего.

Аналогичные рассуждения показывают, что если $(M, g)$ изотропно неполно и $E^-(H)$ компактно, то множество $S = E^-(H) \cap \cap H$ является ловушечным для прошлого. Таким образом, предложение доказано. □

Вполне возможен случай, когда ловушечное множество состоит из единственной точки. Это можно установить, например, таким путем (см. Хокинг и Пенроуз (1970), с. 543), Хокинг и Эллис (1977, с. 297—298)). Пусть $(M, g)$ — пространство-время размерности $\geqslant 3$, удовлетворяющее условию кривизны $\mathrm{Ric}(v, v) \geqslant 0$ для всех изотропных векторов $v \in TM$. Предположим, что найдется такая точка $p$, что на каждой направленной в будущее изотропной геодезической $\beta\colon [0, a) \to (M, g)$, у которой $\beta(0) = p$, расхождение $\bar{\theta}$ лагранжева тензорного поля $\bar{A}$ на $G(\beta)$, удовлетворяющего условиям $\bar{A}(0) = 0$, $\bar{A}'(0) = E$, становится отрицательным для некоторого $t_1 > 0$. Интуитивно ясно, что каждая направленная в будущее изотропная геодезическая, исходящая из точки $p$, имеет в будущем точки $p$ точку $\beta(t_1)$, в которой сходятся все направленные в будущее изотропные геодезические. Поэтому, если данная изотропная геодезическая $\beta$ может быть продолжена до значения $t_1 - (n-2)/\bar{\theta}(t_1)$ параметра $t$, то на $\beta$ существует

точка, изотропно сопряженная точке $t = t_1$ в будущем. Значит, $\beta(t) \in I^+(p)$ для всех $t \geqslant t_1 - (n-2)/\bar{\theta}(t_1)$. Из того, что множество изотропных направлений в $p$ компактно, вытекает, что множество $E^+(p) = J^+(p) \diagdown I^+(p)$ является компактным при условии, что $(M, g)$ изотропно геодезически полно. Тем самым мы получили следующий результат.

**Предложение 11.46.** *Пусть* $(M, g)$ — *пространство-время размерности* $\geqslant 3$, *у которого* $\operatorname{Ric}(v, v) \geqslant 0$ *для всех изотропных* $v \in TM$. *Предположим, что существует точка* $p \in M$, *такая, что на каждой направленной в будущее изотропной геодезической* $\beta$, *исходящей из* $p = \beta(0)$, *расхождение* $\bar{\theta}$ *лагранжева тензорного поля* $\bar{A}$ *на* $G(\beta)$, *подчиненного условиям* $\bar{A}(0) = 0$, $\bar{A}'(0) = E$, *становится отрицательным при некотором* $t_1 > 0$. *Тогда выполняется по крайней мере одно из следующих утверждений*:

(1) $\{p\}$ — *ловушечное множество, т. е.* $E^+(p) = J^+(p) \diagdown I^+(p)$ *компактно.*

(2) $(M, g)$ *изотропно неполно.*

Рассмотрим теперь случай, когда $S$ является компактной связной пространственноподобной гиперповерхностью в $(M, g)$. Если $S$ ахронально, то $E^+(S) = S$ и, значит, $S$ — ловушечное множество. С другой стороны, $S$ может и не быть ахрональным. В самом деле, можно легко построить пример компактной пространственноподобной гиперповерхности $S$, для которой $S \subset I^+(S)$ и, следовательно, $E^+(S) = \varnothing$ (рис. 11.5).

Компактную пространственноподобную гиперповерхность $S$, не являющуюся ахрональной, можно использовать для построения ахрональной замкнутой пространственноподобной гиперповерхности $\tilde{S}$ в накрывающем $M$ многообразии $\tilde{M}$ (см. Герок (1970), Хокинг (1967, с. 194), О'Нейл (1981)). Поэтому, если пространство-время имеет компактную пространственноподобную гиперповерхность, то существует накрывающее многообразие исходного пространства-времени, которое содержит ловушечное множество. Однако при доказательстве непространственноподобной неполноты $(M, g)$ с накрывающими многообразиями для $(M, g)$ можно работать так же, как и с $(M, g)$, вследствие того что $(M, g)$ является непространственноподобно неполным в том и только том случае, когда каждое многообразие, накрывающее $(M, g)$, наделенное метрикой расслоенного произведения, непространственноподобно неполно.

Эти свойства накрывающих пространств вместе с теоремой 11.44 и предложениями 11.45, 11.46 приводят к следующей теореме.

**Теорема 11.47.** *Пусть* $(M, g)$ — *хронологическое пространство-время размерности* $\geqslant 3$, *удовлетворяющее типовому условию*

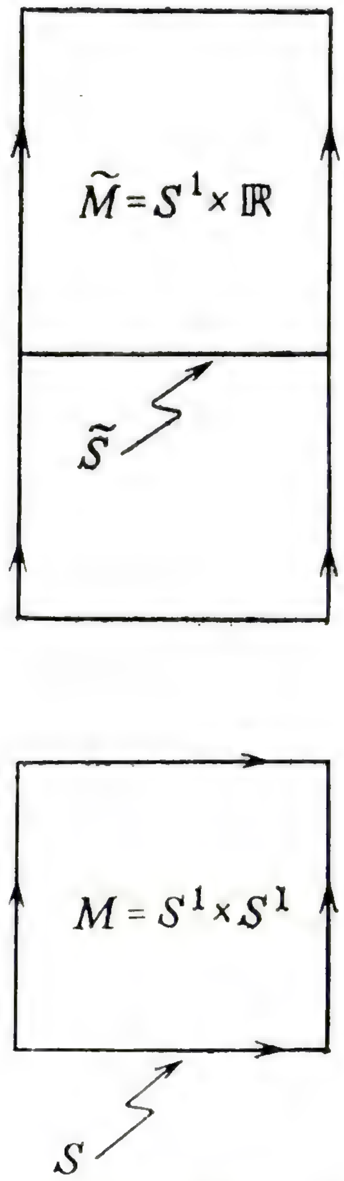



Рис. 11.5. Пусть на $M = S^1 \times S^1$ задана лоренцева метрика $ds^2 = d\theta_1^2 - d\theta_2^2$. Множество $S = \{(\theta_1, 0)\colon \theta_1 \in S^1\}$ является компактным пространственноподобным подмногообразием коразмерности 1 и таким, что $E^+(S) = \varnothing$. Здесь $S$ не является ловушечным множеством вследствие того, что оно не ахронально. Тем не менее существует накрывающее многообразие $(\tilde M, \tilde g)$ пространства-времени $(M, g)$, которое содержит ловушечное множество $\tilde S$, диффеоморфное $S$.

*и сильному энергетическому условию. Тогда пространство-время* $(M, g)$ *является непространственноподобно неполным, если выполнено одно из следующих условий:*

(1) $(M, g)$ *имеет замкнутую ловушечную поверхность.*

(2) $(M, g)$ *содержит точку $p$, такую, что все изотропные геодезические, начинающиеся в $p$, сходятся где-то в будущем (или прошлом) точки $p$.*

(3) $(M, g)$ *содержит компактную пространственноподобную гиперповерхность.*

**Замечание 11.48.** Условия (1) и (2) теоремы 11.47 являются вполне обоснованными космологическими допущениями. Пространства Робертсона—Уокера с физически допустимыми тензорами энергии-импульса, положительной плотностью энергии и $\Lambda = 0$ содержат замкнутые ловушечные поверхности (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 392)) и поэтому удовлетворяют условию (1). Есть также некоторые астрономические основания и для условия (2) (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 395)).

## 11.5. Гладкие границы

В этом разделе мы рассмотрим связь между причинной разделяемостью, непространственноподобной геодезической неполнотой и точками причинной границы $\partial_c M$ (разд. 5.4), в которых эта граница дифференцируема. Многие из наиболее важных про-

странственно-временных многообразий, изучаемых в общей теории относительности, имеют причинные границы, дифференцируемые в большом числе точек. Например, дифференцируемая часть причинной границы пространства-времени Минковского состоит из $\mathcal{J}^+$ и $\mathcal{J}^-$ (рис. 4.4). Так как эти множества соответствуют изотропным гиперповерхностям, то естественно называть точки из $\mathcal{J}^+$ и $\mathcal{J}^-$ изотропными граничными точками. Пенроуз (1968) применил для изучения гладких граничных точек пространства-времени Минковского и других пространственно-временных многообразий конформные методы.

Рассмотрим пространство-время $(M, g)$ с причинной границей $\partial_c M$. Обозначим через $M^*$ причинное пополнение $M \cup \partial_c M$ пространства-времени $(M, g)$. Это пополнение допускает задание на нем хаусдорфовой топологии, причем так, что исходная топология на $M$ согласуется с топологией, индуцированной на $M$ как подмножестве $M^*$ (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 244—245) или разд. 5.4).

Предположим, что $\bar{p} \in \partial_c M$. Пусть $U^* = U^*(\bar{p})$ — окрестность $\bar{p}$ в $M$. Обозначим через $(U, g)$ метрику $g$, ограниченную на множество

$$U = U^* \cap M.$$

*Конформным представлением* окрестности $U^*(\bar{p})$ назовем пространство-время $(M', g')$ и гомеоморфное вложение $f\colon U^* \to M'$, такое, что

(1) $f \mid U$ — гладкое отображение.

(2) Существует гладкая функция $\Omega\colon U \to \mathbb{R}$, у которой $\Omega > 0$ и $\Omega g = f^* g'$ на $U$ (рис. 11.6).

Если конформное представление $f\colon U^* \to M'$ отображает $U^*$ в гладкое многообразие с границей, то мы будем говорить, что $\bar{p}$ — *гладкая граничная точка*.

**Определение 11.49.** Пусть $U^*(\bar{p})$ имеет гладкое конформное представление $f\colon U^* \to M'$, такое, что $f(U)$ — гладкое многообразие с гладкой границей $\partial(f(U))$ в $M'$. Тогда точка $\bar{p}$ называется *гладкой пространственноподобной* (соответственно *изотропной, времениподобной*) *граничной точкой*, если соответствующая граница $\partial(f(U))$ является пространственноподобной (соответственно изотропной, времениподобной) гиперповерхностью в $(M', g')$.

Если $\gamma\colon [a, b) \to M$ — кривая в $M$, у которой $\gamma(t) \to \bar{p} \in M^* \setminus U$ при $t \to b$, то говорят, что кривая имеет граничную точку $\bar{p} \in M^*$ в качестве концевой точки. Если же $\bar{p}$ является гладкой пространственноподобной граничной точкой, то в $M$ нетрудно найти компактное множество $K$, которое должно пересекать все непродолжаемые непространственноподобные кривые с одной концевой точкой в $\bar{p}$. В самом деле, в качестве $K$ можно

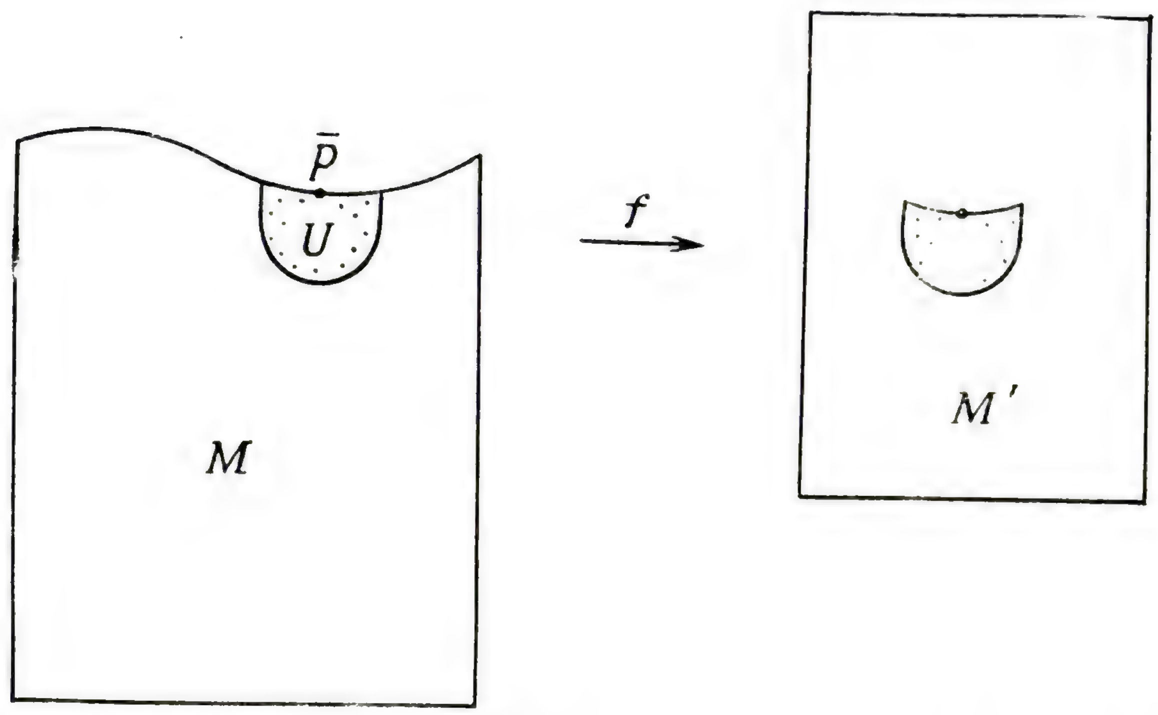



Рис. 11.6. Пространство-время $(M, g)$ имеет причинную граничную точку $\bar{p}$, и $U^* (\bar{p})$ является окрестностью $\bar{p}$ в причинном пополнении $M^* = M \cup \partial_c M$ пространства-времени $(M, g)$. Гомеоморфное вложение $f$: $U^* \to M'$ представляет собой гладкое конформное отображение на $U = U^* (\bar{p}) \cap M$.

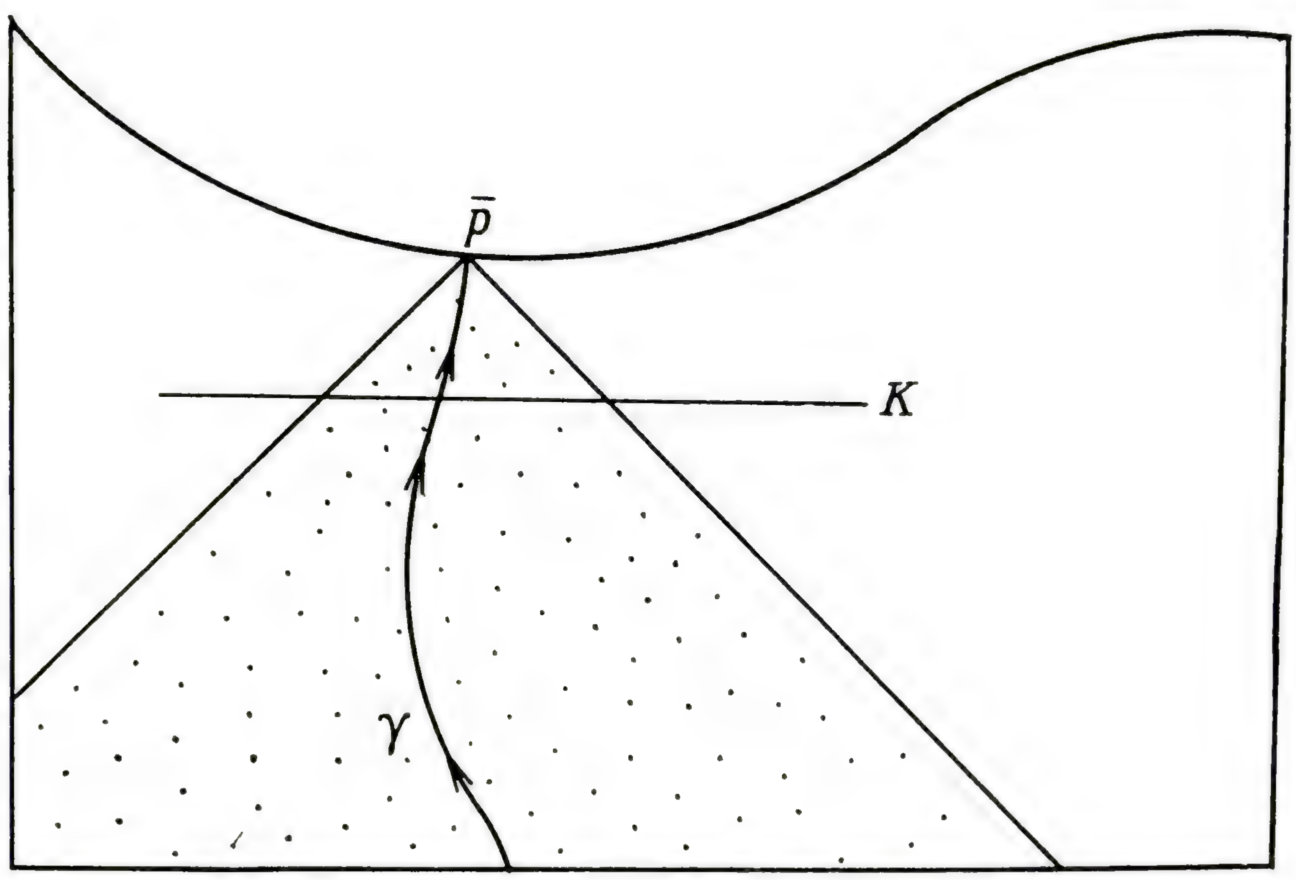



Рис. 11.7. Показано пространство-время с гладкой пространственноподобной граничной точкой $\bar{p}$. Компактное множество $K$ выбрано так, что каждая непространственноподобная кривая $\gamma$ с одной концевой точкой в $\bar{p}$ должна пересекать $K$.

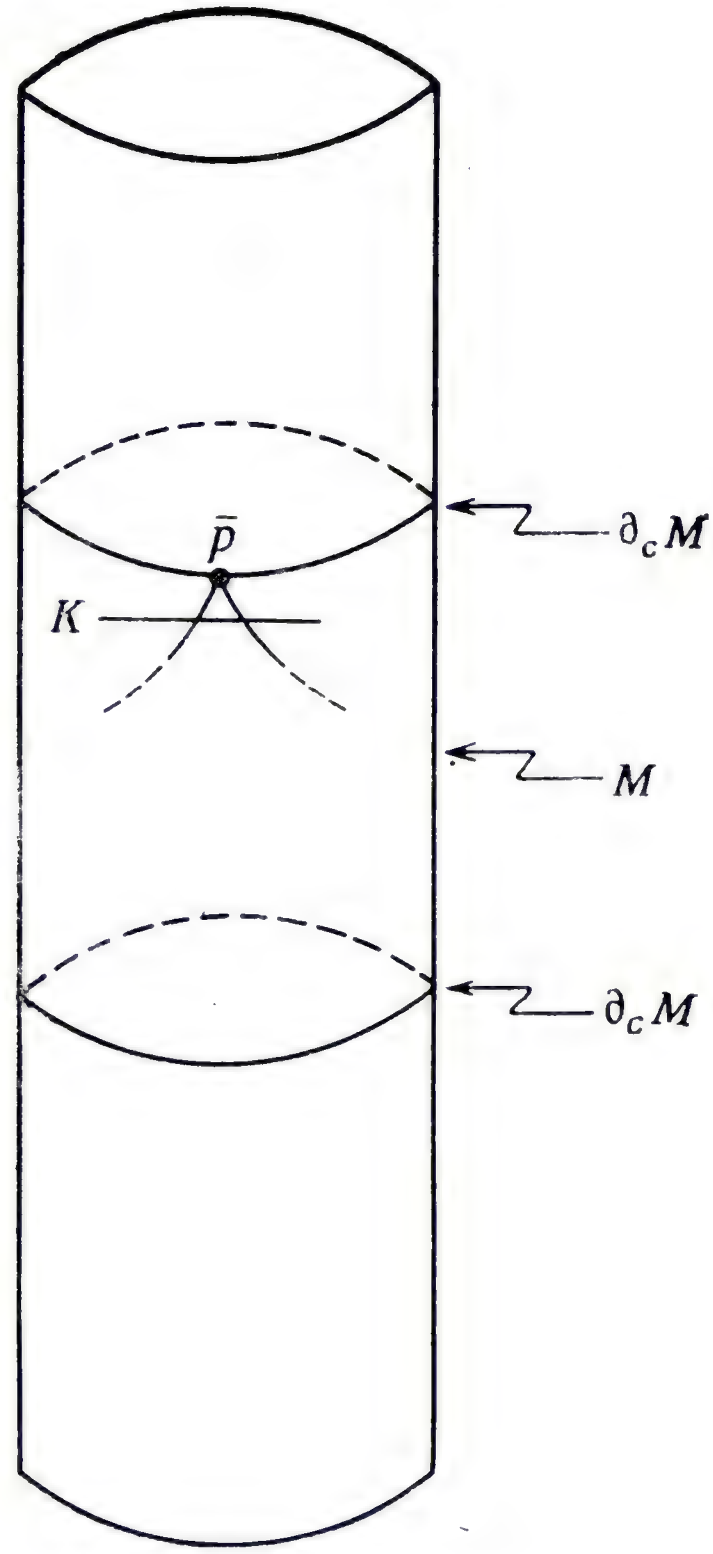



Рис. 11.8. Показана замкнутая космологическая модель Робертсона—Уокера, конформно эквивалентная подмножеству статической вселенной Эйнштейна. Множество $K$ является причинно разделяющим множеством.

взять компактную ахрональную пространственноподобную гиперповерхность с границей (рис. 11.7 и 11.8). Более того, для любой заданной окрестности $U^*(\bar{p})$ точки $\bar{p}$ в $M^*$ компактное множество $K$ можно выбрать так, чтобы оно лежало в $U = U^*(\bar{p}) \cap M$.

**Лемма 11.50.** *Если $(M, g)$ — пространство-время с гладкой пространственноподобной граничной точкой, то $(M, g)$ причинно разделяемо.*

*Доказательство.* Пусть $\bar{p}$ — гладкая пространственноподобная граничная точка пространства-времени $(M, g)$. Выберем компактное ахрональное множество $K$ так, чтобы любая непродолжаемая непространственноподобная кривая, имеющая $\bar{p}$ единственной концевой точкой, должна была встретить $K$. Пусть $\gamma\colon (-\infty, \infty) \to (M, g)$ — непродолжаемая непространственноподобная кривая с концевой точкой $\bar{p}$. Положим $p_n = \gamma(-n)$, $q_n = \gamma(n)$ для каждого $n$. Точки $p_n$ и $q_n$ для всех больших $n$

причинно разделяемы множеством $K$; см. доказательство предложения 11.42. □

**Теорема 11.51.** *Пусть* $(M, g)$ — *хронологическое пространство-время размерности* $\geqslant 3$, *удовлетворяющее типовому и сильному энергетическому условиям. Если у* $(M, g)$ *есть гладкая пространственноподобная граничная точка, то* $(M, g)$ *непространственноподобно неполно.*

*Доказательство* следует из леммы 11.50 и теоремы 11.41. □

Заметим, что если $(M, g)$ имеет одну гладкую пространственноподобную (соответственно изотропную, времениподобную) граничную точку, то $(M, g)$ имеет несчетное множество гладких пространственноподобных (соответственно изотропных, времениподобных) граничных точек. Если $\bar{p} \in \partial_c M$ соответствует точке $x \in \partial(f(U))$ при данном конформном представлении $f: U^* \to M'$ (см. определение 11.49), то точки $y \in (f(U))$, близкие к $x$, также представляют собой гладкие пространственноподобные (соответственно изотропные, времениподобные) граничные точки в $\partial_c M$ при заданном конформном представлении и $\partial(f(U))$ имеет в $M'$ размерность $n - 1$. Следовательно, $M$ содержит несчетное множество гладких пространственноподобных граничных точек. Используя тот факт, что причинно разделяемое множество $K$ можно выбрать произвольно близко к любой гладкой пространственноподобной граничной точке $\bar{p}$, а также то, что в сильно причинном пространстве-времени предел максимальных кривых максимален, можно получить следующий результат.

**Теорема 11.52.** *Пусть* $(M, g)$ — *сильно причинное пространство-время размерности* $\geqslant 3$. *Допустим, что* $(M, g)$ *имеет гладкую пространственноподобную граничную точку и удовлетворяет типовому и сильному энергетическому условиям. Тогда для любой гладкой пространственноподобной граничной точки* $\bar{p}$ *найдется неполная непространственноподобная геодезическая, которая является непродолжаемой и имеет концевую точку* $\bar{p}$. *Таким образом,* $(M, g)$ *имеет несчетное множество неполных непродолжаемых непространственноподобных геодезических.*

*Доказательство.* Из предыдущих замечаний следует, что $(M, g)$ содержит неполную непространственноподобную геодезическую для каждой гладкой непространственноподобной граничной точки. Но мы уже отмечали, что если $(M, g)$ содержит одну пространственноподобную граничную точку, то оно содержит и несчетное множество таких точек. □

Добавление А

# СВЯЗНОСТИ И КРИВИЗНА

Пусть $(M, g)$ — (псевдо)риманово многообразие произвольной сигнатуры $(-, \ldots, -, +, \ldots, +)$. Тогда существует единственная аффинная связность $\nabla$ на $M$, которая согласуется с метрикой $g$ и не имеет кручения. Эта связность, которая называется связностью Леви-Чивита, удовлетворяет одним и тем же соотношениям вне зависимости от того, является $(M, g)$ римановым или псевдоримановым многообразием.

Поэтому для псевдоримановых многообразий геодезические, кривизну, кривизну Риччи, скалярную кривизну и секционную кривизну можно определить в точности так же, как и для римановых метрик. Единственная возникающая при этом трудность состоит в том, что секционная кривизна не определена на вырожденных сечениях касательного пространства, если $(M, g)$ — многообразие непостоянной кривизны. На самом деле в случае постоянной кривизны секционная кривизна вблизи вырожденных сечений лишь ограничена (разд. А.2).

В этом дополнении мы кратко рассмотрим аффинные связности, псевдоримановы многообразия и тензоры кривизны. Используя естественный базис $\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n$, введем их представление в локальных координатах для произвольной карты $(U, x)$ на $M$. Мы покажем также, что если $(M, g)$ — двумерное лоренцево многообразие, то $\mathrm{Ric}(v, v) = 0$ для всех изотропных векторов $v$ из $TM$.

## А.1. Аффинные связности

Обозначим через $\mathfrak{X}(p)$ множество гладких векторных полей, область определения каждого из которых содержит точку $p \in M$, а через $\mathfrak{X}(M)$ множество гладких векторных полей, определенных на всем $M$. *Аффинной связностью* в точке $p$ называется функция $v \to \nabla_v$, которая каждому вектору $v \in T_pM$ ставит в соответствие отображение

$$\nabla_v\colon \mathfrak{X}(p) \to T_pM,$$

обладающее следующими свойствами:

$$\nabla_v (X + Y) = \nabla_v X + \nabla_v Y, \tag{A.1}$$

$$\nabla_{fv+gw} (X) = f \nabla_v X + g \nabla_w X, \tag{A.2}$$

$$\nabla_v (fX) = f \nabla_v X + v (f) X. \tag{A.3}$$

Здесь $f$ и $g$ — гладкие функции, области определения которых содержат точку $p$; $v$, $w \in T_pM$; $X$, $Y$, $\in \mathfrak{X}(p)$.

Аффинной связностью на $M$ называется функция, которая каждой точке $p \in M$ ставит в соответствие аффинную связность $\nabla$ в точке $p$ так, что для любых $X$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ отображение

$$\nabla_X Y\colon\ p \to \nabla_{X(p)} Y$$

является гладким векторным полем на $M$.

Вектор $\nabla_{X(p)} Y = \nabla_X Y\,|_p$ в точке $p \in M$ зависит только от $X(p)$ и от значений $Y$ вдоль любой гладкой кривой, проходящей через точку $p$ и имеющей в этой точке касательный вектор $X(p)$ (см. Хикс (1965, с. 57)). Чтобы убедиться в этом, рассмотрим гладкие векторные поля $E_1, \ldots, E_n$, определенные вблизи точки $p$, которые образуют базис касательного пространства в каждой точке некоторой окрестности точки $p$. Тогда $X(p) = \Sigma X^i (p) E_i (p)$ и $Y = \Sigma X^i E_i$. Отсюда следует, что

$$\nabla_X Y\,|_p = \nabla_{X(p)} (\textstyle\sum Y^i E_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Y^i (p) \nabla_{X(p)} E_i + \sum_{i=1}^{n} X(p) (Y^i) E_i (p) =$$

$$= \sum_{i,\,j=1}^{n} X^j (p) Y^i (p) \nabla_{E_j(p)} E_i + \sum_{i=1}^{n} X(p) (Y^i) E_i (p).$$

Тем самым величины $X^j(p)$, $Y^i(p)$ и $X(p)(Y^i)$ полностью определяют $\nabla_X Y\,|_p$, если известны $\nabla_{E_j(p)} E_i$.

По заданной на $M$ аффинной связности $\nabla$ можно определить параллельный перенос векторных полей вдоль данной кривой $\gamma$: $[a, b] \to M$. Под *векторным полем* $Y$ *вдоль* $\gamma$ понимается гладкое отображение $Y$: $[a, b] \to TM$, такое, что $Y(t) \in T_{\gamma(t)} M$ для каждого $t \in [a, b]$. Для $t_0 \in [a, b]$ можно продолжить $Y$ до гладкого векторного поля, определенного в окрестности точки $\gamma(t_0)$. Тогда можно рассматривать векторное поле $\nabla_{\gamma'(t)} Y$ вдоль $\gamma$, определенное в этой окрестности. Согласно сказанному вначале предыдущего абзаца, это векторное поле вдоль $\gamma$ не зависит от локального продолжения, и, следовательно, $\nabla_{\gamma'} Y$ — корректно определенное векторное поле вдоль $\gamma$. Говорят, что векторное поле $Y$ вдоль $\gamma$, удовлетворяющее равенству $\nabla_{\gamma'} Y(t) = 0$ для всех $t \in [a, b]$, получено посредством *параллельного переноса* вдоль $\gamma$. *Геодезическая* $c$: $(a, b) \to M$ — это гладкая кри-

вая на $M$, касательный вектор $c'$ которой параллельно переносится вдоль $c$. Другими словами, если

$$\nabla_{c'} c' = 0, \tag{A.4}$$

то $c$ является геодезической. *Предгеодезической* называется гладкая кривая $c$, которая путем перепараметризации может быть сделана геодезической. Любой параметр, для которого $c$ является геодезической, называется *аффинным параметром*. Если $s$ и $t$ — два аффинных параметра для одной и той же геодезической, то $s = at + b$ для некоторых постоянных $a$, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Предгеодезическая $c$ называется *полной*, если для некоторых (а следовательно, и для всех) аффинных параметризаций область изменения параметра совпадает с $\mathbb{R}$.

Равенство (A.4) можно выразить также системой линейных дифференциальных уравнений. Выберем на $M$ локальные координаты $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ и рассмотрим *естественный базис* $\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n$ относительно этих координат. Коэффициенты $\Gamma^k_{ij}$ связности $\nabla$ в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ определяются соотношениями

$$\nabla_{\partial/\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{A.5}$$

Используя эти коэффициенты, можно записать уравнение (A.4) в виде системы

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \sum_{i,\, j=1}^{n} \Gamma^k_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0. \tag{A.6}$$

Коэффициенты связности можно использовать также для локального представления действия связности $\nabla$. Если векторные поля $A$ и $B$ имеют локальные представления

$$A = \sum_{i=1}^{n} a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

и

$$B = \sum_{i=1}^{n} b^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

то $\nabla_A B$ имеет локальное представление

$$\nabla_A B = \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial b^k}{\partial x^i} + \sum_{i,\, j=1}^{n} \Gamma^k_{ij} a^i b^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{A.7}$$

*Тензор кручения* $T$ связности $\nabla$ — это функция, которая приписывает каждой точке $p \in M$ билинейное отображение $\mathfrak{X}(p) \times \mathfrak{X}(p) \to \mathfrak{X}(p)$, задаваемое по формуле

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \tag{A.8}$$

Здесь через $[X, Y]$ обозначена скобка Ли векторных полей $X$ и $Y$, которая задается по правилу $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$, где $f$ — произвольная гладкая функция. Значение $T(X, Y)|_p$ зависит только от связности $\nabla$ и значений $X(p)$, $Y(p)$. Следовательно, $T$ определяет билинейное отображение $T_pM \times T_pM \to T_pM$ в каждой точке $p \in M$.

Используя косую симметрию скобки Ли, легко убедиться в том, что $T(X, Y) = -T(Y, X)$ и, значит, тензор $T$ кососимметричен. Из того, что $[\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j] = 0$ для всех $i, j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$, получаем, что

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{A.9}$$

Таким образом, тензор кручения определяет меру несимметричности коэффициентов связности. Ясно, что $T = 0$ в том и только том случае, когда эти коэффициенты симметричны по нижним индексам. Аффинная связность $\nabla$, тензор кручения которой $T = 0$, называется *связностью без кручения* или *симметричной связностью*.

*Кривизна* $R$ связности $\nabla$ есть функция, которая каждой точке $p \in M$ и любой паре $X, Y \in \mathfrak{X}(p)$ ставит в соответствие $f$-линейное отображение $R(X, Y)$: $\mathfrak{X}(p) \to \mathfrak{X}(p)$, задаваемое формулой

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \tag{A.10}$$

Поэтому кривизна дает меру некоммутативности $\nabla_X$ и $\nabla_Y$. Следует заметить, что некоторые авторы пользуются иным выбором знака для кривизны:

$$R(X, Y)Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z;$$

соответственно изменяются и некоторые из свойств кривизны, приводимых ниже.

Из того, что отображение $(X, Y, Z) \to R(X, Y)Z$ из $\mathfrak{X}(p) \times \mathfrak{X}(p) \times \mathfrak{X}(p)$ в $\mathfrak{X}(p)$ $f$-трилинейно, вытекает, что $R$ представляет собой тензорное поле и что $R(X, Y)Z|_p$ зависит только от $\nabla$, $X(p)$, $Y(p)$ и $Z(p)$. Следовательно, если $x, y, z \in T_pM$, то эти векторы можно локально продолжить до соответствующих векторных полей $X$, $Y$, $Z$ и определить $R(x, y)z = R(X, Y)Z|_p$.

*Тензор кривизны* — это (1, 3)-тензорное поле, также обозначаемое $R$. Если $\omega \in T_p^* M$ — кокасательный вектор в точке $p$ и $x, y, z \in T_pM$, то определена

$$R(\omega, x, y, z) = (\omega, R(x, y)z) = \omega(R(x, y)z). \tag{A.11}$$

В локальных координатах имеем

$$R = \sum_{i,\,j,\,k,\,m} R^i_{jkm} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^m, \tag{A.12}$$

где

$$R^i_{jkm} = \frac{\partial \Gamma^i_{mj}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^m} + \sum_{a=1}^{n} \left(\Gamma^a_{mj}\Gamma^i_{ka} - \Gamma^a_{kj}\Gamma^i_{ma}\right). \tag{A.13}$$

Если $X = \Sigma X^i\,\partial/\partial x^i$, $Y = \Sigma Y^i\,\partial/\partial x^i$ и $Z = \Sigma Z^i\,\partial/\partial x^i$, то

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,\,j,\,k,\,m} R^i_{jkm} Z^j X^k Y^m \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{A.14}$$

## A.2. Псевдоримановы многообразия

Пусть $M$ — гладкое паракомпактное хаусдорфово многообразие и $\pi$: $TM \to M$ — касательное расслоение $M$. *Псевдоримановой метрикой* $g$ на $M$ называется гладкое симметричное тензорное поле типа (0, 2) на $M$, такое, что для каждой точки $p \in M$ тензор $g|_p$: $T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ является невырожденным скалярным произведением с сигнатурой $(-, \ldots, -, +, \ldots, +)$. Невырожденность здесь означает, что для каждого ненулевого вектора $v \in T_pM$ найдется вектор $w \in T_pM$, такой, что $g_p(v, w) \neq 0$. Мы ограничимся рассмотрением только гладких метрик, хотя некоторые авторы изучали псевдоримановы метрики и более общего вида (см. Паркер (1979), Тауб (1980)).

В локальных координатах $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ на $M$ псевдориманова метрика $g$ может быть представлена в следующем виде:

$$g|_U = \sum_{i,\,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, dx^i \otimes dx^j,$$

где $g_{ij} = g_{ji}$ и $\det g \neq 0$. Если у метрики $g$ $s$ отрицательных и $r = n - s$ положительных собственных значений, то ее сигнатура будет обозначаться через $(s, r)$. Для каждой фиксированной точки $p \in M$ существуют локальные координаты, в которых $g|_p$ можно записать в виде $\operatorname{diag}\{-1, \ldots, -1, +1, \ldots, +1\}$.

У каждого псевдориманова многообразия $(M, g)$ есть связанное с ним псевдориманово многообразие $(M, -g)$, получаемое путем замены $g$ на $-g$. За исключением некоторых второстепенных изменений в знаках, между $(M, g)$ и $(M, -g)$ нет существенных различий. Поэтому результаты для пространств сигнатуры $(s, r)$ всегда можно перевести в соответствующие результаты для пространств сигнатуры $(r, s)$ путем подходящих изменений знаков и обращения неравенств.

Для заданного псевдориманова многообразия $(M,\ g)$ существует единственная аффинная связность $\nabla$ на $M$, такая, что

$$Z(g(X,\ Y)) = g(\nabla_Z X,\ Y) + g(X,\ \nabla_Z Y) \tag{A.15}$$

и

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,\ Y] \tag{A.16}$$

для всех $X,\ Y,\ Z \in \mathfrak{X}(M)$. Эта связность $\nabla$ называется *связностью Леви-Чивита* многообразия $(M,\ g)$. Равенство (A.15) является требованием того, чтобы связность $\nabla$ была совместима с $g$. Полагая в (A.15) $Z = c'$, нетрудно заметить, что параллельный перенос векторных полей вдоль любой кривой $c$ в $M$ сохраняет скалярное произведение. Равенство (A.16) является требованием того, чтобы связность $\nabla$ не имела кручения (см. формулу (A.8)). Коэффициенты связности $\nabla$ задаются формулами

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{n} g^{ak} \left( \frac{\partial g_{ia}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{aj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^a} \right), \tag{A.17}$$

где $g^{ij}$ есть (2, 0)-тензор, определяемый из соотношений

$$\sum_{a=1}^{n} g^{ia} g_{aj} = \delta^i_j.$$

Локальное представление тензоров $g^{ij}$ и $g_{ij}$ можно использовать для поднимания и опускания индексов. Например, если опустить верхний индекс тензора кривизны, то мы получим компоненты *тензора Римана—Кристоффеля*

$$R_{ijkm} = \sum_{a=1}^{a} g_{ai} R^a_{jkm}. \tag{A.18}$$

С другой стороны, тензор Римана—Кристоффеля $\tilde{R}$ можно определить как (0,4)-тензор, такой, что

$$\tilde{R}\,(W,\ Z,\ X,\ Y) = g\,(W,\ R\,(X,\ Y)\,Z). \tag{A.19}$$

Следом тензора кривизны является симметричный (0, 2)-тензор — *кривизна Риччи*. Для каждой точки $p \in M$ кривизну Риччи можно рассматривать как симметричное билинейное отображение $\mathrm{Ric}_p\colon\ T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$. Для вычисления $\mathrm{Ric}\,(v,\ w)$ выберем в $T_pM$ ортонормированный базис $e_1,\ \ldots,\ e_n$. Тогда

$$\mathrm{Ric}\,(v,\ w) = \sum_{i=1}^{n} g\,(e_i,\ e_i)\, g\,(R\,(e_i,\ w)\,v,\ e_i) = \sum_{i=1}^{n} g\,(e_i,\ e_i)\,\tilde{R}\,(e_i, v, e_i,\ w). \tag{A.20}$$

С другой стороны, разложив векторы $v$ и $w$ по естественному базису $v = \sum v^i \, \partial/\partial x^i$, $w = \sum w^i \, \partial/\partial x^i$, получим, что

$$\operatorname{Ric}(v, w) = \sum_{i, j=1}^{n} R_{ij} v^i w^j, \tag{A.21}$$

где

$$R_{ij} = \sum_{a=1}^{n} R^a_{iaj}. \tag{A.22}$$

*Тензором Риччи* называется (1, 1)-тензорное поле, соответствующее кривизне Риччи. Компоненты тензора Риччи можно получить, поднимая у кривизны Риччи один индекс. Вследствие того что кривизна Риччи симметрична, эту операцию можно проделать с любым индексом. Поэтому

$$R^i_j = \sum_{a=1}^{n} g^{ai} R_{aj} = \sum_{a=1}^{n} g^{ai} R_{ja}. \tag{A.23}$$

Следом тензора Риччи является *скалярная кривизна* $\tau$. Исторически сложилось так, что эта функция обозначается многократно используемым символом $R$. Соответственно этому

$$\tau = R = \sum_{a=1}^{n} R^a_a. \tag{A.24}$$

Тем самым, если $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в $T_pM$, то

$$\tau = R = \sum_{i=1}^{n} g(e_i, e_i) \operatorname{Ric}(e_i, e_i). \tag{A.25}$$

Двумерное линейное подпространство $E$ пространства $T_pM$ называется *плоским сечением*. Плоское сечение $E$ называется *невырожденным*, если для каждого ненулевого вектора $v \in E$ существует вектор $n \in E$, такой, что $g(v, n) \neq 0$. Это эквивалентно требованию, что $g_p|_E$ — невырожденное скалярное произведение на $E$. Если векторы $v$ и $w$ образуют базис невырожденного плоского сечения $E$, то отлична от нуля величина $g(v, v)\, g(w, w) - [g(v, w)]^2$, представляющая собой квадрат псевдоевклидовой площади параллелограмма в $E$, определяемого векторами $v$ и $w$. *Секционная кривизна* $K(p, E)$ невырожденного плоского сечения $E$ с базисом $\{v, w\}$ задается по правилу

$$K(p, E) = \frac{g(R(w, v)v, w)}{g(v, v)\, g(w, w) - [g(v, w)]^2}. \tag{A.26}$$

Эта величина не определена на вырожденных плоских сечениях вследствие того, что знаменатель в формуле (A.26) для вырожденных плоских сечений всегда равен нулю.

Если $v = \sum v^i\, \partial/\partial x^i$ и $w = \sum w^i\, \partial/\partial x^i$ — базис невырожденного плоского сечения $E$, то соотношение (А.26) можно переписать в следующем виде:

$$K(p, E) = \frac{\sum R_{ijkm} w^i v^j w^k v^m}{\sum g_{ij} v^i v^j \sum g_{km} w^k w^m - (\sum g_{ij} v^i w^j)^2}. \tag{А.27}$$

Псевдоримановы многообразия, секционная кривизна которых одинакова по всем (невырожденным) плоским сечениям, называются многообразиями *постоянной кривизны*. Если $(M, g)$ — псевдориманово многообразие постоянной кривизны $c$, то

$$R(X, Y) Z = c\, [g(Y, Z) X - g(X, Z) Y]$$

(см. Грейвус и Номидзу (1978, с. 268)).

Невырожденная плоскость $E$ называется *времениподобной*, если она натянута на пространственноподобный и времениподобный касательные векторы. Можно показать, что если секционные кривизны ограничены и сверху, и снизу и $\dim M \geqslant 3$, то $(M, g)$ имеет постоянную кривизну (см. Харрис (1979, добавление А)). Поэтому совсем неясен лоренцев аналог понятия «защемленного риманова многообразия» (см. Чигер и Эбин (1975, с. 118)). С другой стороны, можно построить семейства лоренцевых многообразий, конформных пространствам постоянной кривизны, у которых все времениподобные секционные кривизны ограничены в одном направлении (см. Харрис (1982)). Однако если секционная кривизна по всем невырожденным плоскостям ограничена сверху (или снизу), то секционная кривизна постоянна (см. Кулкарни (1979)). Поэтому необходимо ограничить внимание только времениподобными плоскостями.

*Градиент* для псевдоримановых многообразий определяется в точности так же, как и для римановых многообразий. Если $f$: $M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, то $df$ — это (0, 1)-тензор на $M$ и $\operatorname{grad} f$ — (1, 0)-тензорное поле, соответствующее $df$. Тем самым для произвольного векторного поля $Y$ имеем

$$Y(f) = (df, Y) = g(\operatorname{grad} f, Y). \tag{А.28}$$

В локальных координатах векторное поле $\operatorname{grad} f$ представляется следующим образом:

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i,\, j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{А.29}$$

## А.3. Изотропная кривизна Риччи в двумерных многообразиях

Псевдориманово многообразие $(M, g)$ сигнатуры $(1, n-1)$ (т. е. сигнатуры $(-, +, \ldots, +)$) является лоренцевым многообразием. В этом разделе мы покажем, что в двумерном лоренце-

вом многообразии для любого изотропного вектора $v$ выполняется равенство $\mathrm{Ric}(v, v) = 0$.

**Предложение А.1.** *Пусть* $(M, g)$ — *двумерное лоренцево многообразие. Если* $v$ — *изотропный вектор, то* $\mathrm{Ric}(v, v) = 0$.

*Доказательство.* Зафиксируем в $M$ произвольную точку $p$. Пусть $e_1$, $e_2$ — ортонормированный базис $T_pM$, причем $g(e_1, e_1) = -1$ и $g(e_2, e_2) = +1$. Билинейность $\mathrm{Ric}(\cdot, \cdot)$ означает, что для доказательства сформулированного утверждения достаточно показать, что $\mathrm{Ric}(v, v) = \mathrm{Ric}(w, w) = 0$ для линейно независимых изотропных векторов $v = e_1 + e_2$ и $w = e_1 - e_2$. Ввиду того что доказательства для $v$ и $w$ похожи, приведем только обоснование равенства $\mathrm{Ric}(v, v) = 0$ для вектора $v = e_1 + e_2$.

Используя равенства (А.20), $g(e_1, e_1) = -1$ и $g(e_2, e_2) = +1$, получим, что

$$\mathrm{Ric}(v, v) = -g(R(e_1, e_1 + e_2)(e_1 + e_2), e_1) + \\ + g(R(e_2, e_1 + e_2)(e_1 + e_2), e_2).$$

Из трилинейности отображения $(X, Y, Z) \to R(X, Y)Z$ и тождества для кривизны $R(X, Y) = -R(Y, X)$ вытекает, что

$$\mathrm{Ric}(v, v) = -g(R(e_1, e_2)e_1, e_1) - g(R(e_1, e_2)e_2, e_1) + \\ + g(R(e_2, e_1)e_1, e_2) + g(R(e_2, e_1)e_2, e_2).$$

Тождества $\tilde{R}(W, Z, X, Y) = -\tilde{R}(Z, W, X, Y)$ и $\tilde{R}(W, Z, X, Y) = -\tilde{R}(W, Z, Y, X)$ для тензора Римана—Кристоффеля (см. (А.19)) приводят к требуемому результату $\mathrm{Ric}(v, v) = 0$.

## Добавление Б

# ТИПОВОЕ УСЛОВИЕ

В разд. 11.2 мы использовали определение (см. определение 11.7), что времениподобная геодезическая $c$ с касательным вектором $W = c'$ удовлетворяет типовому условию, если для некоторого $t_0$ из области определения кривой $c$ эндоморфизм кривизны

$$R(\cdot,\ W)\,W\,|_{t_0}\colon\ V^{\perp}(c(t_0)) \to V^{\perp}(c(t_0))$$

не равен тождественно нулю, т. е. существует $y \in V^{\perp}(c(t_0))$, такой, что $R(y,\ W(t_0))\ W(t_0) \neq 0$. В этом добавлении мы покажем, что сформулированное условие эквивалентно обычно используемому в общей теории относительности условию того, что

$$W^c W^d_{[a} R_{b]\,cd\,[e} W_{f]} \neq 0 \tag{Б.1}$$

в точке $c(t_0)$. Здесь $V^{\perp}(c(t_0)) = \{v \in T_{c(t_0)}M\colon\ g(v,\ c'(t_0)) = 0\}$. Мы будем использовать также еще одно определение гл. 11 (см. определение 11.7) о том, что изотропная геодезическая $\beta$ удовлетворяет типовому условию, если для некоторого $t_0$ из области определения кривой $\beta$ эндоморфизм факторрасслоения

$$\overline{R}(\cdot,\ \beta'(t_0))\ \beta'(t_0)\colon\ G(\beta(t_0)) \to G(\beta(t_0))$$

нетривиален (см. равенство (9.25) разд. 9.3, определяющее $G(\beta(t_0))$). Мы покажем, что это условие равносильно тому, что неравенство (Б.1) выполняется в $\beta(t_0)$, а $W = \beta'$. Таким образом, пространство-время $(M,\ g)$ удовлетворяет типовому условию тогда и только тогда, когда у каждой непродолжаемой непространственноподобной геодезической $\gamma$ с касательным полем $W$ существует некоторая точка, в которой выполняется условие (Б.1).

Достаточным условием того, чтобы типовое условие выполнялось вдоль непространственноподобной геодезической $\gamma$, является неравенство $\mathrm{Ric}(\gamma',\ \gamma') \neq 0$ в некоторой точке на $\gamma$. Отсюда следует, что пространство-время, в котором $\mathrm{Ric}(v,\ v) > 0$ для всех ненулевых непространственноподобных векторов $v$, должно удовлетворять и типовому, и сильному энергетическому условиям.

Начнем с доказательства того, что типовое условие для времениподобной геодезической можно описать посредством неравенства $R_{bnen} \neq 0$.

**Лемма Б.1.** *Пусть $c$ — времениподобная геодезическая и $\{v_1, v_2, \ldots, v_n = c'(t_0)\}$ — базис пространства $T_{c(t_0)}M$. Если компоненты тензора Римана—Кристоффеля заданы относительно этого базиса, то $c$ удовлетворяет типовому условию в точке $t_0$ тогда и только тогда, когда $R_{bnen} \neq 0$ в $c(t_0)$ для некоторых $b$, $e$ $(1 \leqslant b, e \leqslant n-1)$.*

*Доказательство.* Если $c$ удовлетворяет типовому условию в $t_0$, то существует $y_1 \in V^{\perp}(c(t_0))$, для которого $R(y_1, v_n)v_n \neq 0$. Из трилинейности $R$ и равенства $R(v_n, v_n) = 0$ ввиду наличия $y_1$ вытекает существование в линейной оболочке векторов $v_1, \ldots, v_{n-1}$ такого вектора $y$, что $R(y, v_n)v_n \neq 0$. Используя невырожденность $g$ в точке $c(t_0)$, получаем вектор $x_1 \in T_{c(t_0)}M$, такой, что $\tilde{R}(x_1, v_n, y, v_n) = g(x_1, R(y, v_n)v_n) \neq 0$. Здесь $\tilde{R}$ — тензор Римана—Кристоффеля, определенный в добавлении А.2, формула (А.19). Из полилинейности $\tilde{R}$ и равенства $\tilde{R}(v_n, v_n, y, v_n) = 0$ вытекает, что в линейной оболочке векторов $v_1, \ldots, v_{n-1}$ существует вектор $x$, для которого $\tilde{R}(x, v_n, y, v_n) \neq 0$. Отсюда следует, что $R_{bnen} \neq 0$ для некоторых $b$ и $e$, подчиненных условию $1 \leqslant b, e \leqslant n-1$.

Обратно, если $R_{bnen} \neq 0$, то $\tilde{R}(v_b + \alpha v_n, v_n, v_e + \beta v_n, v_n) = \tilde{R}(v_b, v_n, v_e, v_n) \neq 0$ для всех $\alpha, \beta, \in \mathbb{R}$. Поэтому $R(v_e + \beta v_n, v_n)v_n \neq 0$ для всех $\beta \in \mathbb{R}$; откуда вытекает, что $R(y, v_n)v_n \neq 0$ для некоторого $y \in V^{\perp}(c(t_0))$. $\square$

Покажем теперь, что соотношение (Б.1) описывает типовое условие вдоль времениподобных геодезических.

**Предложение Б.2.** *Времениподобная геодезическая $c$ с касательным вектором $W = c'$ удовлетворяет при $t = t_0$ типовому условию в том и только том случае, когда*

$$W^c W^d W_{[a} R_{b]cd[e} W_{f]} \neq 0$$

*в $c(t_0)$.*

*Доказательство.* Без потери общности можно предполагать, что $c$ — нормальная геодезическая (с единичным вектором скорости). Поэтому для вычисления нужного нам тензора можно использовать ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_n = W = c'(t_0)\}$ в $c(t_0)$. Компоненты $W$ относительно этого базиса и дуального

кобазиса задаются соотношениями $W^1 = \ldots = W^{n-1} = W_1 = \ldots = W_{n-1} = 0$, $W^n = 1$, $W_n = -1$. Следовательно,

$$W^c W^d W_{[a} R_{b]\,cd\,[e} W_{f]} = \frac{1}{4}\,[W_a R_{bnne} W_f - W_b R_{anne} W_f - W_a R_{bnnf} W_e +$$

$$+ W_b R_{annf} W_e] = \frac{1}{4}\,[\delta^n_a R_{bnne} \delta^n_f - \delta^n_b R_{anne} \delta^n_f - \delta^n_a R_{bnnf} \delta^n_e + \delta^n_b R_{annf} \delta^n_e].$$

Легко видеть, что это выражение отлично от нуля тогда и только тогда, когда $R_{bnne} \neq 0$ для некоторых $1 \leqslant b, e \leqslant n-1$. Сформулированный результат вытекает из леммы Б.1 вследствие равенства $R_{bnne} = -R_{bnen}$. □

Покажем теперь, используя лемму Б.1, что если $\mathrm{Ric}\,(c', c') \neq 0$ в некоторой точке времениподобной геодезической $c$, то $c$ удовлетворяет типовому условию.

**Лемма Б.3.** *Пусть* $c\colon (a, b) \to M$ — *времениподобная геодезическая и* $\mathrm{Ric}\,(c', c') \neq 0$ *в некоторой точке* $c$. *Тогда* $c$ *удовлетворяет типовому условию.*

*Доказательство.* Можно предполагать, не теряя общности, что $c$ имеет единичный вектор скорости. Допуская, что $\mathrm{Ric}\,(c'(t_0), c'(t_0)) \neq 0$, выберем в пространстве $T_{c(t_0)} M$ ортонормированный базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n = c'(t_0)\}$. Тогда при $t = t_0$ имеем

$$\mathrm{Ric}\,(c', c') = \sum_{i=1}^{n} g(e_i, e_i)\, g(R(e_i, c')\,c', e_i).$$

Из того, что $R(c', c')\,c' = 0$, получаем

$$\mathrm{Ric}\,(c', c') = \sum_{i=1}^{n-1} g(R(e_i, c')\,c', e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} R_{inin}.$$

Тем самым условие $\mathrm{Ric}\,(c', c') \neq 0$ означает, что для некоторого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ выполняется неравенство $R_{inin} \neq 0$. Сформулированный результат вытекает из леммы Б.1. □

Рассмотрим теперь типовое условие для изотропной геодезической $\beta\colon (a, b) \to M$. Для каждой точки $p$ на $\beta$ существуют параметризация $\beta$, ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_{n-2}, \tilde{e}_{n-1}, \tilde{e}_n\}$ пространства $T_pM$ и изотропный вектор $N \in T_pM$, такие, что

$$\tilde{e}_n = \frac{\beta' + N}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{e}_{n-1} = \frac{\beta' - N}{\sqrt{2}}$$

в точке $p$. Здесь $\tilde{e}_n$ — единичный времениподобный вектор в базисе $e_1, \ldots, e_{n-2}, \tilde{e}_{n-1}, \tilde{e}_n\}$. Легко убедиться в том, что $g(\beta', N) = g(\tilde{e}_n, \tilde{e}_n) = -1$, так что $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}, N, \beta'\}$ — псевдоортонормированный базис пространства $T_pM$. Метрический

тензор в точке $p$ в этом псевдоортонормированном базисе имеет вид

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad \text{если} \quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant n-2,$$
$$g_{n,\,n-1} = g_{n-1,\,n} = -1,$$
$$g_{nn} = g_{n-1,\,n-1} = 0.$$

Исполь уя этот базис, покажем, что типовое условие для $\beta$ в $p$ равносильно тому, что $R_{bnne} \neq 0$ для некоторых $1 \leqslant b,\ e \leqslant n-2$.

**Лемма Б.4.** *Пусть $p = \beta(t_0)$ — точка изотропной геодезической $\beta$ и $\{e_1, \ldots, e_{n-2}, N, \beta'\}$ — псевдоортонормированный базис пространства $T_pM$, определенный выше. Если компоненты тензора Римана—Кристоффеля заданы относительно этого базиса, то $\beta$ удовлетворяет типовому условию при $t = t_0$ тогда и только тогда, когда $R_{bnne} \neq 0$ в точке $\beta(t_0)$ для некоторых $1 \leqslant b,\ e \leqslant n-2$.*

*Доказательство.* Обозначим через $N(\beta(t_0))$ $(n-1)$-мерное линейное пространство векторов, ортогональных $\beta'(t_0)$. Тогда $\{e_1, \ldots, e_{n-2}, \beta'\}$ — базис $N(\beta(t_0))$. Положим $G(\beta(t_0)) = N(\beta(t_0))/[\beta'(t_0)]$ и обозначим через $\pi\colon N(\beta(t_0)) \to G(\beta(t_0))$ естественную проекцию. Напомним, что эндоморфизм кривизны $\overline{R}(\cdot, \beta')\beta'\colon G(\beta(t_0)) \to G(\beta(t_0))$ определяется правилом $\overline{R}(\bar{v}, \beta')\beta' = \pi \circ R(v, \beta')\beta'$, где $v$ — произвольный вектор из $\pi^{-1}(\bar{v})$ (см. формулу (9.34) разд. 9.3).

Предположим теперь, что типовое условие вдоль $\beta$ удовлетворяется при $t = t_0$. Тогда найдется вектор $v_1 \in N(\beta(t_0))$, для которого $\overline{R}(\pi(v_1), \beta')\beta' = \pi \circ R(v_1, \beta')\beta' \neq 0$. Из равенства $R(\beta', \beta')\beta' = 0$ и трилинейности $R$ вытекает, что для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n-2$ справедливо неравенство $\pi \circ R(e_i, \beta')\beta' \neq 0$. Вследствие того что факторметрика $\bar{g}$ на $G(\beta(t_0))$ не вырождена, найдется вектор $\bar{w} \in G(\beta(t_0))$, для которого $\bar{g}(\bar{w}, \pi \circ R(e_i, \beta') \times \beta') \neq 0$. Значит, существует номер $j$ $(1 \leqslant j \leqslant n-2)$, такой, что $R_{jnin} = g(e_j, R(e_i, \beta')\beta') \neq 0$.

Обратно, предположим, что $R_{jnin} \neq 0$ для некоторых $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$. Легко убедиться в том, что $\bar{g}(\overline{R}(\pi(e_i), \beta')\beta', \pi(e_j)) \neq 0$, и, следовательно, эндоморфизм $\overline{R}(\cdot, \beta')\beta'\colon G(\beta(t_0)) \to G(\beta(t_0))$ не равен нулю тождественно. □

Покажем, что соотношение (Б.1) описывает типовое условие вдоль изотропных геодезических.

**Предложение Б.5.** *Изотропная геодезическая $\beta$ с касательным вектором $W = \beta'$ удовлетворяет типовому условию при $t = t_0$ тогда и только тогда, когда*

$$W^c W^d W_{[a} R_{b]\,cd\,[e} W_{f]} \neq 0$$

*в точке $\beta(t_0)$.*

*Доказательство.* Не теряя общности, можно предполагать, что компоненты тензора Римана—Кристоффеля заданы относительно построенного выше псевдоортонормированного базиса $\{e_1, \ldots, e_{n-2}, N, \beta'(t_0)\}$. Если $W = \beta'$, то его компоненты в этом базисе и соответствующем дуальном кобазисе суть $W^1 = \cdots = W^{n-1} = W_1 = \cdots = W_{n-2} = W_n = 0$, $W^n = +1$, $W_{n-1} = -1$. Следовательно,

$$W^c W^d W_{[a}R_{b]\,cd\,[e}W_{f]} = \frac{1}{4}\left[\delta_a^{n-1} R_{bnne}\delta_f^{n-1} - \delta_b^{n-1} R_{anne}\delta_f^{n-1} - \right.$$

$$\left. - \delta_a^{n-1} R_{bnnf}\delta_e^{n-1} + \delta_b^{n-1} R_{annf}\delta_e^{n-1}\right].$$

Это выражение равно нулю, если хотя бы один из индексов $a$, $b$, $e$ или $f$ равен $n$. Кроме того, если оно отлично от нуля, то в точности один из индексов $a$ или $b$ должен быть равен $n-1$ и ровно один из индексов $e$ или $f$ должен быть равен $n-1$. Отсюда следует, что $W^c W^d W_{[a}R_{b]\,cd\,[e}W_{f]} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $R_{bnne} \neq 0$ для некоторых $b$, $e$, связанных условием $1 \leqslant b$, $e \leqslant n-2$, и сформулированное утверждение вытекает из леммы Б.4. □

Докажем теперь изотропный аналог леммы Б.3.

**Лемма Б.6.** *Пусть* $\beta$ — *изотропная геодезическая и* $\mathrm{Ric}(\beta'(t_0), \beta'(t_0)) \neq 0$. *Тогда* $\beta$ *удовлетворяет типовому условию при* $t = t_0$.

*Доказательство.* Используя ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_{n-2}, \tilde{e}_{n-1}, \tilde{e}_n\}$, определенный выше, вычислим прежде всего $\mathrm{Ric}(\beta'(t_0), \beta'(t_0))$:

$$\mathrm{Ric}(\beta'(t_0), \beta'(t_0)) = \sum_{i=1}^{n-2} g(e_i, e_i)\, g(e_i, R(e_i, \beta')\beta') +$$

$$+ \sum_{i=n-1}^{n} g(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)\, g(\tilde{e}_i, R(\tilde{e}_i, \beta')\beta').$$

Используя те же рассуждения, что и при доказательстве предложения А.1 дополнения А.3, можно показать, что

$$\sum_{i=n-1}^{n} g(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)\, g(\tilde{e}_i, R(\tilde{e}_i, \beta')\beta') = 0.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Ric}(\beta'(t_0), \beta'(t_0)) = \sum_{i=1}^{n-2} g(e_i, R(e_i, \beta')\beta') = \sum_{i=1}^{n-2} R_{inin},$$

где $R_{abcd}$ — компоненты тензора Римана—Кристоффеля относительно псевдоортонормированного базиса $\{e_1, \ldots, e_{n-2}, N, \beta'(t_0)\}$. Ясно, что из неравенства $\mathrm{Ric}(\beta'(t_0), \beta'(t_0)) \neq 0$ вытекает соотношение $R_{inin} = -R_{inni} \neq 0$, справедливое для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n-2$. Применяя лемму Б.4, получаем требуемое. $\square$

Используя леммы Б.3 и Б.6 и определение сильного энергетического условия (см. определение 11.8), получаем

**Предложение Б.7.** *Пусть* $(M, g)$ — *пространство-время. Если* $\mathrm{Ric}(v, v) > 0$ *для всех ненулевых непространственноподобных векторов из* $(M, g)$, *то* $(M, g)$ *удовлетворяет и типовому, и сильному энергетическому условиям.*

Добавление В

# УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

Целью этого добавления является краткое описание уравнений Эйнштейна. Эвристический вывод этих уравнений можно найти у Франкла (1979, гл. 3). Поскольку эти уравнения допустимы лишь для многообразий размерности четыре, мы ограничимся этой размерностью.

Уравнения Эйнштейна связывают чисто геометрические величины с тензором энергии-импульса, который является величиной физической. Поэтому их можно использовать для того, чтобы сформулировать сильное энергетическое условие при помощи тензора энергии-импульса. В случае идеальной жидкости тензор энергии-импульса имеет простой вид. Это обстоятельство важно в общей теории относительности потому, что в стандартных космологических моделях предполагается, что вещество вселенной ведет себя как идеальная жидкость.

## В.1. Тензор энергии-импульса и уравнения Эйнштейна

Физическим обоснованием для изучения лоренцевых многообразий является допущение, что гравитационное поле можно эффективно моделировать при помощи некоторой лоренцевой метрики $g$, определенной на подходящем четырехмерном многообразии $M$. Так как каждое многообразие, допускающее одну лоренцеву метрику, допускает бесконечное число лоренцевых метрик, то необходимо решить, какую лоренцеву метрику следует взять для того, чтобы смоделировать заданную гравитационную проблему. Этот вопрос приводит к уравнениям Эйнштейна, связывающим метрический тензор $g$, кривизну Риччи $\mathrm{Ric}$ и скалярную кривизну с тензором энергии-импульса $T$. Тензор $T$ определяется из физических соображений, связанных с распределением вещества и энергии (см. Хокинг и Эллис (1977, гл. 3), Мизнер, Торн и Уилер (1977, гл. 5)). Уравнения Эйнштейна можно записать в следующем виде:

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{2} R g + \Lambda g = 8\pi T, \qquad (\text{В.1})$$

где $\Lambda$ — постоянная, известная как космологическая константа. Постоянный множитель $8\pi$ вводится просто из соображений масштаба. В локальных координатах уравнения (В.1) принимают вид

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} + \Lambda g_{ij} = 8\pi T_{ij}, \tag{В.2}$$

где $1 \leqslant i, \quad j \leqslant 4$.

Кривизна Риччи и скалярная кривизна требуют от компонент $g_{ij}$ метрического тензора двукратной дифференцируемости. Таким образом, уравнения Эйнштейна представляют собой (нелинейные) дифференциальные уравнения в частных производных относительно метрики и ее первых двух производных. Эти шестнадцать уравнений сводятся к десяти уравнениям в силу того, что все тензоры в формуле (В.1) симметричны. Последующая редукция к шести уравнениям (см. Мизнер, Торн и Уилер (1977)) возможна вследствие тождества

$$\sum_{j=1}^{4} \left( R^{ij} - \frac{1}{2} R g^{ij} + \Lambda g^{ij} \right)_{,j} = 0 \tag{В.3}$$

для кривизны, из которого следуют четыре консервативных закона

$$\sum_{i=1}^{4} T^{ij}_{,j} = 0. \tag{В.4}$$

Здесь символ $,j$ обозначает ковариантное дифференцирование в направлении $x^j$.

Уравнения Эйнштейна не определяют метрику на $M$ без достаточных граничных условий. Например, пусть $M = \mathbb{R}^2 \times S^2 = \{(t, r)\colon t \in \mathbb{R}, r > 2m\} \times S^2$ и $\Lambda = 0$, $T_{ij} = 0$, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$. Тогда $M$ с этими космологической постоянной и тензором энергии импульса допускает в качестве решений уравнений Эйнштейна и плоскую метрику $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2\, d\Omega^2$, и метрику Шварцшильда $ds^2 = -(1 - 2m/r)\, dt^2 + (1 - 2m/r)^{-1}\, dr^2 + r^2\, d\Omega^2$. Каждая из этих метрик является асимптотически плоской и *риччи-плоской* (т. е. $\mathrm{Ric} = 0$). Однако метрика Шварцшильда имеет ненулевой тензор кривизны, и, значит, эти метрики не изометричны.

С другой стороны, вычислительные соображения показывают, что уравнения Эйнштейна должны определять метрику с точностью до диффеоморфизма (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 88)). Отметим, во-первых, что метрический тензор имеет 16 компонент, которые в силу симметрии сводятся к 10. Во-вторых, 4 из этих 10 компонент можно объяснить размерностью $M$, которая допускает 4 степени свободы. Тем самым уравнения Эйнштейна дают 6 независимых уравнений для определения 6 существенных компонент метрического тензора. Строгий подход к проблеме сущест-

вования и единственности решений уравнений Эйнштейна, использующий поверхности Коши для построения начальных условий, можно найти у Хокинга и Эллиса (1977, гл. 7); см. также Марсден, Эбин и Фишер (1972, с. 233—264).

## В.2. Сильное энергетическое условие и тензор энергии-импульса

Свяжем теперь сильное энергетическое условие $\mathrm{Ric}(v, v) \geqslant 0$ для непространственноподобных векторов с тензором энергии-импульса. Чтобы выразить скалярную кривизну $R$ в точке $p \in M$ через $T$, выберем в $T_pM$ ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Тогда из формулы (В.1) получим, что

$$\sum g(e_i, e_i)\left[\mathrm{Ric}(e_i, e_i) - \frac{1}{2} R g(e_i, e_i) + \Lambda g(e_i, e_i)\right] = $$

$$= 8\pi \sum g(e_i, e_i)\, T(e_i, e_i).$$

Вследствие того что $\dim M = 4$, а скалярная кривизна является следом кривизны Риччи, из этого уравнения получаем

$$R - 2R + 4\Lambda = 8\pi \operatorname{tr} T.$$

Следовательно,

$$R = -8\pi \operatorname{tr} T + 4\Lambda, \tag{В.5}$$

и уравнения Эйнштейна приводятся к виду

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}(-8\pi \operatorname{tr} T + 4\Lambda)\, g + \Lambda g = 8\pi T.$$

Таким образом,

$$\mathrm{Ric} = 8\pi \left(T - \frac{\operatorname{tr} T}{2} g + \frac{\Lambda}{8\pi} g\right). \tag{В.6}$$

Последнее соотношение показывает, что условие $\mathrm{Ric}(v, v) \geqslant 0$ эквивалентно неравенству

$$T(v, v) \geqslant [(\operatorname{tr} T)/2 - \Lambda/(8\pi)]\, g(v, v).$$

Отсюда вытекает, что при $\Lambda = 0$ и $\dim M = 4$ сильное энергетическое условие

$\mathrm{Ric}(v, v) \geqslant 0$ для всех непространственноподобных $v$
равносильно условию

$T(v, v) \geqslant \frac{\operatorname{tr} T}{2} g(v, v)$ для всех непространственноподобных $v$ (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 109)).

## B.3. Идеальная жидкость

Рассмотрим жидкость, которая движется через пространство-время с единичной скоростью так, что линиями тока жидкости являются интегральные кривые векторного поля, образованного ее времениподобными касательными векторами $v$. Жидкость называется *идеальной*, если ее тензор энергии-импульса $T$ имеет вид

$$T = (\mu + p)\,\omega \otimes \omega + pg, \tag{B.7}$$

где $\mu$ — плотность энергии и $p$ — давление, или в локальных координатах

$$T_{ij} = (\mu + p)\,v_i v_j + p g_{ij}. \tag{B.8}$$

Здесь $\omega = \sum v_i\,dx^i$ есть 1-форма, соответствующая векторному полю $v = \sum v^i\,\partial/\partial x^i$. Из вида тензора $T$ вытекает, что идеальная жидкость изотропна, лишена вязкости и не имеет внутреннего трения.

Напомним, что пространство-время Робертсона—Уокера представляет собой искривленное произведение вида $(a,\ b) \times_f H$, где $H$ — изотропное риманово многообразие (см. разд. 4.4). Пространства Робертсона—Уокера используются для построения космологических моделей, в которых за вещество берется идеальная жидкость. В этом случае векторное поле $v$ задается в виде $\partial/\partial t$, и поэтому линиями тока жидкости являются кривые $\gamma(t) = (t,\ y_0)$, где $y_0 \in H$. Тензор энергии-импульса $T$ имеет требуемый вид (B.7), а функции $\mu$ и $p$ зависят только от $t$. Обсуждение космологических моделей Робертсона—Уокера можно найти у Хокинга и Эллиса (1977, с. 151 и сл.); см. также Мизнер, Торн и Уилер (1977, ч. VI).

Рассмотрим теперь сильное энергетическое условие в пространствах, тензор энергии-импульса которых имеет вид (B.7). Если $\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4 = v\}$ — ортонормированный базис пространства $T_pM$, то след тензора $T$ можно вычислить по следующей формуле:

$$\operatorname{tr} T = \sum_{i=1}^{4} g(e_i,\ e_i)\,T(e_i,\ e_i) = -(\mu + p) + 4p = 3p - \mu.$$

Применяя формулу (B.6), получим, что сильное энергетическое условие эквивалентно неравенству

$$T(w,\ w) \geqslant \left(\frac{3p - \mu}{2} - \frac{\Lambda}{8\pi}\right) g(w,\ w),$$

справедливому для всех непространственноподобных $w$. Из формулы (B.7) вытекает, что

$$(\mu + p)\,[g(v,\ w)]^2 + pg(w,\ w) \geqslant \left(\frac{3p - \mu}{2} - \frac{\Lambda}{8\pi}\right) g(w,\ w),$$

откуда

$$(\mu + p)\,[g(v,\ w)]^2 \geqslant \left(\frac{p-\mu}{2} - \frac{\Lambda}{8\pi}\right) g(w,\ w). \tag{В.9}$$

Вследствие неравенств $g(w,\ w) \leqslant 0$ и $g(v,\ w) \neq 0$ из соотношения (В.9) вытекает, что отрицательная космологическая постоянная делает сильное энергетическое условие более вероятным, а положительная космологическая постоянная обладает обратным эффектом. Типлер (1977б) провел исследование тех пространств, которые имеют отрицательные космологические постоянные. Первоначально космологическую постоянную ввел Эйнштейн ввиду того, что уравнения (В.1) с $\Lambda = 0$ предсказывают вселенную, которая либо расширяется, либо сжимается, а вначале этого века считалось, что вселенная существенно статична. После открытия расширения вселенной первоначальная мотивировка для космологической постоянной была отброшена. С другой стороны, исключить $\Lambda$ из теории было бы более затруднительным. И хотя астрономические эксперименты не в состоянии показать, что $\Lambda$ отлична от нуля, можно привести следующий довод: $\Lambda$ столь мала, что проведенные эксперименты были недостаточно чувствительными.

Добавление Г

# ЯКОБИЕВЫ ПОЛЯ И ТЕОРЕМА ТОПОНОГОВА ДЛЯ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ[1]

Одним из важных следствий теоремы сравнения Рауха в римановой геометрии является теорема Топоногова о сравнении треугольников (см. Чигер и Эбин (1975, с. 42—49)). Пусть $M$ — полное риманово многообразие (всюду в этом добавлении метрика обозначается через $\langle , \rangle$), секционная кривизна которого по всем двумерным площадкам $\sigma$ в $M$ удовлетворяет условию $K(\sigma) \geqslant H$, где $H$ — некоторое число. Пусть $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — геодезические в $M$, образующие треугольник: $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1(L_1) = \gamma_3(0)$ и $\gamma_2(L_2) = \gamma_3(L_3)$, где $L_i = L(\gamma_i)$. Предложим, что $\gamma_2$ и $\gamma_3$ — минимальные геодезические, и в случае $H = q^2$ $(q > 0)$ будем считать, что $L_i \leqslant \pi/q$, $i = 1, 2, 3$. Допустим, что геодезические $\gamma_i$ параметризованы длиной дуги, и определим $\alpha_3 = \langle \gamma_1'(0), \gamma_2'(0)\rangle$ и $\alpha_2 = \langle -\gamma_1'(L_1), \gamma_3'(0)\rangle$. Для треугольника $(\bar\gamma_1, \bar\gamma_2, \bar\gamma_3)$, возможно расположенного в другом многообразии, $\bar\alpha_3$ и $\bar\alpha_2$ определяются аналогично.

(а) В односвязном двумерном римановом многообразии $M_H$ постоянной кривизны $H$ существует геодезический треугольник $(\bar\gamma_1, \bar\gamma_2, \bar\gamma_3)$, такой, что $L(\bar\gamma_i) = L_i$, $i = 1, 2, 3$, и $\bar\alpha_2 \leqslant \alpha_2$, $\bar\alpha_3 \leqslant \alpha_3$. Этот треугольник определен с точностью до конгруэнтности, если $H \leqslant 0$ или если $H > 0$ и все $L_i < \pi/q$.

(б) Пусть $\bar\gamma_1$ и $\bar\gamma_2$ — геодезические в многообразии $M_H$, для которых $\bar\gamma_1(0) = \bar\gamma_2(0)$, $L(\bar\gamma_i) = L_i$, $i = 1, 2$, и $\bar\alpha_3 = \alpha_3$. Пусть $\bar\gamma_3$ — минимальная геодезическая, соединяющая концевые точки геодезических $\bar\gamma_1$ и $\bar\gamma_2$. Тогда $L(\bar\gamma_3) \geqslant L(\gamma_3)$.

Оказывается возможным построить аналог этой теоремы для лоренцевой геометрии. Мы приведем здесь краткое изложение соответствующей программы, опустив все доказательства. Подробности изложены в работах Харриса (1979, 1982, с. 3—41).

Первый шаг состоит в модификации времениподобной теоремы сравнения Рауха I (см. теорему 10.11) так, чтобы она была применима к времениподобным геодезическим с сопряженным точками, но без фокальных точек. Если $N$ — подмногообразие многообразия $M$, то $q \in M$ называется *фокальной точкой* $N$ для $p$ $(p \in N)$,

[1]) Написано Стивеном Г. Харрисом (Steven G. Harris), Department of Math., University of Missouri, Columbia, Missouri.

если $q$ является образом критической точки экспоненциального отображения exp в нормальном расслоении подмногообразия $N$ в точке $p$. Для вектора $v$ из касательного расслоения $TM$ обозначим через $N(v)$ подмногообразие многообразия $M$, являющееся образом при отображении exp достаточно малой окрестности начальной точки пространства, перпендикулярного $v$, так, что exp в этой окрестности является вложением. Таким образом, $N(v)$ есть $(n-1)$-мерное подмногообразие, ортогональное $v$.

В формулируемом ниже утверждении — теореме Рауха II — и всюду в этом добавлении через $A \wedge B$ будет обозначаться 2-плоскость, натянутая на векторы $A$ и $B$.

**Теорема Г.1** (времениподобная теорема Рауха II). *Пусть $V_i$ — якобиево поле вдоль нормальной времениподобной геодезической $\gamma_i$: $[0, L) \to M_i$ в пространстве-времени $M_i$, $i = 1, 2$. Положим $T_i = \gamma_i'$. Предположим выполненными следующие условия: $\langle V_1, V_1\rangle_0 = \langle V_2, V_2\rangle_0$, $\langle V_1, T_1\rangle_0 = \langle V_2, T_2\rangle_0$, $(\nabla_{T_i} V_i)(0) = 0$ и, кроме того, для любых векторов $X_i$ в $\gamma_i(t)$*

$$K(X_1 \wedge T_1) \geqslant K(X_2 \wedge T_2),$$

*и $\gamma_2$ не имеет фокальных точек $N(\gamma_2'(0))$ для $\gamma_2(0)$. Тогда для всех $t$ из $[0, L]$ выполняется неравенство*

$$\langle V_1, V_1\rangle_t \geqslant \langle V_2, V_2\rangle_t.$$

Важное следствие из этой теоремы показывает, как кривизна может влиять на длины времениподобных геодезических.

**Следствие Г.2.** *Пусть $\gamma_i$: $[0, L] \to M_i$, $i = 1, 2$, — две времениподобные (или две изотропные, или две пространственноподобные) геодезические, и пусть $E_i$ — единичные времениподобные векторные поля, параллельные вдоль $\gamma_i$ и связанные условием $\langle E_1, T_1\rangle = \langle E_2, T_2\rangle$ $(T_i = \gamma_i')$. Пусть $f: [0, L) \to \mathbb{R}$ — любая гладкая вещественнозначная функция. Предположим, что $\exp_{\gamma_i(t)}(f(t) \times \times E_i(t))$ определено для всех $t$ из $[0, L]$; обозначим его через $c_i(t)$. Предположим далее, что для всех $t$ из $[0, L]$ геодезическая $\eta: s \longmapsto \longmapsto \exp_{\gamma_2(t)}(sE_2(t))$ не имеет фокальных точек $N(\eta'(0))$ для $\eta(0)$ при $s \leqslant f(t)$. Наконец, предположим, что для всех времениподобных 2-плоскостей $\sigma_i$ в $M_i$ выполняется неравенство*

$$K(\sigma_1) \geqslant K(\sigma_2).$$

*Тогда для всех $t$ из $[0, L]$*

$$\langle c_1', c_1'\rangle_t \geqslant \langle c_2', c_2'\rangle_t.$$

*Таким образом, если $c_1$ — непространственноподобная кривая, то этим же свойством обладает и $c_2$, при этом*

$$L(c_1) \leqslant L(c_2).$$

Это следствие делает возможной теорему сравнения треугольников для «тонких» треугольников. Модельными пространствами, используемыми для сравнения, являются двумерные пространства де Ситтера 1-го и 2-го рода (см. Хокинг и Эллис (1977, с. 140—151), Вольф (1961, с. 114—118)). Треугольник $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, образованный времениподобными геодезическими, будем называть «тонким», если выполняются следующие условия. Пусть $\bar\gamma_1$ и $\bar\gamma_2$ — времениподобные геодезические в односвязном двумерном лоренцевом многообразии $M_H$ постоянной кривизны $H$, у которых $\bar\gamma_1(0) = \bar\gamma_2(0)$, $L(\bar\gamma_1) = L_1$, $L(\bar\gamma_2) = L_2$ и $\bar\alpha_3 = \alpha_3$. Предположим, во-первых, что существует времениподобная геодезическая $\bar\gamma_3$, соединяющая концевые точки геодезических $\bar\gamma_1$ и $\bar\gamma_2$. Пусть $\bar E$ — результат параллельного переноса $\bar\gamma_1'(0)$ вдоль $\bar\gamma_2$. Для каждого $t \in [0, L_2)$ существует наименьшее положительное число $f(t)$, такое, что $\exp(f(t)\bar E(t))$ лежит на $\bar\gamma_3$. Во-вторых, предположим, что для всех таких $t$ геодезическая $s \mapsto \exp(s\bar E(t))$ не имеет фокальных точек $N(\bar E(t))$ для $\bar\gamma_2(t)$ при $s \leqslant f(t)$. Если эти два предположения выполнены и если $\gamma_3$ максимальна, а все времениподобные плоскости $\sigma$ в $M$ удовлетворяют неравенству $K(\sigma) \leqslant H$, то $L(\gamma_3) \geqslant L(\bar\gamma_3)$.

Задача заключается в том, чтобы, взяв более общий времениподобный геодезический треугольник, разрезать его на «тонкие» треугольники, после этого применить только что сформулированный результат к каждому «ломтику» и затем сложить их вместе. В римановой теореме для того, чтобы обеспечить возможность продолжения в произвольном треугольнике $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ минимальных геодезических от $\gamma_3(L_3)$ до $\gamma_1$ для нарезания первоначального треугольника используется полнота. В лоренцевом случае того же эффекта достигают при помощи глобальной гиперболичности, если $H \geqslant 0$. Однако для $H = -q^2$ возникает проблема: даже модельные пространства $M_H$ не являются глобально гиперболическими; в самом деле, согласно предложению 10.8, никакая времениподобная геодезическая длины, большей чем $\pi/q$ не может быть максимальной в лоренцевом многообразии, времениподобные плоскости $\sigma$ которого удовлетворяют условию $K(\sigma) \leqslant -q^2$. Решение этой проблемы содержится в новом понятии, своего рода глобальной гиперболичности в малом. Для любых двух точек $x$ и $y$ в лоренцевом многообразии $M$ обозначим через $C(x, y)$ пространство непространственноподобных кривых в $M$, идущих из $x$ в $y$ (по модулю перепараметризации), с компактно открытой топологией.

**Определение Г.3.** Лоренцево многообразие $M$ называется *глобально гиперболическим* порядка $q$ $(q > 0)$, если $M$ сильно причинно, и для всех точек $x$ и $y$ из $M$, подчиняющихся условию

$\sup \{L(\gamma)\colon \gamma \in C(x, y)\} < \pi/q$, это пространство $C(x, y)$ компактно.

Теперь можно сформулировать лоренцев аналог теоремы Топоногова (геодезические предполагаются нормальными).

**Теорема Г.4** (лоренцева теорема сравнения треугольников). *Пусть $M$ — пространство-время, времениподобные плоскости $\sigma$ которого удовлетворяют неравенству $K(\sigma) \leqslant H$, где $H$ — некоторая постоянная, $M$ глобально гиперболично или в случае $H = -q^2$ глобально гиперболично порядка $q$. Пусть $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — треугольник, образованный времениподобными геодезическими, причем $\gamma_2$ — направленная в будущее сторона треугольника между самой далекой в прошлом и самой далекой в будущем из трех концевых точек, $\gamma_1$ — другая направленная в будущее сторона, исходящая из $\gamma_2(0)$, и $\gamma_3$ — оставшаяся направленная в будущее сторона. Предположим, что $\gamma_2$ и $\gamma_3$ максимальны, и если $H = -q^2$, что $L_i < \pi/q$, $i = 1$, 2, 3. Тогда*

(а) *В $M_H$ существует времениподобный геодезический треугольник $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$, для которого $L(\bar{\gamma}_i) = L_i$, $i = 1, 2, 3$, и $\bar{\alpha}_2 \geqslant \alpha_2$, $\bar{\alpha}_3 \geqslant \alpha_3$.*

(б) *Для времениподобных геодезических $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$, построенных в $M_H$ таким образом, что $\bar{\gamma}_1(0) = \bar{\gamma}_2(0)$, $L(\bar{\gamma}_1) = L_1$, $L(\bar{\gamma}_2) = L_2$ и $\bar{\alpha}_3 = \alpha_3$, из существования времениподобной геодезической $\bar{\gamma}_3$ между концевыми точками $\bar{\gamma}_1$ и $\gamma_2$ вытекает неравенство $L(\bar{\gamma}^3) \leqslant L(\gamma_3)$.*

Теорему Топоногова сравнения треугольников можно использовать для того, чтобы показать, насколько жестко может определяться полное риманово многообразие ограничением на секционную кривизну при условии, что пределы наложенных на кривизну ограничений достигаются. Одним из таких результатов является теорема о максимальном диаметре (см. Чигер и Эбин (1975, с. 110). Если полное риманово многообразие $M^n$ удовлетворяет неравенству $K(\sigma) \geqslant q^2 > 0$ для всех плоскостей $\sigma$ и если диаметр $M$ достигает максимального допустимого значения $\pi/q$, то $M$ изометрично сфере $S^n$ кривизны $q^2$.

Подобным же образом можно использовать теорему Г.4.

**Теорема Г.5.** *Пусть пространство-время $M^n$ является глобально гиперболичным порядка $q$ и для всех времениподобных плоскостей $\sigma$ выполняется неравенство $K(\sigma) \leqslant -q^2$. Предположим, что $M$ содержит полную времениподобную геодезическую $\gamma$, максимальную на любом интервале длины $\pi/q$. Тогда $M$ изометрично односвязному геодезически полному $n$-мерному лоренцеву многообразию постоянной кривизны $-q^2$.*

Изучение влияния кривизны на якобиевы поля возможно не только вдоль времениподобных, но и вдоль изотропных геодези-

ческих. Секционную кривизну для этого использовать уже нельзя, вследствие того что она не определена для изотропных (особых) плоскостей. Однако определяемое ниже понятие будет работать.

**Определение Г.6.** *Если* $\sigma$ — изотропная плоскость и $N$ — произвольный ненулевой элемент из одномерного пространства изотропных векторов в $\sigma$, то *изотропная секционная кривизна плоскости* $\sigma$ *относительно вектора* $N$, $K_N(\sigma)$, определяется посредством формулы

$$K_N(\sigma) = \frac{\langle R(A, N) N, A\rangle}{\langle A, A\rangle},$$

где $A$ — произвольный неизотропный вектор в $\sigma$.

Это выражение для изотропной секционной кривизны не зависит от вектора $A$, а зависит (квадратично) от вектора $N$. Эта кривизна имеет интересные связи с обычной секционной кривизной (см., например, предложение 2.3, Харрис (1979)).

**Предложение Г.7.** *Если в единственной точке лоренцева многообразия все изотропные секционные кривизны положительны (соответственно отрицательны), то времениподобная секционная кривизна в этой точке не ограничена снизу (соответственно сверху). Если же все изотропные секционные кривизны обращаются в нуль, то все времениподобные и пространственноподобные секционные кривизны равны. Поэтому лоренцево многообразие, размерность которого не меньше трех, имеет постоянную кривизну тогда и только тогда, когда его изотропная секционная кривизна всюду равна нулю.*

Изотропную секционную кривизну можно использовать по отношению к якобиевым полям во многом также, как и времениподобную секционную кривизну.

**Предложение Г.8.** *Пусть* $\beta$: $[0, L] \to M^n$ — *изотропная геодезическая (параметризация аффинная), у которой* $T = \beta'$. *Если для всех неизотропных векторов* $V$, *перпендикулярных* $T$, $K_T(V \wedge T) \leqslant 0$, *то* $\beta$ *не имеет сопряженных точек. Если для некоторого* $q$ *неравенство* $K_T(V \wedge T) \geqslant q^2$ *выполнено для всех таких* $V$, *или, более общо, если* $\operatorname{Ric}(T, T) \geqslant (n-2)q^2$, *то* $L \geqslant \pi/q$ *означает, что* $\beta$ *должна иметь сопряженную точку.*

Изотропная секционная кривизна пригодна также и для теорем типа Рауха.

**Теорема Г.9** (теорема сравнения Рауха для изотропных геодезических). *Пусть* $\beta_i$: $[0, L] \to M_i$, $i = 1, 2$, — *изотропные геодезические,* $T_i = \beta_i'$. *Пусть* $V_i$, $i = 1, 2$, — *якобиевы поля, перпендикулярные вдоль* $\beta_i$, *но не всюду параллельные* $T_i$ (*и поэтому нигде непараллельные* $T_i$), *для которых* $V_i(0) = 0$ *и* $\langle V_1', V_1'\rangle_0 = \langle V_2', V_2'\rangle_0$.

*Предположим, что для любого $t$ из $[0, L]$ и для любых неизотропных векторов $X_i$ в $\beta_i(t)$, перпендикулярных $T_i$, выполняется неравенство*

$$K_{T_1}(X_1 \wedge T_1) \leqslant K_{T_2}(X_2 \wedge T_2)$$

*и что $\beta_2$ не имеет точек, сопряженных $\beta_2(0)$. Тогда для всех $t$ из $[0, L]$*

$$\langle V_1, V_1\rangle_t \geqslant \langle V_2, V_2\rangle_t.$$

Необходимость использования перпендикулярных векторных полей делает эту теорию менее удобной по сравнению с соответствующей теорией для времениподобных геодезических.

Подробности, касающиеся предложения Г.8 и теоремы Г.9, можно найти в работе Харриса (1979).

# ЛИТЕРАТУРА


Авез (Avez A.)
(1963) Essais de géométrie riemannienne hyperbolique globale. Applicationes à la Relativité Générale. Ann. Inst. Fourier 132, 105—190.
Андерсон (Anderson J. L.)
(1967) Principles of Relativity Physics. Academic Press. New York.
Ауслендер, Маркус (Auslander L., Marcus L.)
(1959) Flat Lorentz 3-Manifolds. Memoir 30. Amer. Math. Soc.
Берже (Berger M.)
(1960) Les variétés riemanniennes (1/4)-pincées, Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa. Ser. III 14, 161—170.
Бёлтс (Bölts G.)
(1977) Existence und Bedeutung von konjugierten Werten in der Raum-Zeit, Bonn Universität, Diplomarbeit.
Бим (Beem J. K.)
(1976a) Conformal changes and geodesic completeness. Commun. Math. Phys. 49, 179—186.
Бим (Beem J. K.)
(1976б) Globally hyperbolic space-times which are timelike Cauchy complete. Gen. Rel. Grav. 7, 339—344.
Бим (Beem J. K.)
(1976в) Some examples of incomplete space-times. Gen. Rel. Grav. 7, 501—509.
Бим (Beem J. K.)
(1977) A metric topology for causally continuous completions. Gen. Rel. Grav. 8, 245—257.
Бим (Beem J. K.)
(1978a) Homothetic maps of the space-time distance function and differentiability· Gen. Rel. Grav. 9, 793—799.
Бим (Beem J. K.)
(1978б) Proper homothetic maps and fixed points. Lett. Math. Phys. 2, 317—320.
Бим (Beem J. K.)
(1980) Minkowski space-time is locally extendible. Commun. Math. Phys. 72, 273—275.
Бим, By (Beem J. K., Woo P. Y.)
(1969) Double Timelike Surfaces. Memoir 92. Amer. Math. Soc.
Бим, Эрлих (Beem J. K., Ehrlich P. E.)
(1977) Distance lorentzienne finie et géodésiques f-causales incomplètes. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A. 581, 1129—1131.
Бим, Эрлих (Beem J. K., Ehrlich P. E.)
(1978) Conformal deformations, Ricci curvature and energy conditions on globally hyperbolic space-times. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 84, 159—175.
Бим, Эрлих (Beem J. K., Ehrlich P. E.)
(1979a) Singularities, incompleteness and the Lorentzian distance function. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 85, 161—178.

Бим, Эрлих (Beem J. K., Ehrlich P. E.)
(1979б) The space-time cut locus. Gen. Rel. Grav., 11, 89—103.
Бим, Эрлих (Beem J. K., Ehrlich P. E.)
(1979в) Cut points, conjugate points and Lorentzian comparison theorems. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 86, 365—384.
Бим, Эрлих (Beem J. K., Ehrlich P. E.)
(1979г) A Morse index theorem for null geodesics. Duke Math. J. 46, 561—569.
Бим, Эрлих (Beem J. K., Ehrlich P. E.)
(1980) Stability of geodesic incompleteness for Robertson—Walker space-times. Gen. Rel. Grav. 13, 239—255.
Бим, Эрлих, Пауэлл (Beem J. K., Ehrlich P. E., Powell T. G.)
(1982) Warped product manifolds in relativity. Einstein volume. Athens. Greece. Th. Rassias, G. Rassias, eds, Selected Studies, North Holl., 41—56.
Биркгоф, Рота (Birkhoff G. D., Rota G.-C.)
(1969) Ordinary Differential Equations, second edition. Blaisdell, Waltham, Massachusetts.
Бишоп, Криттенден (Bishop R. L., Crittenden R.)
(1964) Geometry of Manifolds. Academic Press. New York.
(1967) [Имеется перевод: Бишоп Р., Криттенден Р. Геометрия многообразий. — М.: Мир.]
Бишоп, О'Нейл (Bishop R. L., O'Neill B.)
(1969) Manifolds of negative curvature. Trans. Amer. Math. Soc. 145, 1—49.
Бойер, Линдквист (Boyer R. H., Lindquist R. W.)
(1967) Maximal analytic extension of the Kerr metric — J. Math. Phys. 8, 265—281
Бойер, Прайс (Boyer R. H., Price T. G.)
(1965) An interpretation of the Kerr metric in General Relativity. Proc. Camb. Phil. Soc. 61, 531—534.
Бонди (Bondi H.)
(1968) Cosmology, second edition Cambridge University Rress, Cambridge.
Боссхард (Bosshard B.)
(1976) On the B-boundary of the closed Friedmann model. Commun. Math. Phys. 46, 263—268.
Брилл, Флаэрти (Brill D., Flaherty F.)
(1976) Isolated maximal surfaces in spacetime. Commun. Math. Phys. 50, 157—165.
Буземан (Busemann H.)
(1942) Metric Methods in Finsler Spaces and in the Foundations of Geometry. Annals of Math. Studies 8. Princeton University Press. Princeton. New Jersey
Буземан (Busemann H.)
(1955) The Geometry of Geodesics. Academic Press. New York.
(1962) [Имеется перевод: Буземан Г. Геометрия геодезических. — М.: Физматгиз.]
Буземан (Busemann H.)
(1967) Timelike Spaces. Dissertationes Math. Rozprawy Mat. 53.
Буземан, Бим (Busemann H., Beem J. K.)
(1966) Axioms for indefinite metrics. Rnd. Cir. Math. Palermo 15, 223—246.
Бьюдик, Сакс (Budic R., Sachs R. K.)
(1974) Causal boundaries for general relativistic spacetimes. J. Math. Phys. 15, 1302—1309.
Бьюдик, Сакс (Budic R., Sachs R. K.)
(1976) Scalar time functions: differentiability. — in Differential Geometry and Relativity eds. M. Cohen and M. Flato, Reidel: Dordrecht, 215—224.
Вейнберг (Weinberg S.)
(1972) Gravitation and Cosmology. John Wiley. New York
(1975) [Имеется перевод: Вейнберг С. Гравитация и космология. — М.: Мир]
Вольф (Wolf J. A.)

1961) Homogeneous manifolds of constant curvature — Comment. Math. Helv. 36, 112—147.
Вольф (Wolf J. A.)
(1974) Spaces of Constant Curvature, 3rd edition. Publish or Perish Press. Boston
(1982) [Имеется перевод второго издания: Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. — М.: Наука]
Вонг (Wang H.-C.)
(1951) Two theorems on metric spaces. Pacific J. Math. 1, 473—480.
Вонг (Wang H.-C.)
(1952) Two-point homogeneous spaces. Ann. of Math. 55, 177—191.
Вудхауз (Woodhouse N. M. J.)
(1973) The differentiable and causal structures of space-time. J. Math. Phys. 14, 495—501.
Вудхауз (Woodhouse N. M. J.)
(1976) An application of Morse theory ti space-time geometry. Commun. Math. Phys. 46, 135—152.
Галливер (Gulliver R.)
(1975) On the variety of manifolds without conjugate points. Trans. Amer. Math. Soc. 210, 185—201.
Галлоуэй (Galloway G.)
(1977) Closure in antisotropic cosmological models. J. Math. phys. 18, 250—252.
Галлоуэй (Galloway G.)
(1979) A generalization of Myers' Theorem and an application to relativistic cosmology — J. Diff. Geo. 14, 105—116.
Герок (Geroch R. P.)
(1968а) Spinor structure of space-times in general relativity I. J. Math. Phys., 9, 1739—1744.
Герок (Geroch R. P.)
(1968б) What is a singularity in general relativity. Ann. Phys. (N. Y.) 48, 526—540.
Герок (Geroch R. P.)
(1969) Limits of spacetimes. Commun. Math. Phys. 13, 180—193.
Герок (Geroch R. P.)
(1970) Domain of dependence. J. Math. Phys. 11, 437—449.
Герок, Кронхеймер, Пенроуз (Geroch R. P., Kronheimer E. H., Penrose R.)
(1972) Ideal points in space-time. Proc. Roy. Soc. Lond. A327, 545—567.
Герок, Хоровиц (Geroch R. P., Horowitz G. T.)
(1979) Global structure of space-time in General Relativity: An Einstein Centenary Survey, eds. S. Hawking and W. Israel, Cambridge University Press. Cambridge, 212—293.
Гёбель (Göbel R.)
(1976) Zeeman topologies on space-times og general relativity theory. Commun. Math. Phys. 46, 289—307.
Грейвс (Graves)
(1979) Codimention one isometric immersions between Lorentz spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 252, 367—392.
Грейвс, Номидзу (Graves, Nomizu K.)
(1978) On sectional curvature of indefinite metrics. Math. Ann. 232, 267—272.
Грин Л. (Green L. W.)
(1958) A theorem of E. Hopf. Mich. Math. J. 5, 31—34.
Грин Р. (Green R. E.)
(1970) Isometric Embeddings of Riemannian and Pseudo-Riemannian Manifolds. Memoir 97, Amer. Math. Soc.
Громол, Клингенберг, Мейер (Gromoll D., Klingenberg W., Meyer W.)
(1975) Riemannsche Geometrie im Grossen. Lectures Notes in Math. 55. Springer-Verlag. Berlin.
(1971) [Имеется перевод первого издания: Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. — М.: Мир.]

Громол, Мейер (Gromoll D., Meyer W.)
(1969) On complete open manifolds of positive curvature. Ann. of Math. 90, 75—90.
Дайцер, Номидзу (Dajczer M., Nomizu K.)
(1980a) On The boundedness of Ricci curvature of an indefinite metric. Bol. Soc. Brazil Math. 11, 25—30.
Дайцер, Номидзу (Dajczer M., Nomizu K.)
(1980б) On sectional curvature of indefinite metrics II — Math. Annalen 247, 279—282.
Джонсон (Johnson R. A.)
(1977) The bundle boundary in some special cases. J. Math. Phys. 18, 898—902.
Додсон (Dodson C. T. J.)
(1978) Space-time edge geometry. Int. J. Theor. Phys., 17, 389—504.
Додсон (Dodson C. T. J.)
(1980) Categories, Bundles and Spacetime Topology. Shiva Math. Series 1 Shiva, Kent.
Додсон, Постон (Dodson C. T. J., Poston T.)
(1977) Tensor Geometry: The Geometric Viewpoint and Its Uses. Survey and Reference Works in Math. 1, Pitman, San Francisco.
Додсон, Салли (Dodson C. T. J., Sulley L. J.)
(1980) On bundle completion of parallelizable manifolds. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 87, 523—525.
Ердли, Смарр (Eardley D. M., Smarr L.)
(1979) Time functions in numerical relativity: Marginally bound dust collapse. Phys. Rev. D 19, 2239—2259.
Зейферт (Seifert H.—J.)
(1967) Global connectivity by timelike geodesics. Zs. f. Naturforsche. 22a, 1356—1360.
Зейферт (Seifert H.—J.)
(1971) The causal boundary of space-times. Gen. Rel. Grav. 1, 247—259.
Зиман (Zeeman E. C.)
(1964) Causality implies the Lorentz group. J. Math. Phys. 5, 490—493.
Зиман (Zeeman E. C.)
(1967) The topology of Minkowski space. Topology. 6, 161—170.
Картер (Carter B.)
(1971a) Causal structure in space-time. Gen. Rel. Grav. 1, 349—391.
Картер (Carter B).
(1971б) Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom. Phys. Rev. Lett. 26, 331—333.
Каэн, Паркер (Cahen M., Parker M.)
(1980) Pseudo-riemannian Symmetric Spaces. Memoir 229. Amer. Math. Soc.
Келли (Kelly J. L.)
(1955) General Topology Univ. Ser. in Higher Math. D. Van Nostrand, Princeton, New Jersey.
(1981) [Имеется перевод более позднего издания: Келли Дж. Л. Общая топология. — М.: Наука.]
Киконе, Эрлих (Chicone C., Ehrlich P.)
(1980) Line integration of Ricci curvature and conjugate points in Lorentzian and Riemannian manifolds. Manuscripta Math. 31, 297—316.
Кларке (Clarke C. J. S.)
(1970) On the global isometric embedding of pseudo-Riemannian manifolds. Proc. Roy. Soc. Lond. A314, 417—428.
Кларке (Clarke C. J. S.)
(1971) On the geodesic completeness of causal space-times. Proc. Camb. Phil. Soc. 69, 319—324.
Кларке (Clarke C. J. S.)
(1973) Local extensions in singular space-times. Commun. Math. Phys. 32, 205—214.
Кларке (Clarke C. J. S.)

(1975) Singularities in globally hyperbolic space-times. Commun. Math. Phys. 41, 65—78.
Кларке (Clarke C. J. S.)
(1976) Space-time singularities. Commun. Math. Phys. 49, 17—23.
Кларке, Шмидт (Clarke C. J. S., Schmidt B. G.)
(1977) Singularities: the state of the art. Gen. Rel. and Grav. 8, 129—137.
Клингенберг (Klingenberg W.)
(1959) Contributions to Riemannian geometry in the large. Ann. of Math. 69, 654—666.
Клингенберг (Klingenberg W.)
(1961) Uber Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit nach positiver Krummung. Comment. Math. Helv. 35, 47—54.
Клингенберг (Klingenberg W.)
(1962) Uber Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit nach oben beschrankter Krummung. Annali di Mat. 60, 49—59.
Клингенберг (Klingenberg W.)
(1978) Lectures on Closed geodesics. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 230. Springer-Verlag. New York.
(1982) [Имеется перевод: Клингенберг В. Лекции о замкнутых геодезических. — М.: Мир.]
Кобаяси (Kobayashi S.)
(1967) Ov conjugate and cut loci, Studies in global geometry and analysis, MAA studies in Math. 4, 96—122.
Кобаяси, Номидзу (Kobayashi S., Nomizu K.)
(1963) Foundations of Differential Geometry, vol. I. Interscience Tracts in Pure and Applied Math. 15 John Wiley, New York.
(1981) [Имеется перевод: Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии т. I. — М.: Наука.]
Кон-Фоссен (Cohn-Vossen S.)
(1936) Total Krümmung und geodatische linien auf einfach zusammenhangenden offenen vollstandigen Flachenstucken. Recueil Mathematique 1, 139—163.
(1959) [Имеется перевод: Полная кривизна и геодезические линии на односвязных открытых полных поверхностях. — В кн.: Кон-Фоссен С. Э. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. — М.: Физматгиз.]
Криттенден (Crittenden R.)
(1962) Minimum and conjugate points in symmetric spaces. Cand. J. Math. 14, 320—328.
Кронхеймер, Пенроуз (Kronheimer E. H., Penrose R.)
(1967) On the structure of causal Spaces — Proc. Camb. Phil. Soc. 63, 481—501.
Крускал (Kruskal M. D.)
(1960) Maximal extension of Schwarzschild metric Phys. Rev. 119, 1743—1745.
Кулкарни (Kulkarni R. S.)
(1978) Fundamental groups of homogeneous space-forms. Math. Ann. 234, 51—60.
Кулкарни (Kulkarni R. S.)
(1979) The values of sectional curvature in indefinite metrics. Comment. Math. Helv. 54, 173—176.
Кундт (Kundt W.)
(1963) Note on the completeness of spacetimes. Zs. für Phys. 172, 488—489.
Лернер (Lerner D. E.)
(1972) Techniques of topology and differential geometry in general relativity. Springer Lecture Notes in Phys. 14, 1—44.
Лернер (Lerner D. E.)
(1973) The space of Lorentz metrics. Commun. Math. Phys. 32, 19—38.
Ли (Lee K. K.)
(1975) Another possible abnormality of compact space-time. Canad. Math. Bul. 18, 695—697.
Майерс (Myers S. B.)

(1935) Riemannian manifolds in the large. Duke Math. J. 1, 39—49.
Майерс, Стинрод (Myers S. B., Steenrod N.)
(1939) The group of isometries of a Riemannian manifold — Ann. of Math. 40, 400—416.
Манкрс (Munkres J. R.)
(1963) Elementary Differential Topology. Ann. of Math. Studies 54. Princeton University Press. Princeton. New Jersey.
(1979) [Имеется перевод более позднего издания: Манкрс Дж. Элементарная дифференциальная геометрия. — В кн.: Милнор Дж., Сташеф Дж. Характеристические классы. — М.: Мир.]
Манкрс (Munkres J. R.)
(1975) Topology: A First Course. Prentice—Hall. Enqlewood Cliffs. New Jersey.
Марат (Marathe K.)
(1972) A condition for paracompactness of a manifold. J. Diff. Geo. 7, 571—573.
Маркус (Marcus L.)
(1955) Line element fields and structures on differentiable manifolds. Ann. of Math. 62, 411—417.
Марсден (Marsden J. E.)
(1973) On completeness of homogeneous pseudo-Riemannian manifolds. Indian Univ. Math. J. 22, 1065—1066.
Марсден, Эбин, Фишер (Marsden J. E., Ebin D. G., Fischer A. E.)
(1972) Diffeomorphism groups, hydrodinamics and relativity. In Proceedings of the thirteenth biennial seminar of the Canadian Mathematical Congress, ed. J. R. Vanstone, 135—279.
Мизнер (Misner C. W.)
(1967) Taub-NUT space as a counterexample to almost anything in Relativity and Astrophysics I. Relativity and Cosmology. Amer. Math. Soc. ed. J. Ehlers, 160—169.
Мизнер, Тауб (Misner C. W., Taub A. H.)
(1969) A singularity-free empty universe. Soc. Phys. J. E. T. P. 28, 122—133.
Мизнер, Торн, Уилер (Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A.)
(1973) Gravitation. W. H. Freeman, San Francisco.
(1977) [Имеется перевод: Мизнер Ч., Торн К. С., Уилер Дж. А. Гравитация. — М.: Мир.]
Миллер (Miller J. G.)
(1979) Bifurcate Killing Horizons — J. Math. Phys. 20, 1345—1348.
Милнор (Milnor J.)
(1963) Morse Theory. Ann. of Math. Studies 51. Princeton University Press. Princeton. New Jersey.
(1966) [Имеется перевод: Милнор Дж. Теория Морса. — М.: Мир.]
Монкриф (Moncrief V.)
(1975) Spacetime symmetries and linearization stability of the Einstein equations. J. Math. Phys. 16, 493—498.
Морроу (Morrow J.)
(1970) The denseness of complete Riemannian metrics. J. Diff. Geo. 4, 225—226
Морс (Morse M.)
(1934) The calculus of Variations in the Large. Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. vol. 18.
Номидзу (Nomizu K.)
(1979) Left invariant Lorentz metrics on Lie Groups. Osaka Math. J. 16, 143—150.
Номидзу, Одзеки (Nomizu K., Ozeki H.)
(1961) The existence of complete Riemannian metrics. Proc. Amer. Math. Soc. 12, 889—891.
О'Нейл (O'Neill B.)
(1966) Elementary Differential Geometry. Academic Press. New York.
О'Нейл (O'Neill B.)
(1981) Semi-riemannian Manifolds. Academic Press. New York,

О'Салливэн (O'Sullivan J.)
(1974) Manifolds without conjugate points. Math. Annalen 210, 295—311.
Оханиан (Ohanian B.)
(1976) Gravitation and Spacetime W. W. Norton. New York
Палэ (Palais R. S.)
(1957) On the differentiability of isometries. Proc. Amer. Math. Soc. 8, 805—807.
Паркер (Parker P. E.)
(1979) Distributional geometry. J. Math. Phys. 20. 1423—1426.
Патриа (Pathria R. K.)
(1974) The Theory of Relativity. Second edition. Pergamon Press, Oxford.
Пенроуз (Penrose R.)
(1965) Gravitational collapse and space-time singularities. Phys. Rev. Lett. 14, 57—59.
Пенроуз (Penrose R.)
(1968) Structure of space-time in Battelle Recontres. Lectires in Mathematics and Physics ed. by de Witt C. M. and Wheeler J. A., Benjamin. New York, 121—235.
(1972а) [Имеется перевод: Пенроуз Р. Структура пространства-времени. — М.: Мир.]
Пенроуз (Penrose R.)
(1972б) Techniques of Differential Topology in Relativity. Regional Conference Series in Applied Math. 7. SIAM. Philadelphia.
Петров А. З.
(1961) Пространства Эйнштейна. — М.: Физматгиз.
Пуанкаре (Poincaré H.)
(1905) Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes. Trans. Amer. Math. Soc. 6, 237—274.
(1972) [Имеется перевод: О геодезических на выпуклых поверхностях. — В кн.: Избранные труды т. 2. — М.: Наука.]
Раух (Rauch H.)
(1951) A contribution to differential geometry in the large. Ann. of Math. 54, 38—55.
Рецлофф, Де-Фацио, Деннис (Retzloff D. G., DeFacio B., Dennis P.)
(1981) A new mathematical formulation of accelerated observers in general relativity. J. Math. Phys.
Риан, Шепли (Ryan M. P., Shepley L. C.)
(1975) Homogeneous Relativistic Cosmologies Princeton. Series in Physics. Princeton University Press. Princeton New Jersey.
Ринов (Rinow W.)
(1932) Uber Zusammenhange der Differentialgeometrie im Grossen und im Kleinen. Math. Z. 35, 512—528.
Сакс, By (Sachs R. K., Wu H.)
(1977а) General Relativity for Mathematicians. Grad. Texts in Math. 48. Springer Verlag. New York.
Сакс, By (Sachs R. K., Wu H.)
(1977б) General Relativity and cosmology. Bull. Amer. Math. Soc. 83, 1101—1164.
Серр (Serre J. P.)
(1951) Homologie singulière des espaces fibrés, applications. Ann. Math. 54, 425—505.
(1958) [Имеется перевод: Сингулярные гомологии расслоенных пространств — В кн.: Расслоенные пространства и их приложения. — М.: ИЛ.]
Смит (Smith J. W.)
(1960а) Fundamental groups on a Lorentz manifold. Amer. J. Math. 82, 873—890.
Смит (Smith J. W.)
(1960б) Lorentz structure on the plane. Trans. Amer. Math. Soc. 95, 226—237.
Спивак (Spivak M.)
(1970) A Comprehensive Introduction to Differential Geometry vol. II Publish or Perish Press, Boston.

Стинрод (Steenrod N. E.)
(1951) The Topology of Fibre Bundles. Princeton University Press. Princeton. New Jersey.
(1953) [Имеется перевод: Стинрод Н. Топология косых произведений. — М.: ИЛ.]
Тауб (Taub A. H.)
(1951) Empty space-times admitting a Three parameter group of motions. Ann. of Math. 53, 472—490.
Тауб (Taub A. H.)
(1980) Space-times with distribution valued curvature tensors.
Типлер (Tipler F.)
(1977а) Singularities and causality violation. Ann. of Phys. 108, 1—36.
Типлер (Tipler F.)
(1977б) Singularities in universes with negative cosmological constant. Astrophys. J. 209, 12—15.
Типлер (Tipler F.)
(1977в) Black holes in closed universes. — Nature 270è, 500—501.
Типлер (Tipler F.)
(1977г) Causally symmetric space-times. J. Math. Phys. 18, 1568—1573.
Типлер (Tipler F.)
(1978) General Relativity and conjugate ordinary differential equations. J. Differential Equations 30, 165—174.
Типлер (Tipler F.)
(1979) Existence of closed timelike geodesics in Lorentz spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 76, 145—147.
Типлер, Кларке, Эллис (Tipler F., Clarke C. J. S., Ellis G. F. R.)
(1980) Singularities and horizons. A review article in General Relativity and Gravitation. vol. 2 ed. A. Held. Plenum Press. New York, 97—206.
Титс (Tits J.)
(1955) Sur certaines classes d'espaces homogènes de groups de Lie, Memoir Belgian Academy of Sciences.
Торп (Thorpe J.)
(1969) Curvature and the Petrov canonical forms. J. Math. Phys. 10, 1—7.
Торп (Thorpe J.)
(1977а) Curvature invariants and space-time singularities. — J. Math. Phys. 18, 960—964.
Торп (Thorpe J.)
(1977б) The observer bundle. Abstracts of contributed papers to the 8th International General Relativity Congress 334.
Томимацу, Сато (Tomimatsu A., Sato H.)
(1973) New series of exact solutions for gravitational fields of spinning mass. Prog. Theor. Phys. 50, 95—110.
Уайтхед (Whitehead J. H. C.)
(1932) Convex regions in the geometry of path. Quart. J. Math. Oxford Ser. 3, 33—42.
Уайтхед (Whitehead J. H. C.)
(1933) Convex regions in the geometry of paths. Addendum Quart. J. Math. Oxford Ser. 4, 226—227.
Уайтхед (Whitehead J. H. C.)
(1935) On the covering of a complete space by the geodesics through a point. Ann. of Math. 36, 679—704.
Уилер (Wheeler J. A.)
(1977) Singularity and unanimity. Gen. Rel. Grav. 8, 713—715.
Уленбек (Uhlenbeck K.)
(1975) A Morse theory for geodesics on a Lorentz manifold. Topology 14, 69—90.
Уолкер (Walker A. G.)
(1944) Completely symmetric spaces. J. Lond. Math. Soc. 19, 219—226.

Уолтер (Wolter F.-E.)
(1979) Distance function and cut loci on a complete Riemannian manifold. Archiv. der Math. 32, 92—96.
Фиган, Миллман (Fegan H., Millman R.)
(1978) Quadrants of Riemannian metrics. Mich. Math. J. 25, 3—7.
Фишер, Марсден (Fischer A. E., Marsden J. E.)
(1972) The Einstein equations of evilution. A geometric approach. J. Math. Phys. 13, 546—568.
Флаэрти (Flaherty F.)
(1975a) Lorentzian manifolds of nonpositive curvature. Proc. Symp. Pure Math. 27, part 2. Amer. Math. Soc. 395—399.
Флаэрти (Flaherty F.)
(1975б) Lorentzian manifolds of nonpositive curvature II. Proc. Amer. Math. Soc. 48, 199—202.
Франкл (Frankel T.)
(1979) Gravitational Curvature. W. H. Freeman. San Francisco
Фрейденталь (Freudental H.)
(1931) Uber die enden topologischer Raume und Gruppen. Math. Zeitschrift 33, 692—713.
Фридландер (Friedlander F. G.)
(1975) The Wave Equation on a Curved Space-time. Cambridge University Press. Cambridge
Харрис (Harris S. G.)
(1979) Some comparison theorems in the geometry of Lorentz manifolds. Thesis. University of Chicago.
Харрис (Harris S. G.)
(1982) A triangle comparison theorem for Lorentz manifolds. Indiana Math. J. 31, 289—308.
Хартман (Hartman P.)
(1964) Ordinary Differential Equations. Wiley. New York.
(1970) [Имеется перевод: Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир.]
Хелгасон (Helgason S.)
(1962) Differential Geometry and Symmetric Spaces. Academic Press. New York.
(1964) [Имеется перевод: Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир.]
Херман (Hermann R.)
(1968) Differential Geometry and The Calculus of Variations. Academic Press. New York.
Хикс (Hicks N. J.)
(1965) Notes on Differential Geometry. D. Van Nostrand Princeton. New Jersey.
Хирш (Hirsch M.)
(1976) Differential topology. Grad. Texts in Math. 33. Springer-Verlag, New York.
Хокинг (Hawking S. W.)
(1967) The occurrence of singularities in cosmology III. Causality and singularities. Proc. Roy. Soc. Lond. A300, 187—201.
Хокинг (Hawking S. W.)
(1968) The existence of cosmic time functions. Proc. Roy. Soc. Lond. A308, 433—435.
Хокинг Hawking S. W.)
(1971) Stable and generic properties in general relativity. Gen. Rel. Grav. 1, 393—400.
Хокинг, Кинг, Маккартни (Hawking S. W., King A. R., McCarthy P. J.)
(1976) A new topology for curved space-time which incorporates the causal, differential and conformal structures. J. Math. Phys. 17, 174—181.
Хокинг, Пенроуз (Hawking S. W., Penrose R.)
(1970) The singularities of gravitational collapse and cosmology. Proc. Roy. Soc. Lond. A314, 529—548.

Хокинг, Сакс (Hawking S. W., Sachs R. K.)
(1974) Causally continuous space-times. Commun. Math. Phys. 35, 287—296.
Хокинг, Эллис (Hawking S. W., Ellis G. F. R.)
(1973) The Large Scale Structure of Space-time. Cambridge University Press. Cambridge.
(1977) [Имеется перевод: Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. — М.: Мир.]
Хопф, Ринов (Hopf H., Rinow W.)
(1931) Uber den Begriff des vollständigen differentialgeometrischen Fläche. Comment. Math. Helv. 3, 209—225.
Хопф (Hopf E.)
(1948) Closed surfaces without conjugate points. Proc. Nat. Acad. Sci. 34, 47—51.
Чигер, Громол (Cheeger J., Gromoll D.)
(1971) The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature. J. Diff. Geo. 6, 119—128.
Чигер, Громол (Cheeger J., Gromoll D.)
(1972) On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature. Ann. Math. 96, 413—433.
Чигер, Эбин (Cheeger J., Ebin D.)
(1975) Comparison Theorems in Riemannian Geometry. North-Holland, Amsterdam.
Шмидт (Schmidt B. G.)
(1971) A new definition of singular points in general relativity. Gen. Rel. Grav. 1, 269—280.
Шмидт (Schmidt B. G.)
(1973) The local b-completeness of space-times. Commun. Math. Phys. 29, 49—54.
Шоке-Бруа, Фишер, Марсден (Choquet-Bruhat Y., Fischer A. E., Marsden J. E.)
(1979) Maximal hyperfaces and positivity of mass. Il nuovo cimento.
Эберлейн (Eberlein P.)
(1972) Product manifolds that are not negative space forms. Mich. Math. J. 19, 225—231.
Эберлейн (Eberlein P.)
(1973) When is a geodesic flow of Anosov type I. J. Diff. Geo. 8, 437—463.
Эберлейн, О'Нейл (Eberlein P., O'Neill B.)
(1973) Visibility manifolds. Pacific J. Math. 46, 45—109.
Эверсон, Толбот (Everson J., Talbot C. J.)
(1976) Morse theory on timelike and causal curves. Gen. Rel. Grav. 7, 609—622.
Эверсон, Толбот (Everson J., Talbot C. J.)
(1978) Erratum: Morse theory on timelike and causal curves — Gen. Rel. Grav. 9, 1047.
Эйнштейн (Einstein A.)
(1916) Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Annalen der Phys. 49, 769—822.
(1966) [Имеется перевод: Эйнштейн А. Собрание научных трудов. М.: Наука, т. 2.]
Эйнштейн (Einstein A.)
(1953) The Meaning of Relativity. Fouth edition. Princeton University Press. Princeton. New Jessey.
(1955) [Имеется перевод: Эйнштейн А. Сущность теории относительности. — М.: ИЛ.]
Эллис, Шмидт (Ellis G. F. R., Schmidt B. G.)
(1977) Singular space-times. Gen. Rel. Grav. 8, 915—953.
Эресман (Ehresmann C.)
(1951) Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. Colloque de Topologie (Espaces Fibrés). Bruxelles 1950. Masson. Paris. 29—55.
Эрлих (Ehrlich P. E.)
(1974) Metric deformations of curvature I: local convex deformations. Geometriae Dedicata 5, 1—24.

Эрлих (Ehrlich P. E.)
(1976a) Continuity properties of the injectivity radius function. Compositio Math. 29, 151—178.
Эрлих (Ehrlich P. E.)
(1976б) Metric deformations of curvature II: compact 3-manifolds. Geometriae Dedicata 5, 147—161.
Эшенбург (Eschenburg J.—H.)
(1975) Stabilitätsverhalten des Geodätischen Flüsses Riemannscher Mannigfaltigkeiten. Thesis. Bonn University, 1975.
Эшенбург, О'Салливэн (Eschenburg J.-H., O'Sullivan J.)
(1976) Growth of Jacobi fields and divergence of geodesics. Math. zeitschrift 150, 221—237.

# ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛОБАЛЬНАЯ ЛОРЕНЦЕВА ГЕОМЕТРИЯ

Дж. Бим
П. Эрлих